Die Jordan—Dedekindsche Bedingung im direkten Produkt von geordneten Mengen

Von J. JAKUBÍK in Košice (Tschechoslowakei)

Es sei S eine geordnete (=teilweise geordnete) Menge, $a, b \in S$, $a \leqq b$, $[a, b] = \{x | x \in S, a \leqq x \leqq b\}$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}(a, b)$ das System aller maximalen Ketten von $[a, b]$. In [1] (vgl. auch [2], S. 11) wurde die folgende Bedingung untersucht (Jordan—Dedekindsche Bedingung):

(JD_1) Ist $u, v \in S$, $u \leqq v$, $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}(u, v)$, so sind die Ketten R_1, R_2 isomorph.

Eine andere Bedingung über die Ketten in S wurde von G. SZÁSZ [3] eingeführt:

(JD_2) Ist $u, v \in S, u \leqq v, R_1, R_2 \in \mathfrak{R}(u, v)$, so gilt kard $R_1 =$ kard R_2.[1])

Für geordnete Mengen von endlicher Länge sind die Bedingungen (JD_1), (JD_2) äquivalent. Die Bedingung (JD_2) wurde auch in [4]—[7] behandelt.

In dieser Arbeit gehen wir aus einer von G. BIRKHOFF gestellten Frage [2, S. 11, Ex. 6] aus: „Prove (or disprove) that the cardinal product of any two partly ordered sets of finite length which satisfy the Jordan—Dedekind chain condition also satisfies it." Ein kurzer Beweis hierfür steht in 2. Ferner untersuchen wir die Bedingung (JD_2) für das direkte Produkt von geordneten Mengen A, B, wobei die Längen von A, B nicht endlich zu sein brauchen.

Es seien A, B nichtleere geordnete Mengen, $S = AB$,

$$s_i = (a_i, b_i) \quad (i = 1, 2), \quad a_i \in A, \quad b_i \in B, \quad s_1 < s_2.$$

1. Es ist klar, daß das Element s_1 genau dann ein unterer Nachbar[2]) von s_2 ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) a_1 ist ein unterer Nachbar von a_2 und $b_1 = b_2$,

b) $a_1 = a_2$ und b_1 ist ein unterer Nachbar von b_2.

2. *Wenn für jedes* $R_1 \in \mathfrak{R}(a_1, a_2)$ *und jedes* $R_2 \in \mathfrak{R}(b_1, b_2)$ kard $R_1 = n_1$ *bzw.* kard $R_2 = n_2$ *ist (wobei* n_1, n_2 *natürliche Zahlen bedeuten), so gilt* kard $R = n_1 + n_2 - 1$ *für jedes* $R \in \mathfrak{R}(s_1, s_2)$.

Beweis: durch Induktion in Bezug auf die natürliche Zahl $n_1 + n_2 \geqq 2$. Der Fall $n_1 + n_2 = 2$ (d. h. $s_1 = s_2$) ist trivial. Es sei $n_1 + n_2 > 2$, d. h. $s_1 < s_2$. In R gibt es einen unteren Nachbar s von s_2. Nach 1 und nach der Induktionsvoraussetzung gilt kard $R' = n_1 + n_2 - 2$ für jedes $R' \in \mathfrak{R}(s_1, s)$. Also ist kard $R =$ kard $R' + 1 = n_1 + n_2 - 1$.

---

[1]) Für eine beliebige Menge M bezeichnen wir mit kard M die Mächtigkeit von M.

[2]) Vgl. [8], S. 6.

3. Wir nennen eine geordnete Menge S *diskret*, wenn jede beschränkte Kette in S endlich ist. Aus 2 folgt:

Satz 1. *Wenn die diskreten geordneten Mengen A, B die Bedingung* (JD_2) *erfüllen, dann erfüllt auch $S=AB$ diese Bedingung.*

Bemerkung. Durch Induktion kann Satz 1 für ein direktes Produkt $S=A_1 A_2 \ldots A_n$ von n Faktoren verallgemeinert werden. Für das vollständige direkte Produkt ΠA_i (wobei die Anzahl der direkten Faktoren A_i unendlich ist), gilt ein analoger Satz nicht. (Vgl. [6].)

4. Wir werden S *k-vollständig* nennen, wenn aus $u, v \in S$, $u<v$, $R \in \Re(u, v)$ folgt, daß die Kette R ein vollständiger Verband ist. (Es ist leicht zu zeigen, daß eine k-vollständige gerichtete Menge kein Verband zu sein braucht.)

Satz 2. *Es seien A, B k-vollständige geordnete Mengen, welche die Bedingung* (JD_2) *erfüllen. Dann erfüllt auch $S=AB$ die Bedingung* (JD_2).

