Une caractérisation nouvelle des algèbres de von Neumann finies

Par C. FOIAŞ à Bucarest et I. KOVÁCS à Szeged

1. Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien complexe, $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathfrak{H}$. Un élément T de $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ est dit *complètement non-unitaire* si pour tout élément $x \neq 0$ de $\mathfrak{H}$ les quantités

$$\|Tx\|, \|T^2x\|, \ldots, \|T^nx\|, \ldots; \|T^*x\|; \|T^{*2}x\|, \ldots, \|T^{*n}x\|, \ldots$$

ne sont pas toutes égales à $\|x\|$ (cf. [2]). Dans la présente Note, nous caractérisons les algèbres de von Neumann finies de $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ (cf. [1], chap. I, § 6, déf. 5)[1]) par leurs contractions[2]) complètement non-unitaires de la façon suivante:

Théorème 1. *Pour qu'une algèbre de von Neumann $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ soit finie, il faut et il suffit que, pour toute contraction complètement non-unitaire T de $\mathscr{A}$, la suite $\{T^n\}_{n=1}^{\infty}$ tende fortement vers zéro.*

La démonstration de ce théorème sera basée sur le

Théorème 2. *Soient $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ une algèbre de von Neumann finie, T une contraction de $\mathscr{A}$, $T = T^{(u)} \oplus T^{(0)}$ la décomposition canonique de T en sa partie unitaire $T^{(u)}$ et sa partie complètement non-unitaire $T^{(0)}$*[3]), *et $E^{(u)}$, $E^{(0)}$ les projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{H}$ sur les sous-espaces correspondants $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$. On a alors $E^{(u)} \in \mathscr{A}$, $E^{(0)} \in \mathscr{A}$ et*

$$(*) \qquad \mathfrak{H}^{(0)} = \{x \in \mathfrak{H}: T^n x \to 0 \ (n \to \infty)\}.$$

Démonstration. T étant une contraction, les suites $\{T^{*n}T^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{T^nT^{*n}\}_{n=1}^{\infty}$ sont évidemment fortement convergentes. Prouvons que

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n = \lim_{n\to\infty} T^n T^{*n}.$$

Posons $\lim\limits_{n\to\infty} T^{*n}T^n = R$, $\lim\limits_{n\to\infty} T^nT^{*n} = S$. Evidemment $R, S \in \mathscr{A}$, et $T^{*k}RT^k = R$,

[1]) Pour la théorie des algèbres de von Neumann, nous renvoyons le lecteur à [1].

[2]) Par contraction nous entendons un élément T de $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ pour lequel $\|T\| \leqq 1$.

[3]) On sait (cf. [2], th. 1) qu'à toute contraction T de $\mathfrak{H}$ correspond une décomposition de $\mathfrak{H}$ en somme orthogonale de deux sous-espaces orthogonaux complémentaires $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$ réduisant T et tels que la partie de T dans $\mathfrak{H}^{(u)}$ est un opérateur unitaire $T^{(u)}$ et sa partie dans $\mathfrak{H}^{(0)}$ est une contraction complètement non-unitaire $T^{(0)}$. Cette décomposition est unique, et la décomposition $T = T^{(u)} \oplus T^{(0)}$ est appelée la *décomposition canonique* de T.

$T^k S T^{*k} = S$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Pour toute trace normale finie φ sur $\mathscr{A}$ (cf. [1], chap. I, §6, no. 1) on a

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} \varphi\big((T^{*n}T^n - S)^*(T^{*n}T^n - S)\big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [\varphi(T^{*n}T^nT^{*n}T^n) - \varphi(T^{*n}T^nS) - \varphi(ST^{*n}T^n) + \varphi(S^2)] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [\varphi(T^nT^{*n}T^nT^{*n}) - \varphi(T^nST^{*n}) - \varphi(T^nST^{*n}) + \varphi(S^2)] =$$
$$= 2\varphi(S^2) - 2\varphi(S) \leqq 2\varphi(S) - 2\varphi(S) = 0,$$

