Bibliographie

Lamberto Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 16), VIII + 271 pages, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.

The qualitative theory of differential equations has made an immense progress since the pioneering papers of STURM. This progress was achieved mainly in the last decades. Accounts of these results given in books were only rather sketchy, or one-sided. Thus, the present book of CESARI fills a serious gap by giving a fairly complete survey of the subject matter, pointing out the different viewpoints, the main underlying ideas, and the problems of the theory. There is added a highly valuable bibliography — on 70 pages (!). The style of the book is very concise, the typical proofs are given mostly in detail and the reader is referred to the original papers only for the complicated or longer proofs. The emphasis is laid on the general theorems. Some traditional topics such as STURM's theorems of comparison are omitted. A particular merit of the book is that it makes fully clear the interrelations of the numerous notions occurring in the theory and so one is able to compare the different results as to their dependence or independence. The conditions which are supposed on the coefficients are of very various character, e. g. boundedness, convergence to 0, $L^2(0, \infty)$ integrability, bounded variation. Accordingly, the results are also of various kinds, such as: boundedness, stability in some sense, or asymptotic behavior of the solution, etc. It is surprising, how many different kinds of stability are considered; they are all useful because they express some "good" property of the solution. One shows on examples that stability, boundedness are not properties invariant with respect to transformations of the system of coordinates. The oscillation, boundedness, L^2, etc. properties of the solutions of homogeneous linear differential equations of second order are dealt with in a separate paragraph. Besides the theorems obtained by the second method of LJAPUNOFF one gives a thorough account also of the so-called inverse problem. Further paragraphs deal — very extensively — with the problems of existence and approximation of periodic solutions, by analytic and analytico-topological methods, including the Poincaré — Bendixson theory and its application to the Liénard equation. The last paragraph deals with asymptotic expansions on the basis of FUCHS' theory, equations containing large parameters, the WKB method, LANGER's turning point theory, the results of WASOW concerning singular perturbation, etc.

I. Bihari (Budapest)

W. Hahn, Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Genzgebiete, neue Folge, Heft 22), VII + 142 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.

Die Stabilitätstheorie beschäftigt sich mit der Wirkung von kleinen, störenden Kräften auf das Verhalten mechanischer Systeme. Diese Kräfte, die momentan oder stetig wirken können, sind nicht genau bekannt, nur ihre Größe kann abgeschätzt werden. In den Untersuchungen der mechanischen Probleme ist natürlich von großer Bedeutung zu wissen, inwieweit man die Einflüsse dieser störenden Kräfte außer Acht lassen darf. Mit Fragen dieser Art haben sich u. a. schon LAGRANGE, JOUKOVSKY und POINCARÉ beschäftigt, die erste exakte Definition des Begriffes der Stabilität stammt aber von LJAPUNOV, dessen Werk 1892 erschien. LJAPUNOV wandte seine Resultate besonders auf Probleme der Theoretischen Mechanik an. Seine Methode und seine Ergebnisse fanden nur wenig Anklang, bis vor etwa 30 Jahren sowjetische Mathematiker die sog. „zweite Methode" von LJAPUNOV bei verschiedenen technischen Problemen, insbesondere bei mechanischen und elektrischen Schwingungen erfolgreich angewandt haben. Seitdem, wie es aus der wachsenden Anzahl der Veröffentlichungen zu ersehen ist, wurde die Theorie weitgehend ausgedehnt. Man kann den vorliegenden

Bericht über diese Untersuchungen umsomehr begrüßen, als fast alle Veröffentlichungen der sowjetischen Mathematiker auf Russisch und meistens in schwer zugänglichen Zeitschriften erschienen.

Im ersten Kapitel sind die Grundbegriffe dargelegt. Mit Hilfe der Vektor-Bezeichnung kann man den Ljapunovschen Begriff der Stabilität folgendermaßen angeben: Sei gegeben die Differentialgleichung $(*)$: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, wo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ eine stetige Funktion mit $\mathbf{f}(0, t) = \mathbf{0}$ und mit solchen Eigenschaften ist, daß die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und ihre stetige Abhängigkeit von den Anfangsgrößen gesichert ist. Die triviale Lösung nennt man nach LJAPUNOV stabil, wenn man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart finden kann, daß aus $|\mathbf{x}_0| < \delta$ die Ungleichung $|\mathbf{p}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| < \varepsilon$ folgt, wobei $\mathbf{p}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ diejenige, wohlbestimmte Lösung ist, die für $t = t_0$ den Anfangswert $\mathbf{x}_0$ annimmt. Gibt es ein $\delta > 0$ sogar derart, daß für $|\mathbf{x}_0| < \delta$ auch $\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t, \mathbf{x}_0, t_0) = 0$ folgt, so heißt die triviale Lösung asymptotisch stabil.