Beweis. Wir setzen voraus, daß für jede Kette $R_1 \in \Re(a_1, a_2)$ und $R_2 \in \Re(b_1, b_2)$, $\operatorname{kard} R_1 = n_1$ bzw. $\operatorname{kard} R_2 = n_2$ ist. Wenn n_1 und n_2 endlich sind, so ist nach 2 $\operatorname{kard} R = n_1 + n_2 - 1$ für jede Kette $R \in \Re(s_1, s_2)$.

Wenn wenigstens eine der Mächtigkeiten n_1, n_2 unendlich ist, bezeichnen wir $n = \max(n_1, n_2)$. Es sei $R \in \Re(s_1, s_2)$; R_A sei die Menge aller $a \in A$, für die es ein $b' \in B$ gibt, so daß $(a, b') \in R$; die Bedeutung von R_B ist analog. Offensichtlich sind R_A und R_B Ketten, $R_A \subset [a_1, a_2]$, $R_B \subset [b_1, b_2]$, also ist $\operatorname{kard} R_A \leqq n_1$, $\operatorname{kard} R_B \leqq n_2$. Wir setzen $C = \{(a, b) | a \in R_A, b \in R_B\}$. Es ist $\operatorname{kard} C = \operatorname{kard} R_A \cdot \operatorname{kard} R_B \leqq n_1 n_2 = n$; aus $R \subset C$ folgt dann $\operatorname{kard} R \leqq n$.

Es sei z. B. $n = n_1$. Aus dem Auswahlsaxiom folgt, daß es Ketten $R_1 \in \Re(a_1, a_2)$, $R_2 \in \Re(b_1, b_2)$ gibt, so daß $R_A \subset R_1$, $R_B \subset R_2$. Anderseits wählen wir ein Element $a_0 \in R_1$, $a_1 < a_0 < a_2$ aus. Es sei B_1 die Menge aller $b \in R_2$, für die es ein $a \in A$, $a \leqq a_0$ gibt, so daß $(a, b) \in R$. Da B k-vollständig ist, existiert in R_2 das Element $b_0 = \sup B_1$. Bezeichnen wir $s_0 = (a_0, b_0)$ und sei $s = (a, b)$ ein beliebiges Element von R. Für jedes $a \in R_1$ sind die Elemente a, a_0 vergleichbar. Wenn $a \leqq a_0$ gilt, so ist (nach der Definition von b_0) $b \leqq b_0$ und folglich $s \leqq s_0$. Es sei $a > a_0$. Wir wollen zeigen, daß dann $b \geqq b_0$ ist. Wäre nämlich $b < b_0$, so gäbe es ein Element $b' \in B_1$ mit $b < b' \leqq b_0$, und zu diesem b' könnte man ein Element $a' \in A$ finden, so daß $s' = (a', b') \in R$, $a' \leqq a_0$. Die Elemente s, s' wären dann aber unvergleichbar, was unmöglich ist. Es gilt also $b \geqq b_0$. Das Element s_0 ist mit allen $s' \in R$ vergleichbar, also ist $s_0 \in R$. Daraus folgt $R_1 \subset R_A$, so daß $R_1 = R_A$, $\operatorname{kard} R \geqq \operatorname{kard} R_1 = n$ ist; nach der oben gewonnenen Ungleichung gilt also $\operatorname{kard} R = n$.

Bemerkung. Die Voraussetzung über die k-Vollständigkeit kann in Satz 2 nicht weggelassen werden. (Vgl. Satz 2 und 3.)

5. Wenn A oder B die Bedingung (JD_2) nicht erfüllt, so erfüllt auch ihr direktes Produkt $S=AB$ diese Bedingung nicht.

Die „einfachsten" geordneten Mengen, welche die Bedingung (JD_2) (trivialerweise) erfüllen, sind die wohlgeordneten Mengen. Nehmen wir an, daß A die Bedingung (JD_2) erfüllt; es stellt sich die Frage, unter welchen Umständen diese Eigenschaft von A auch für jedes direkte Produkt AB erhalten bleibt, wobei B eine beliebige wohlgeordnete Menge ist.

Es sei $\mathfrak{m}$ irgendeine Mächtigkeit. Ferner sei B eine wohlgeordnete Menge mit kleinstem Element b_1 und mit größtem Element b_2, kard $B=\mathfrak{m}$. Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende

Satz 3. *Wenn* $[a_1, a_2]\subset A$, $R\in\mathfrak{R}(a_1, a_2)$, kard $R=\mathfrak{n}\leqq\mathfrak{m}$ *und R kein vollständiger Verband ist, so gibt es zu jeder Mächtigkeit* $\mathfrak{n}'$ $(\mathfrak{n}\leqq\mathfrak{n}'\leqq\mathfrak{m})$ *eine Kette* $R'\in\mathfrak{R}(s_1, s_2)$ *mit* kard $R'=\mathfrak{n}'$.