puisque $0 \leqq S^2 \leqq S$. Donc on a

$$\varphi(S - S^2) = \varphi(S) - \varphi(S^2) = 0, \tag{2}$$

et

$$\lim \varphi\big((T^{*n}T^n - S)^*(T^{*n}T^n - S)\big) = 0. \tag{3}$$

Il résulte de (3) (cf. [1], chap. I, §4, prop. 9) que la suite $\{E_\varphi(T^{*n}T^n - S)\}_{n=1}^{\infty}$, où E_φ désigne le support de φ (cf. [1], chap. I, § 6, no. 1), tend fortement vers zéro. Ainsi,

$$E_\varphi S = \lim_{n\to\infty} E_\varphi T^{*n}T^n = E_\varphi R. \tag{4}$$

Soit maintenant $(\varphi_\iota)_{\iota\in I}$ une famille maximale de traces normales finies non-nulles sur $\mathscr{A}$, dont les supports E_ι, qui sont des projecteurs non-nuls du centre de $\mathscr{A}$, soient deux à deux orthogonaux. Puisque $\mathscr{A}$ est finie, on peut voir aisément que $\sum_{\iota\in I} E_\iota = I$ (I désigne l'opérateur identique de $\mathfrak{H}$). D'après (4), on a alors

$$S = \sum_{\iota\in I} SE_\iota = \sum_{\iota\in I} RE_\iota = R,$$

d' où (1).

Comme $\mathscr{A}$ est finie, et $S - S^2 \geqq 0$ il résulte de (2) que $S = S^2$, c'est-à-dire que la limite commune S des suites $\{T^{*n}T^n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{T^nT^{*n}\}_{n=1}^{\infty}$ est un projecteur de $\mathfrak{H}$.

Remarquons que de la définition de S il résulte aussitôt

$$(I - S)\mathfrak{H} = \{x \in \mathfrak{H} : T^n x \to 0 \ (n \to \infty)\} = \{x \in \mathfrak{H} : T^{*n}x \to 0 \ (n \to \infty)\}, \tag{5}$$

par conséquent le sous-espace $(I-S)\mathfrak{H}$ est invariant par T et T^*. On en déduit que

$$TS = ST. \tag{6}$$

Soit maintenant φ une trace normale finie quelconque sur $\mathscr{A}$. On a alors

$$\varphi(S(I - T^*T)S) = \varphi(S^2) - \varphi(ST^*TS) = \varphi(S) - \varphi(TST^*) = \varphi(S) - \varphi(S) = 0,$$
$$\varphi(S(I - TT^*)S) = \varphi(S^2) - \varphi(STT^*S) = \varphi(S) - \varphi(T^*ST) = \varphi(S) - \varphi(S) = 0.$$

Comme $S(I - T^*T)S \geqq 0$, $S(I - TT^*)S \geqq 0$, et $\mathscr{A}$ est finie, on a

$$S(I - T^*T)S = S(I - TT^*)S = 0,$$

donc, en tenant compte de (6),

$$(TS)^*TS = TS(TS)^* = S. \tag{7}$$

Posons $\mathfrak{H}_0 = (I-S)\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1 = S\mathfrak{H}$, et désignons par T_0 (resp. T_1) la restriction de T à $\mathfrak{H}_0$ (resp. $\mathfrak{H}_1$). D'après (5), T_0 est complètement non-unitaire, et d'après (7), T_1 est unitaire. Comme $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$, $T = T_0 \oplus T_1$, et $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1$ réduisent T (cf. (6)), il résulte de l'unicité de la décomposition canonique de T que $\mathfrak{H}^{(u)} = \mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathfrak{H}_0$, $T^{(u)} = T_1$ et $T^{(0)} = T_0$. Ainsi, $E^{(0)} = I - S = \in \mathscr{A}$, $E^{(u)} = S \in \mathscr{A}$, ce qui achève, en tenant compte de (5), la démonstration du théorème 2.

Nous pouvons maintenant passer à la

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1. Supposons $\mathscr{A}$ finie, et soit T une contraction complètement non-unitaire quelconque de $\mathscr{A}$. Comme, dans ce cas, la partie unitaire de T est zéro, l'assertion (✻) du théorème 2 montre que T^n tend fortement vers zéro pour $n \to \infty$.