Die Ljapunovsche sog. „zweite Methode" ermöglicht, Bedingungen über die Stabilität der trivialen Lösung ohne eine explizite Kenntnis der Lösungen, also allein unter Benutzung der Differentialgleichung zu finden. Sie benutzt dazu geeignete Funktionen, die meist als Ljapunovsche Funktionen bezeichnet werden.

Im zweiten Kapitel sind die Hauptsätze über die Stabilität bewiesen. Zwei von LJAPUNOV stammende charakteristische Grundsätze: 1. Läßt sich eine positiv definite Funktion $v(\mathbf{x}, t)$ so angeben, daß ihre, für die Differentialgleichung $(*)$ gebildete Ableitung, d. h. $\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}, t) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v}{\partial t}$ nicht positiv ist, so ist die triviale Lösung stabil. 2. Läßt sich eine positiv definite, abnehmende Funktion derart angeben, daß ihre für $(*)$ gebildete Ableitung negativ definit ist, so ist die triviale Lösung asymptotisch stabil. Wie man schon auch aus diesen Sätzen ersehen kann, spielen in dieser Methode die Funktionen $v(\mathbf{x}, t)$, die sogenannten Ljapunovschen Funktionen, eine zentrale Rolle.

Im dritten Kapitel findet man Anwendungen auf konkrete Probleme, z. B. auf das Ajzermansche Problem, welches die Bewegungsgleichungen eines automatischen Regelsystems mit einem einzigen nichtlinearen Übertragungsglied betrefft.

Die Titel der folgenden Kapitel: Die Umkehrungen der Hauptsätze, Ljapunovsche Funktionen mit bestimmten Wachstumsverhalten, Die Empfindlichkeit des Stabilitätsverhältens gegen Störungen. Die kritischen Fällen, Verallgemeinerungen des Stabilitätsbegriffs. Es wird gezeigt, daß sich die zweite Ljapunovsche Methode nicht nur zur Behandlung von Differentialgleichungen eignet, sondern man mit ihrer Hilfe eine allgemeinere Stabilitätstheorie aufbauen kann.

Ein sorgfältig zusammengestelltes Literaturverzeichnis ergänzt diesen wertvollen Bericht, welches die bis 1957 erschienene Literatur erfaßt.

L. Pintér (Szeged)

George Springer, Introduction to Riemann Surfaces, VIII + 307 pages, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1957.

This book gives an excellent introduction to the theory of Riemann surfaces. The level of prerequisits has been kept remarkably low: most parts of the book are accessible for a reader who has mastered advanced calculus and who knows the elements of group theory as well as the elements of the theory of a complex variable. Beyond this, the Lebesgue theory is used (though a reader unfamiliar with it will actually miss only a certain completeness-argument, for which — as an additional help — FATOU's lemma is stated), and also VITALI's convergence theorem (the statement of which the reviewer would have liked). The basic concepts of topology and of Hilbert space theory are developped within the book, and in such a way that the respective chapters might serve as an introduction to theses fields.

Chapter 1 (Introduction) takes a phenomenological view — a view which unfortunately is taken too seldom nowadays in mathematical texts — of the things to be encountered. With Chapter 2 (General Topology) begins the rigorous treatment. Starting with point-set topology, the concept of manifold is introduced which leads to the definition of an abstract Riemann surface as a two-dimensional manifold with an analytic structure. In Chapter 3 (Riemann surface of an Analytic Function) it is seen that Weierstrass' Analytisches Gebilde leads to an abstract Riemann surface. Chapter 4 (Covering Manifolds) relates the Analytische Gebilde to a covering manifold of the z-sphere, itself a particular Riemann surface; further the monodromy theorem, the fundamental group of a two-dimensional manifold, and the group of covering transformations of a covering manifold are discussed. Chapter 5 (Combinatorial Topology) gives an account of the topology of surfaces, and in particular of compact orientable surfaces. Here the concept of homology and its relation to homotopy comes in.

Chapter 6 (Differentials and Integrals) defines the zero-th, first and second order differentials on a Riemann surface, it develops the exterior differential calculus and introduces the important class of harmonic and of analytic differentials. In Chapter 7 (The Hilbert Space of Differentials) the Hilbert space of first order differentials ist treated together with the orthogonal decomposition of such a differential into its closed, co-closed and harmonic components; it also proves WEYL's lemma. This leads, in Chapter 8 (Existence of Harmonic and Analytic Differentials), to various existence and uniqueness theorems for harmonic differentials with singularities and for Abelian differentials. Chapter 9 (Uniformization) proves the parallel-slit mapping theorem for a Riemann surface which is schlichtartig, and the triangulability of any Riemann surface. It also studies the universal covering surface and thus the mapping of a Riemann surface onto itself. The final Chapter 10 (Compact Riemann Surfaces) gives a concise and comprehensive treatment of the classical case of compact Riemann surfaces with their meromorphic functions and Abelian differentials.

