

## Über Teilbünde der $l$ -Gruppen<sup>1)</sup>

Von J. JAKUBÍK in Košice (Tschechoslowakei)

Die Arbeit besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil (Abs. 1, 2) wird ein in [7] gestelltes Problem über die Existenz gewisser Teilmengen  $X_0$  einer vollständigen  $l$ -Gruppe  $X$  gelöst ( $X_0$  soll eine vollständige  $l$ -Gruppe aber kein Teilverband in  $X$  sein). Im zweiten Teil (Abs. 4, 5) ist der Begriff eines  $\alpha$ -Teilverbandes  $X_0 \subset X$  definiert (wobei  $\alpha$  eine unendliche Kardinalzahl ist) und es wird ein analoges Problem für  $\alpha$ -Teilverbände behandelt. Im dritten Teil (Abs. 6–11) untersuchen wir die Mächtigkeit des Systems aller Teilmengen  $X_0$  mit den erwähnten Eigenschaften für den Fall, wenn  $X$  ein Vektorverband (bzw. eine  $l$ -Gruppe) von endlicher Dimension ist.

1. Wir benutzen die Begriffe und Bezeichnungen aus [2]. Es sei  $X$  eine  $l$ -Gruppe. Die Ordnungsrelation, die Verbandsoperationen und die Gruppenoperation in  $X$  bezeichnen wir mit  $\leq$ ,  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $+$ . Es sei  $X_0$  eine Untergruppe von  $X$ . Setzen wir voraus, daß (im Bezug auf die Ordnungsrelation  $\leq$ )  $X_0$  eine  $l$ -Gruppe ist; die Verbandsoperationen in  $X_0$  bezeichnen wir mit  $\wedge$ ,  $\vee$ .

2. Ist  $x \in X_0$ , setzen wir  $|x|_X = (x \cup 0) + ((-x) \cup 0)$ ,  $|x|_{X_0} = (x \vee 0) + ((-x) \vee 0)$  (vgl. [6], S. 28). Sind für  $X, X_0$  die Voraussetzungen aus dem Abs. 1 erfüllt, so ist  $|x|_{X_0} \cong |x|_X$  für jedes  $x \in X_0$ .

In der Arbeit von KANTOROWITSCH, WULICH und PINSKER [7] (S. 91, Problem 5) wurde das folgende Problem aufgeworfen: *Man soll solche vollständigen  $l$ -Gruppen  $X$  und  $X_0$  konstruieren, daß für ein Element  $x \in X_0$  die scharfe Ungleichung  $|x|_{X_0} > |x|_X$  bestehe, oder beweisen, daß solche Ungleichung unmöglich ist.*

Es ist leicht zu zeigen, daß die erwähnte Bedingung der folgenden äquivalent ist: es gibt ein Element  $x \in X_0$ , so daß  $x \vee 0 > x \cup 0$ . (Es ist nämlich  $|x|_X = 2(x \cup 0) - x$ ,  $|x|_{X_0} = 2(x \vee 0) - x$ .) In der Terminologie von [4] soll also  $X_0$  nur ein Teilbund (aber kein Teilverband) in  $X$  sein.

Die Lösung dieses Problems ist im Abs. 3 gegeben.

3. Ist  $M$  eine nichtleere Menge, so sei  $F(M)$  die Menge aller reellen Funktionen, deren Definitionsbereich  $M$  ist;  $F_1(M)$  sei die Menge aller  $f \in F(M)$ , welche nur ganzzahlige Werte annehmen. Die Operation  $+$  sei in  $F(M)$  und in  $F_1(M)$  in der üblichen Weise (koordinatenweise) eingeführt. Ist  $M = \{1, 2, \dots, n\}$ , so können die Elemente  $f \in F(M)$  als  $n$ -Tupel  $\{y_1, \dots, y_n\}$  ausgedrückt werden, wobei  $f(i) = y_i$ .