Réciproquement, supposons que la condition du théorème 1 soit remplie et montrons que $\mathscr{A}$ est finie.

Or, soit T un élément de $\mathscr{A}$ tel que $T^*T = I$ (I désigne l'opérateur identique de $\mathfrak{H}$). T est alors un opérateur isométrique, donc il est une contraction. Soit $T = T^{(u)} \oplus T^{(0)}$ la décomposition canonique de T en sa partie unitaire $T^{(u)}$ et sa partie complètement non-unitaire $T^{(0)}$ opérant dans les sous-espaces $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$ de $\mathfrak{H}$ selon le cas. Soit $E^{(0)}$ le projecteur orthogonal de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}^{(0)}$. T étant isométrique, on peut voir aisément que

$$E^{(0)}\mathfrak{H} = \{x \in \mathfrak{H} \colon T^{*n}x \to 0 \text{ pour } n \to \infty\}. \tag{8}$$

Soit T' un élément quelconque du commutant $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$. D'après (8), pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$T^{*n}T'E^{(0)}x = T'T^{*n}E^{(0)}x \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

On en déduit que $E^{(0)}T'E^{(0)} = T'E^{(0)}$ pour tout $T' \in \mathscr{A}'$. Comme $\mathscr{A}'$ est stable par l'adjonction, il en résulte que

$$E^{(0)}T' = T'E^{(0)},$$

c'est-à-dire que $E^{(0)} \in \mathscr{A}'' = \mathscr{A}$. Par suite $T_0 = TE^{(0)} \in \mathscr{A}$ et T_0 est complètement non-unitaire. Ainsi, d'après la condition du théorème 1, $T_0^n \to O$ fortement pour $n \to \infty$. Mais, pour tout $x \in E^{(0)}\mathfrak{H}$, on a $\|T_0^n x\| = \|x\|$, d'où $E^{(0)}\mathfrak{H} = (0)$. Ainsi T est unitaire, donc on a aussi $TT^* = I$, ce qui entraîne que $\mathscr{A}$ est finie (cf. [1], chap. III, §8, th. 1). Ainsi la démonstration du théorème 1 est achevée.

R e m a r q u e. Dans le cas d'un espace hilbertien de dimension finie, il est évident que pour toute contraction complètement non-unitaire T, on a $T^n \to O$ fortement (de plus en norme) $(n \to \infty)$[4]. Théorème 1 généralise cette assertion au cas des algèbres de von Neumann finies. En général, cette assertion n'est pas valable pour des algèbres de von Neumann semi-finies (cf. [1], chap. I, §6, déf. 5). Voici un exemple. Soit $\mathfrak{H} = l^2$, et soit $T(c_n)_{n=0}^{\infty} = (0, c_0, c_1, \ldots)$. On voit aisément que T est une contrac-

---

[4]) Dans ce cas, en effet, le spectre de T est contenu dans un disque $\{z \colon |z| \leqq 1-\varepsilon\}$ avec $\varepsilon > 0$.

tion complètement non-unitaire de l'algèbre de von Neumann semi-finie $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$, et T^n ne tend pas fortement vers zéro puisque T^n est un opérateur isométrique pour tout $n \geqq 0$.

2. Indiquons maintenant deux conséquences simples du théorème 2.

a) En appelant un élément $S \in \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ *partiellement unitaire* si $S^*S = SS^* = E$, E étant un projecteur orthogonal de $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$, on peut formuler la

Proposition 1. *Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ une algèbre de von Neumann finie. Toute contraction $T \in \mathscr{A}$ peut être uniquement représentée en somme de deux éléments $T_{(u)}$ et $T_{(0)}$ de $\mathscr{A}$, permutables à T et tels que*

(i) *$T_{(u)}$ soit partiellement unitaire, $T_{(0)}$ soit complètement non-unitaire;*

(ii) $T_{(u)}T_{(0)} = T_{(0)}T_{(u)} = O$;

(iii) $T_{(0)}^n \to O$ fortement pour $n \to \infty$.