To each chapter a set of well selected exercises is added. Particularly noteworthy are the exercises to the chapters 7 and 8: here the reader is lead into cohomology theory.

Finally, a few critical remarks may be in order. Occasionally, there are inaccuracies in the presentation (PRÜFER's example of an uncountable manifold, p. 56; the statement of Theorem 2—3, p. 64); sometimes proofs might be simplified (Theorem 5—10, p. 64), and a number of misprints may cause slight trouble.

F. Huckemann (Giessen)

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **II, Lattice theory,** VIII + 208 pages, American Mathematical Society, Providence, 1961.

This volume contains the papers presented at the Symposium on Partially Ordered Sets and Lattice Theory held in conjunction with the Monterey meeting of the American Mathematical Society in April 1959. It consists of four parts, namely: I. Lattice structure theory, II. Complemented modular lattices, III. Boolean algebras, IV. Applications of lattice theory.

The papers contained in this book give, on the one hand, detailed expositions concerning the present state of some important chapters of lattice theory; moreover they treat many recent results and unsolved problems, too. In what follows, we sketch the subject of these papers, one by one.

Part I. The first paper, due to R. P. DILWORTH, is devoted to a description of the relationship between structure and decomposition theorems and contains a discussion of some problems in this area of lattice theory. PH. M. WHITMAN discusses the state of word problem for free (especially, for free modular or distributive) lattices. J. HARTMANIS outlines the lattice theory of generalized partitions. This theory throws new light on some recently solved embedding problems as well as on some important unsolved problems. R. A. DEAN gives some contributions to the characterization of the sublattices of free lattices. By means of prime ideals, C. C. CHANG and A. HORN completely characterize the generalized Post algebras among the distributive lattices.

Part II. I. HALPERIN comments the work of J. VON NEUMANN on continuous geometry and gives many references to the related works also of other mathematicians. The B. JÓNSSON's paper is concerned with the following problem, also investigated by VON NEUMANN: Given a complemented modular lattice, under what conditions is it isomorphic to the lattice of all principal left ideals of a (suitably chosen) regular ring? K. D. FRYER discusses, among others, conditions which must be imposed on the normalized frame of a complemented modular lattice in order that the lattice may be coordinatized. J. E. MCLAUGHLIN establishes, firstly, some simple properties of the normal completion of a complemented modular point lattice and then gives a representation theorem for lattices having these properties.

Part III. L. HENKIK and A. TARSKI discuss the basic notions of the theory of cylindric algebras and give an account of the main results so far obtained in this theory. R. P. HALMOS gives the description of injectivity and projectivity in the category of Boolean algebras resp. complete Boolean algebras. C. C. CHANG presents a survey of some known results for the cardinal and ordinal multiplication of relation types. (The results and problems presented here are partly interesting generalizations of known results on partially ordering relations.) R. S. PEIRCE examines some properties of a particular class of complete Boolen algebras. PH. DWINGER defines the α-complete retracts of an α-complete Boolean algebra and establishes necessary and sufficient conditions in order that an α-complete Boolean algebra be an α-complete retract of an other one, finally he treats two interesting special cases.

Part IV. G. BIRKHOFF's paper is devoted to the applications of lattice theory on quantum logics, averaging operators, ergodic theory, etc. M. HALL, JR., considers the lattice N(G) of normal subgroups of a group G, and establishes some relationship between the properties of N(G) and of G. In connection with certain known results, L. W. ANDERSON sets some problems concerning locally compact topological lattices. Finally, F. W. ANDERSON (in collaboratoin with R. L. BLAIR) considers, among others, the following representation problem: For a given chain, characterize those lattices which are subdirect unions of copies of this chain. Also, he generalizes the STONE's representation theorems for Boolean algebras.

This book presupposes the knowledge of the classical concepts and results of the lattice theory. But the reader, familiar with these facts, can obtain a good information about the most important areas of recent investigàtions in lattice theory.

G. Szász (Szeged)

G. Szász, Einführung in die Verbandstheorie, 256 Seiten, Budapest, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 1962.