Es sei jetzt  $M = \{1, 2, 3\}$ ,  $X = F(M)$  und  $X_0$  die Menge aller Elemente  $(x, y, z)$  von  $X$ , wobei  $x, y$  beliebige reelle Zahlen sind und  $z = x + y$ . Dann ist  $X_0$  eine

<sup>1)</sup> Einige Ergebnisse dieser Arbeit wurden am II. Ungarischen Mathematischen Kongress (im August 1960) mitgeteilt.

(mit  $F(\{1, 2\})$  isomorph)  $l$ -Gruppe. Für das Element  $x = (1, -1, 0) \in X_0$  gilt  $x \vee 0 = (1, 0, 1)$ ,  $x \cup 0 = (1, 0, 0)$ .  $X$  und  $X_0$  sind vollständige  $l$ -Gruppen (und zugleich Vektorverbände). Damit ist das im Abs. 2 erwähnte Problem (bejahend) gelöst.

**B e m e r k u n g.** Dieses Ergebnis über  $F(\{1, 2, 3\})$  wird auch im Abs. 9 benutzt.

4. Es sei  $\alpha$  eine unendliche Kardinalzahl,  $S$  sei ein Verband,  $A \subset S$ . Wir setzen voraus, daß auch  $A$  ein Verband ist.<sup>2)</sup> Wir werden  $A$  einen  $\alpha$ -Teilverband von  $S$  nennen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Ist  $B \subset A$ ,  $\bar{B} \cong \alpha^3$ , und existiert  $s = \sup_s B$ , so ist zugleich  $s = \sup_A B$ . Untersuchen wir das folgende Problem: Es ist zu entscheiden, ob es  $X$  und  $X_0$  gibt, so daß die Voraussetzungen aus dem Abs. 1 erfüllt sind und  $X_0$  kein  $\alpha$ -Teilverband, aber für jede Kardinalzahl  $\beta < \alpha$  ein  $\beta$ -Teilverband von  $X$  ist.

5. Es sei  $\alpha$  eine reguläre Kardinalzahl und  $\omega_\alpha$  die zu  $\alpha$  gehörige Anfangszahl. Ferner sei  $W(\omega_\alpha + 1) = \{b : b < \omega_\alpha + 1\} = M$ ,  $X = F(M)$ .  $X_0$  sei die Menge aller  $f \in F(M)$ , für die es ein Element  $x = x(f) \in M$ ,  $x \neq \omega_\alpha$  gibt derart, daß die Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[x, \omega_\alpha]$  eine Konstante ist. Es ist klar, daß für  $X, X_0$  die Voraussetzungen aus dem Abs. 1 im Kraft sind.

Es sei  $B \subset X_0$ ,  $\bar{B} < \alpha$  und  $B$  sei von oben beschränkt in  $X$ . Offensichtlich ist  $X$  eine vollständige  $l$ -Gruppe, also existiert in  $X$  das Element  $\sup B = h$  und für jedes  $x \in M$  gilt  $h(x) = \sup f(x)$  ( $f \in B$ ). Da  $\omega_\alpha$  eine reguläre Ordinalzahl ist, gilt  $\sup x(f)$  ( $f \in B$ )  $= x_0 < \omega_\alpha$  im  $M$  ([1], Satz 27'; [3], S. 130). Da  $h$  eine Konstante auf dem Intervall  $[x_0, \omega_\alpha]$  ist, gehört  $h$  zu  $X_0$ , also ist zugleich  $\sup_{X_0} B = h$  und  $X_0$  ist ein  $\beta$ -Teilverband von  $X$  für jedes  $\beta < \alpha$ . Wir definieren für jedes  $x \in M$ ,  $x < \omega_\alpha$  die Funktion  $f_x \in X_0$  wie folgt:  $f_x(t) = 1$  für  $t \leq x$ ,  $f_x(t) = 0$  für  $t > x$ . Die Mächtigkeit der Menge  $B = \{f_x\}$  ist gleich  $\alpha$ . Bezeichnen wir mit  $g$  (bzw.  $g'$ ) die Funktion aus  $X$ , welche folgendermaßen definiert ist:  $g(t) = 1$  für  $t \in M$ ,  $t \neq \omega_\alpha$ ;  $g(\omega_\alpha) = 0$  (bzw.  $g'(t) = 1$  für jedes  $t \in M$ ). Dann gilt  $\sup B = g$ ,  $\sup_{X_0} B = g'$ .  $X_0$  ist also kein  $\alpha$ -Teilverband von  $X$ .