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es in R ein Ideal $A_1\neq\emptyset$ ohne größtes Element und ein duales Ideal $A_2\neq\emptyset$ ohne kleinstes Element, so daß $A_1\cap A_2=\emptyset$, $A_1\cup A_2=R$. Es sei $\mathfrak{n}'$ eine Mächtigkeit mit $\mathfrak{n}\leqq\mathfrak{n}'\leqq\mathfrak{m}$. Es gibt ein Element $b_0\in B$, so daß kard $B_0=\mathfrak{n}'$, wobei $B_0=[b_1, b_0]$. Wir bezeichnen

$$R_1=\{(a_1, b)|b\in B_0\},\quad R_2=\{(a, b)|a\in A_1\},$$

$$R_3=\{(a, b_2)|a\in A_2\},\quad R'=R_1\cup R_2\cup R_3.$$

Offenbar ist R' eine Kette und kard $R_1=\mathfrak{n}'$, kard $R_2\leqq\mathfrak{n}$, kard $R_3\leqq\mathfrak{n}$, also ist kard $R'=\mathfrak{n}'$. Es sei $s=(a, b)\in[s_1, s_2]$; nehmen wir an, daß s mit allen Elementen der Kette R' vergleichbar ist. Wir wollen zeigen, daß $R'\in\mathfrak{R}(s_1, d_2)$ gilt, d. h. daß s zu R' gehört. Offensichtlich ist $a\in R$.

a) Es sei $a=a_1$. Nach der Voraussetzung gibt es ein $a'\in A_1$ mit $a'>a_1$. Wir bezeichnen $s'=(a', b_0)$. Da $s'\in R_2$ ist, sind die Elemente s, s' vergleichbar; aus der Beziehung $a'>a_1$ folgt daher $b_0\geqq b$, also ist $s\in R_1$.

b) Es sei $a>a_1$, $a\in A_1$. Da s und (a_1, b_0) vergleichbar sind, gilt $b\geqq b_0$. Ferner gibt es ein $a'\in A_1$, $a<a'$. Aus der Vergleichbarkeit von s und (a', b_0) bekommen wir dann $b\leqq b_0$. Also ist $b=b_0$, $s\in R_2$.

c) Es sei $a\in A_2$. Es gibt ein $a'\in A_2$, $a'<a$. Da s und (a', b_2) vergleichbar sind, gilt $b=b_2$, also ist $s\in R_3$.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt unmittelbar der

Satz 4. *Es sei A eine geordnete Menge, welche die Bedingung* (JD_2) *erfüllt. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) *es gibt eine wohlgeordnete Menge B derart, daß $S=AB$ die Bedingung* (JD_2) *nicht erfüllt,*

b) *A ist nicht k-vollständig.*

Satz 5. *Es sei*

$$R_1\in\mathfrak{R}(a_1, a_2),\quad R_2\in\mathfrak{R}(b_1, b_2),$$

$$c_1, c_2\in R_2,\quad R_3=[b_1, c_1]\cap R_2,\quad R_4=[b_1, c_2]\cap R_2,$$

wobei R_1 kein vollständiger Verband und kard $R_1=\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}\leqq$ kard $R_3<$ kard R_4 *ist. Dann ist im direkten Produkt $S=AB$ die Bedingung* (JD_2) *nicht erfüllt.*

Beweis. In analoger Weise wie im Beweis des Satzes 3 können maximale Ketten R', R'' konstruiert werden, derart, daß kard $R'=$ kard R_3, kard $R''=$ kard R_4 ist.

Literaturverzeichnis

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory* (New York, 1940).
[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory,* Revised Edition (New York, 1948).
[3] G. Szász, Generalization of a theorem of Birkhoff concerning maximal chains of a certain type of lattices, *Acta Sci. Math.,* 16 (1955), 89—91 and 270.
[4] G. Grätzer and E. T. Schmidt, On the Jordan—Dedekind chain condition, *Acta Sci. Math.,* **18** (1957), 52—56.
[5] J. Jakubík, On the Jordan—Dedekind chain condition, *Acta Sci. Math.,* 16 (1955), 266—269.
[6] J. Jakubík, Poznámka o Jordan—Dedekindovej podmienke v Boolových algebrách, *Časopis pěst. mat.,* **82** (1957), 44—46.
[7] J. Jakubík, Über Ketten in Booleschen Verbänden, *Matem. Fyz. Časopis,* **8** (1958), 193—202.
[8] H. Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie* (Berlin, 1955).

(Eingegangen am 24. April 1962)