Die mathematische Literatur gewinnt mit diesem Buch ein Werk, welches in erster Reihe einen einführenden Charakter hat, gleichzeitig aber auch weitere Perspektiven der Verbandstheorie eröffnet. Es ist die Übersetzung des 1959 in ungarischer Sprache erschienenen Originals mit einer ergänzten Bibliographie. Es umfaßt ein ziemlich ausgedehntes theoretisches Material und erläutert dies auch mit Hilfe von Beispielen, Hinweisungen und Übungsaufgaben. Seinem Ziel entsprechend gibt das Buch eine ausgezeichnete Einführung in die Verbandstheorie, informiert von den wichtigsten Begriffen und Methoden, weiterhin von der Anwendbarkeit der Verbandstheorie in verschiedenenen Gebieten der Mathematik. Wegen der erwähnten Eigenschaften wird das vorliegende Buch gewiß ein ausgedehntes Interesse finden.

J. Szendrei (Szeged)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

N. Bourbaki, Éléments d'histoire des mathématiques (Collection Histoire de la pensée, IV), 276 pages, Paris, Hermann, 1960. — 18 NF

J. Favard, Cours d'analyse de l'Ecole Polytéchnique. Tome I. **Introduction. Opérations,** VII + 675 pages; Tome II. **Représentations. Fonctions analytiques,** VI + 578 pages; Tome III. **Théorie des équations.** Fasc. I. **Équations différentielles,** VI + 294 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1960, 1962. — 90 NF, 45 NF.

C. Ferrari—F. G. Tricomi, Aerodinamica transonica (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 10), XVI + 632 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1962. — L. 9000

M. Godefroy, Mathématiques générales. Synthèse élémentaire, VIII + 187 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1961. — 16 NF

A. Grzegorczyk, Fonctions récursives (Collection de logique mathématique, XVII), 100 pages, Paris—Louvain, Gauthier-Villars—Nauwelaerts, 1961. — 18 NF

E. J. Gumbel, Statistics of extremes, XXII + 375 pages, New York, Columbia University Press, 1960. — $ 15,—

W. Haack, Darstellende Geometrie II. Körper mit krummen Begrenzungsflächen. Kotierte Projektionen (Sammlung Göschen, Bd. 143), 129 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1962. — DM 3,80

G. Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen (Sammlung Göschen, Bd. 1003), 6. neubearbeitete und erw. Aufl., 128 Seiten, — DM 3,60
Partielle Differentialgleichungen (Sammlung Göschen, Bd. 920), 4. durchges. Aufl., 128 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1960. — DM 3,60

M. Hukuhara—T. Kimura—Mme T. Matuda, Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe (Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 7), VIII + 155 pages, Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1961.

E. Kamke, Mengenlehre (Sammlung Göschen, Bd. 999/999 a), 4. verb. Aufl., 194 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1962. — DM 5,80

A. Kaufmann—R. Douriaux, Les fonctions de la variable complexe, VIII + 427 pages, Paris, Eyrolles — Gauthier-Villars, 1962.

J. L. Lions, Equations différentielles opérationnelles (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 111), X + 292 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961. — DM 64,—

A. Liulevicius, The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations (Memoirs of the American Mathematical Society, Nr. 42), 112 pages, Providence, American Mathematical Society, 1962. — $ 1,90

P. Medgyessy, Decomposition of superpositions of distribution functions, 227 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1961.

Premier congrès de l'Association Française de Calcul, Grenoble, 14—16 Septembre 1960, 488 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1961.

H. S. Ruse—A. G. Walker—T. J. Willmore, Harmonic spaces (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Mathematiche, 8), XII + 240 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1961. — L. 3500

G. Scorza Dragoni, Elemente di analisi matematica. Vol. I. **Elementi di algebra,** VIII + 584 pages; Vol. II. **La continuità e la differenziabilità,** VI + 692 pages; Vol. III. **La teoria elementare dell'integrazione,** VI + 584 pages, Padova, CEDAM, 1961—62. — L. 5000 + 6000 + 5000

G. Shimura—Y. Taniyama, Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory (Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 6), X + 159 pages, Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1961. — $ 3,20

S. L. Sobolev, Sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques non-linéaires (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 9), VIII + 144 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1961. — L. 2000

G. Szász, Einführung in die Verbandstheorie, 255 Seiten, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1962.

L. Takács, Introduction to the theory of queues (University Texts in the Mathematical Sciences), X + 268 pages, New York, Oxford University Press, 1962.

H. Wussing, Mathematik in der Antike. Mathematik in der Periode der Sklavenhaltergesellschaft, VIII + 245 Seiten, Leipzig, Teubner, 1962. — DM 18,—

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 150, 152, Paris, Gauthier-Villars, 1961—62.
150. F. Pollaczek, Théorie analytique des problèmes stochastiques relatifs à un groupe de lignes téléphoniques avec dispositif d'attente, 115 pages.
152. R. Saint-Guilhem, Les principes de l'analyse dimensionnelle. Invariance des relations vectorielles dans certains groupes d'affinités, 79 pages.