Damit haben wir folgendes bewiesen:

5. 1. **Satz.** *Es sei  $\alpha$  eine reguläre Kardinalzahl. Es gibt eine vollständige  $l$ -Gruppe  $X$  und eine Teilmenge  $X_0 \subset X$ , die zugleich eine  $l$ -Gruppe ist, derart, daß  $X_0$  für jede Kardinalzahl  $\beta < \alpha$  ein  $\beta$ -Teilverband aber kein  $\alpha$ -Teilverband von  $X$  ist.*

5. 2. Die im Abs. 5 konstruierte  $l$ -Gruppe  $X_0$  ist offensichtlich ein Vektorverband;  $X_0$  ist aber nicht vollständig. Das kann man folgendermaßen einsehen. Für jedes  $x \in M$ ,  $x \neq \omega_\alpha$  definieren wir die Funktion  $g_x$  durch transfinite Induktion wie folgt: Bezeichnet  $t_0$  das kleinste Element von  $M$ , setzen wir  $g_{t_0}(t_0) = 1$  und  $g_{t_0}(t) = 0$  für jedes  $t \in M$ ,  $t \neq t_0$ . Setzen wir voraus, daß  $x \in M$ ,  $x > t_0$  ist und daß die Funktionen  $g_t$  für  $t < x$  schon definiert sind. Gibt es in  $M$  kein unterer Nachbar von  $x$ , dann setzen wir  $g_x(x) = 1$ ,  $g_x(t) = 0$  für jedes  $t \in M$ ,  $t \neq x$ ; sonst bezeichnen wir mit  $x-1$  den unteren Nachbar von  $x$  und setzen  $g_x(x) = 1 - g_{x-1}(x-1)$ ,  $g_x(t) = 0$  für jedes  $t \in M$ ,  $t \neq x$ . Die Menge  $\{g_x\} = G$  ist eine Teilmenge von  $X_0$  und sie ist beschränkt

<sup>2)</sup> Ist  $P$  eine bezüglich der Relation  $\leq$  teilweise geordnete Menge und  $Q \subset P$ , so ist  $Q$  durch dieselbe Relation  $\leq$  teilweise geordnet. Wenn dabei  $A \subset Q$  ist und in  $Q$  (in  $P$ ) das Supremum  $s_1$  ( $s_2$ ) der Menge  $A$  existiert, so schreiben wir  $s_1 = \sup_Q A$  ( $s_2 = \sup_P A$ ).

<sup>3)</sup> Wir bezeichnen mit  $\bar{B}$  die Mächtigkeit der Menge  $B$ .

<sup>4)</sup> Mit  $[x, \omega_\alpha]$  bezeichnen wir die Menge aller  $z \in M$ , für welche die Beziehung  $x \leq z \leq \omega_\alpha$  gilt.

in  $X_0$ . Es sei  $g \in X_0$  eine obere Schranke der Menge  $G$ . Es gibt  $x_0 \in M$ ,  $x_0 < \omega_a$  derart, daß im Intervall  $[x_0, \omega_a]$   $g(t) = c (= \text{const})$  gilt. Aus der Konstruktion der Menge  $G$  folgt, daß es ein  $x_1 \in M$ ,  $x_0 < x_1 < \omega_a$  gibt, so daß das Intervall  $[x_0, x_1]$  mehr als zwei Elemente enthält und  $g_{x_1}(x_1) = 1$ ; es ist also  $c \cong 1$ . Es sei  $g' \in X$ ,  $g'(t) = c$  für  $t > x_1$  und  $g'(t) = g_t(t)$  für  $t \cong x_1$ . Dann gehört  $g'$  zu  $X_0$ ,  $g'$  ist eine obere Schranke von  $G$  und es ist  $g' < g$ . Also besitzt  $G$  kein Supremum in  $X_0$ .