Démonstration. Soit $T = T^{(u)} \oplus T^{(0)}$ la décomposition canonique de T, et soient $E^{(u)}, E^{(0)}$ les projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{H}$ sur les sous-espaces correspondants $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$. En vertu du théorème 2, on a $E^{(u)}, E^{(0)} \in \mathscr{A}$. En posant $T_{(u)} = T^{(u)} \circ E^{(u)} = TE^{(u)}$, $T_{(0)} = T^{(0)} \circ E^{(0)} = TE^{(0)}$, on a $T_{(u)}, T_{(0)} \in \mathscr{A}$; $T_{(u)}$ est partiellement unitaire, $T_{(0)}$ est complètement non-unitaire, et $T_{(u)}T_{(0)} = T_{(0)}T_{(u)} = O$, d'où (i) et (ii). Finalement, (iii) résulte du théorème 1.

b) Soit T une contraction d'une algèbre de von Neumann finie dans $\mathfrak{H}$. Il résulte aussitôt du théorème 2 que

$$\mathfrak{H}^{(0)} = \{x \in \mathfrak{H} : T^n x \to 0 (n \to \infty)\} = \{x \in \mathfrak{H} : T^{*n} x \to 0 \ (n \to \infty)\}.$$

Ce fait nous permet de donner une réponse partielle au problème suivant. Soient $T_i \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_i)$ $(i = 1, 2)$ deux contractions, $T_i = T_i^{(u)} \oplus T_i^{(0)}$ $(\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_i^{(u)} \oplus \mathfrak{H}_i^{(0)})$ la décomposition canonique de T_i, $E_i^{(0)}$ le projecteur orthogonal de $\mathfrak{H}_i$ sur $\mathfrak{H}_i^{(0)}$. La relation $T_1X = XT_2$, où X est un opérateur linéaire borné de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{H}_1$, entraîne-t-elle $E_1^{(0)}X = XE_2^{(0)}$? La réponse est, en général, négative[5]). Toutefois on a la

Proposition 2. *Soit la contraction T_1 (resp. T_2) contenue dans une algèbre de von Neumann finie $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H}_1)$ [resp. $\mathscr{A}_2 \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H}_2)$]. Si X est un opérateur linéaire borné de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{H}_1$ tel que $T_1X = XT_2$, on a aussi $E_1^{(0)}X = XE_2^{(0)}$.*

---

[5]) En voici un exemple Soient: $\mathfrak{H} = \left\{(c_n)_{-\infty}^{\infty} : \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty\right\}$, $|t| < 1$, et

$$T(\ldots, c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n, \ldots) =$$
$$= (\ldots, tc_{-n+1}, tc_{-n+2}, \ldots, tc_{-2}, tc_{-1}, tc_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots),$$
$$U(\ldots, c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n, \ldots) =$$
$$= (\ldots, c_{-n+1}, c_{-n+2}, \ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots),$$
$$X(\ldots, c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n, \ldots) =$$
$$= (\ldots, t^n c_{-n}, t^{n-1} c_{-n+1}, \ldots, t^2 c_{-2}, tc_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n, \ldots).$$

Alors U est unitaire, $\|T\| \leqq 1$, $T^n \to O$ fortement (donc T est complètement non-unitaire), X est inversible, et $TX = XU$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après les hypothèses sur T_i $(i=1,2)$, on déduit d'abord que si $T_2^n x_2 \to 0$, alors $T_1^n X x_2 \to 0$, donc que $E_1^{(0)} X E_2^{(0)} = X E_2^{(0)}$, puis que si $T_1^{*n} x_1 \to 0$, alors $T_2^{*n} X^* x_1 \to 0$, donc $E_2^{(0)} X^* E_1^{(0)} = X^* E_1^{(0)}$, d'où

$$XE_2^{(0)} = E_1^{(0)} XE_2^{(0)} = (E_2^{(0)} X^* E_1^{(0)})^* = (X^* E_1^{(0)})^* = E_1^{(0)} X.$$

Bibliographie

[1] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (Paris, 1957).
[2] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251—259.

(Reçu le 15 janvier 1962)