5. 3. Die folgenden Fragen bleiben offen:

a) Ist die Voraussetzung über die Regularität der Kardinalzahl  $\alpha$  im Satz 1 notwendig? (D. h. bleibt der Satz für jede unendliche Kardinalzahl richtig?)

b) Kann man für jede reguläre Kardinalzahl die  $l$ -Gruppen aus dem Satz 1 so konstruieren, daß  $X, X_0$  vollständige  $l$ -Gruppen bzw. vollständige Vektorverbände sind?

6. Ist  $X$  eine  $l$ -Gruppe bzw. ein Vektorverband,  $U = \{u_1, \dots, u_m\} \subset X$ , so bezeichnen wir mit  $C(U)$  bzw.  $R(U)$  die Menge aller Elemente  $z = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$ , wobei  $\alpha_i$  ganze Zahlen bzw. reelle Zahlen sind.

In den Abs. 6–8 werden Vektorverbände von endlicher Dimension untersucht. Man nennt einen Vektorverband  $X'$  von Dimension  $n$  und schreibt  $\dim X' = n$ , wenn  $X'$  zu einem  $F(M)$ ,  $M = \{1, \dots, n\}$  isomorph ist;  $\dim X' = 0$  bzw.  $\dim X' = \infty$  bedeutet, daß  $X' = \{0\}$  bzw. daß die Relation  $\dim X' = n$  für keine nicht negative ganze Zahl  $n$  erfüllt ist. Wir wollen alle Teilmengen  $X_0 \subset X = F(\{1, \dots, n\})$  finden, welche Vektorverbände sind.

Ist  $H = \{h_1, \dots, h_k\} \subset X$ , so bezeichnen wir mit  $P(h_j)$  ( $j = 1, \dots, k$ ) die Menge aller  $i \in M = \{1, \dots, n\}$ , für welche  $h_j(i) > 0$ . Ferner sei  $P'(h_j, H) = \bigcup P(h_s)$  ( $s = 1, \dots, k; s \neq j$ ).

7. **Satz.** Eine Teilmenge  $X_0 \neq \{0\}$  von  $X = F(\{1, \dots, n\})$  ist ein Vektorverband genau dann, wenn es eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$  gibt, so daß  $X_0 = R(H)$  und  $H$  die folgende Bedingung erfüllt:

(A) Für jedes  $i = 1, \dots, n$  und jedes  $j = 1, \dots, k$  ist  $h_j(i) \cong 0$  und  $P(h_j) \subset P'(h_j, H)$ .

**Beweis.** a) Es sei  $H$  eine Teilmenge von  $X$ , für welche die Bedingung (A) und die Gleichung  $X_0 = R(H)$  erfüllt ist. Wählen wir ein beliebiges  $j_0 \in \{1, \dots, k\}$  aus. Nach (A) gibt es ein  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  derart, daß  $i_0 \in P(h_{j_0})$ ,  $i_0 \notin P'(h_{j_0}, H)$ . Es sei  $x \in X_0$ , also

$$(1) \quad x = \sum c_j h_j \quad (j = 1, \dots, k),$$

wobei  $c_j$  reelle Zahlen sind. Aus der Voraussetzung folgt nach (1)

$$(2) \quad x(i_0) = \sum c_j h_j(i_0) = c_{j_0} h_{j_0}(i_0).$$

Ist  $x = 0$ , so folgt aus (2) und aus den Beziehungen  $x(i_0) = 0$  und  $h_{j_0}(i_0) \neq 0$ , daß  $c_{j_0} = 0$  ist. Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit der Darstellung von  $x$  in der Form (1).

Gilt  $c_j \cong 0$  für  $j = 1, \dots, k$ , so ist nach (1)  $x \cong 0$ . Mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Darstellung gilt weiter: Ist  $c_j \cong 0$  für  $j = 1, \dots, k$  und ist  $c_{j_0} > 0$  mindestens für ein  $j_0$ , dann ist  $x > 0$ . Umgekehrt, sei  $x > 0$ . Da  $x(i_0) \cong 0$  und  $h_{j_0}(i_0) > 0$  ist, gilt nach (2)  $c_{j_0} \cong 0$ ; ferner ist mindestens ein  $c_j$  positiv. Also haben wir gewonnen:

(\*) Gilt für  $x \in X_0$  die Gleichung (1), so ist  $x > 0$  genau dann, wenn mindestens ein  $c_j$  positiv und alle  $c_j$  nichtnegativ sind.

Es sei  $M' = \{1, \dots, k\}$ ,  $Y = F(M')$ . Die Abbildung  $x \rightarrow (c_1, \dots, c_k)$  ist nach (\*) ein Isomorphismus

$$(3) \quad X_0 \rightarrow Y$$

der teilweise geordneten Gruppe  $X_0$  auf die teilweise geordnete Gruppe  $Y$ . Da  $Y$  eine vollständige  $l$ -Gruppe ist, ist auch  $X_0$  eine vollständige  $l$ -Gruppe. Es ist klar, daß dann  $X_0$  ein vollständiger Vektorverband ist und daß (3) auch als ein Isomorphismus dieser Vektorverbände betrachtet werden kann.

b) Es sei  $X_0 \subset X$  ein vollständiger Vektorverband. Da  $\dim X = n$  ist, gilt  $\dim X_0 = k \leq n$ , also gibt es ein Isomorphismus von der Form (3). Für  $j \in M'$  bezeichne  $y_j$  dasjenige Element aus  $Y$ , dessen  $j$ -te Koordinate gleich 1 und alle anderen Koordinaten gleich 0 sind. Es sei weiter  $h_j$  das Element von  $X_0$ , für welches in (3)  $h_j \leftrightarrow y_j$  gilt. Aus den Eigenschaften der Elemente  $y_j$  und aus (3) folgt:

( $\alpha$ )  $h_j > 0$  für  $j = 1, \dots, k$ ,

( $\beta$ ) Jedes  $x \in X_0$  ist eindeutig in der Form (1) darstellbar,

( $\gamma$ ) Gilt für  $x \in X_0$  die Gleichung (1) und ist  $x > 0$ , so ist  $c_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, k$ ) und insbesondere ist wenigstens ein  $c_j$  positiv.

Nehmen wir an, daß  $P(h_j) \subset P'(h_j, H)$  ist. Nach ( $\alpha$ ) gibt es eine reelle Zahl  $c > 0$ , so daß  $h_j(i) < \max ch_t(i)$  ( $t \in M'$ ,  $t \neq j$ ) für jedes  $i \in \cup P(h_t)$  ( $t \in M'$ ). Es ist also  $h_j < \sum ch_t$ ,  $\sum ch_t - h_j > 0$  ( $t \in M'$ ,  $t \neq j$ ), was ein Widerspruch mit ( $\gamma$ ) ist. Die Menge  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$  erfüllt also die Bedingung (A) und  $X_0 = R(H)$ .

8. Satz. Es sei  $X_0$  eine Teilmenge von  $X = F(\{1, \dots, n\})$  so, daß  $X_0 = R(H)$ ,  $H = \{h_1, \dots, h_m\}$  gilt und  $H$  die Bedingung (A) erfüllt.  $X_0$  ist ein Teilverband in  $X$  genau dann, wenn  $P(h_j) \cap P(h_t) = \emptyset$  für je zwei Elemente  $h_j, h_t \in H$ ,  $h_j \neq h_t$ .

Beweis. a) Es sei  $h_j, h_t \in H$ ,  $h_j \neq h_t$ ,  $P(h_j) \cap P(h_t) \neq \emptyset$ . In  $X$  gilt dann  $h_j \cap h_t > 0$ . In dem Isomorphismus (3) wird das Element  $h_j$  auf  $y_j$  abgebildet, wobei  $y_j(i) = 0$  für  $i \in M'$ ,  $i \neq j$  und  $y_j(j) = 1$  ist; ähnliches gilt für das Bild  $y_t$  von  $h_t$ . Da in  $Y$   $\inf \{y_j, y_t\} = 0$  ist, folgt aus (3)  $h_j \wedge h_t = 0$ , also ist  $X_0$  kein Teilverband von  $X$ .

b) Es sei vorausgesetzt, daß für je zwei Elemente  $h_j, h_t \in H$ ,  $h_j \neq h_t$  die Beziehung  $P(h_j) \cap P(h_t) = \emptyset$  gilt. Dann ist

$$(4) \quad h_j \cap h_t = 0.$$

Es seien  $x, y$  beliebige Elemente von  $X_0$ ; wir wollen zeigen, daß die Gleichungen  $x \cup y = x \vee y$ ,  $x \cap y = x \wedge y$  gelten. Es ist leicht zu beweisen, daß es genügt den Fall  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  zu untersuchen. (Bezeichnen wir nämlich  $x \wedge y = z$ ,  $x - z = x'$ ,  $y - z = y'$ , dann haben wir  $x' \geq 0$ ,  $y' \geq 0$ ,  $x \cup y = (x' \cup y') + z$ ,  $x \vee y = (x' \vee y') + z$ ; analoge Gleichungen sind für die Operationen  $\cap, \wedge$  in Kraft.) Es sei also  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x = \sum c_j h_j$ ,  $y = \sum d_j h_j$ . Aus dem Isomorphismus (3) folgt  $x \vee y = \sum \max(c_j, d_j) h_j$ ,  $x \wedge y = \sum \min(c_j, d_j) h_j$ . Nach (4) ist aber gleichzeitig  $x = \cup c_j h_j$ ,  $y = \cup d_j h_j$ , also (vgl. [1], Kap. XIV, § 4)

$$x \cup y = \cup \max(c_j, d_j) = \sum \max(c_j, d_j) h_j,$$

$$x \cap y = \cup \min(c_j, d_j) h_j = \sum \min(c_j, d_j) h_j.$$

9. Satz. Sei  $X$  ein Vektorverband. Jeder Vektorverband  $X_0 \subset X$  ist ein Teilverband in  $X$  genau dann, wenn  $\dim X \cong 2$ .

Beweis. a) Es sei  $\dim X \cong 2$  und die Menge  $X_0 \subset X$  sei ein Vektorverband. Dann ist  $\dim X_0 \cong 1$  oder  $\dim X_0 = 2$ . Im ersten Fall ist  $X_0$  eine Kette, also ist  $X_0$  ein Teilverband von  $X$ . Im zweiten Fall ist offensichtlich  $X_0 = X$ .

b) Es sei  $\dim X \cong 3$ . Dann gibt es Elemente  $e_1, e_2, e_3 \in X$  so daß  $e_i \cap e_j = 0$ ,  $e_i > 0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ;  $i \neq j$ ). Die Menge  $X' = R(E)$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  ist ein Vektorverband und ein Teilverband von  $X$ ;  $\dim X' = 3$ . Nach Abs. 3 gibt es eine Teilmenge  $X_0 \subset X'$ , wobei  $X_0$  ein Vektorverband und kein Teilverband von  $X'$  ist. Also ist  $X_0 \subset X$  und  $X_0$  ist kein Teilverband von  $X$ .

10. Satz. Es sei  $X$  ein Vektorverband,  $\dim X > 2$ . Für die Mächtigkeit  $m$  des Systems aller Mengen  $X_0 \subset X$ , welche Vektorverbände und keine Teilverbände in  $X$  sind, gilt  $m \cong c$ .<sup>5)</sup>

Beweis. Aus dem Beweise des Satzes 9 folgt, daß es genügt die Behauptung für den Fall  $\dim X = 3$  zu beweisen. Es sei also  $X' = F(M)$ ,  $M = \{1, 2, 3\}$  und es sei  $k$  eine reelle Zahl,  $k > 0$ . Führen wir die Bezeichnungen  $h_{k1} = (1, 0, k)$ ,  $h_{k2} = (0, 1, k)$ ,  $H_k = \{h_{k1}, h_{k2}\}$ ,  $X_k = R(H_k)$  ein. Nach Satz 7 ist  $X_k$  ein Vektorverband und nach Satz 8 ist  $X_k$  kein Teilverband von  $X'$ . Da aus  $k_1 \neq k_2$  auch  $X_{k_1} \neq X_{k_2}$  folgt, ist damit der Satz 10 bewiesen.

11. Ist  $X$  eine vollständige  $l$ -Gruppe, so ist  $X$  entweder eine geordnete (= linear geordnete) Gruppe oder ein direktes Produkt von vollständigen  $l$ -Gruppen  $X_1, X_2, \dots, X_n \neq \{0\} \neq X_2$  (vgl. [2], S. 235, Ex. 4). Gibt es eine natürliche Zahl  $n$  so daß  $X \neq \{0\}$  ein direktes Produkt von geordneten Gruppen  $X_1, \dots, X_n, X_i \neq \{0\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ist, dann schreiben wir  $\dim X = n$ , sonst setzen wir  $\dim X = \infty$ ; für  $X = \{0\}$  setzen wir  $\dim X = 0$  (vgl. [5]). Ist die  $l$ -Gruppe  $X$  zugleich ein Vektorverband und gilt in dem eben eingeführten Sinne  $\dim X = n$ , so besteht diese Gleichung auch im Sinne von Abs. 6.

Es sei  $n$  eine natürliche Zahl,  $X$  eine vollständige  $l$ -Gruppe,  $\dim X \cong n$ . Es ist leicht zu beweisen, daß es in  $X$  Elemente  $h_1, \dots, h_n$  gibt, so daß  $h_i > 0$ ,  $h_i \cap h_j = 0$  für  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$  ist. Die Menge  $X' = C(H)$ ,  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  ist offenbar eine vollständige  $l$ -Gruppe und eine  $l$ -Untergruppe von  $X$ . Ferner ist  $X'$  mit  $F_1(\{1, \dots, n\})$  isomorph, also  $\dim X' = n$ .

12. Satz. Es sei  $X$  eine vollständige  $l$ -Gruppe,  $\dim X \cong 3$ . Bezeichnet  $m$  die Mächtigkeit des Systems aller Teilmengen  $X_0 \subset X$ , welche vollständige  $l$ -Gruppen, aber keine Teilverbände von  $X$  sind, so gilt  $m \cong \aleph_0$ .

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt nach Abs. 11, daß es in  $X$  eine vollständige  $l$ -Untergruppe  $X'$  gibt, so daß  $\dim X' = 3$  ist. Es genügt also die Behauptung für die  $l$ -Gruppe  $Y = F_1(M)$ ,  $M = \{1, 2, 3\}$  zu beweisen. Es sei  $k$  eine natürliche Zahl. Bezeichnen wir mit  $Y_k$  die Menge aller Elemente  $u = (x, y, z)$  von  $Y$ , wobei  $z = k(x + y)$ . Aus einer ähnlichen Überlegung wie im Abs. 3 folgt, daß  $Y_k$  eine vollständige  $l$ -Gruppe und kein Teilverband in  $Y$  ist. Sind  $k_1, k_2$  natürliche Zahlen und  $k_1 \neq k_2$ , so ist  $Y_{k_1} \neq Y_{k_2}$ .

<sup>5)</sup> Mit  $c$  bezeichnen wir die Mächtigkeit des Kontinuums.

**Literaturverzeichnis**

- [1] П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций (Москва, 1948).
- [2] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, rev. edition (New York, 1948).
- [3] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914).
- [4] H. HERMES, *Einführung in die Verbandstheorie* (Berlin, 1955).
- [5] P. JAFFARD, Application de la théorie des filets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1125—1126.
- [6] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах (Москва, 1950).
- [7] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства, *Успехи матем. наук*, **VI. 3 (43)** (1951), 31—98.

(Eingegangen am 13. November 1961)