Über die Weylsche Vertauschungsrelation

Von C. FOIAŞ in Bukarest und L. GEHÉR in Szeged

Herrn Professor Béla Sz.-Nagy zum 50. Geburtstag gewidmet

Einführung

Es seien P und Q zwei selbstadjungierte Operatoren, für die die quantenmechanische Vertauschungsrelation

$$PQ-QP=-iI \tag{1}$$

erfüllt ist. Wie H. WEYL [1] zuerst bemerkt hat, geht (1) durch eine formelle Rechnung in die Relation (die sog. Weylsche Vertauschungsrelation):

$$e^{itP}e^{isQ}=e^{its}e^{isQ}e^{itP} \qquad (-\infty<t,s<+\infty) \tag{2}$$

über, wobei $\{e^{itP}\}_{-\infty<t<+\infty}$ und $\{e^{isQ}\}_{-\infty<s<+\infty}$ die durch die infinitesimalen Generatoren iP bzw. iQ erzeugten einparametrigen starkstetigen Gruppen von unitären Operatoren sind.

In der Arbeit [2] wurden Bedingungen angegeben, unter denen (1) und (2) streng äquivalent sind. Sogar wurde das allgemeinere Problem betrachtet, wobei statt Gruppen von unitären Operatoren, Halbgruppen von Kontraktionen auftreten.

Dieser allgemeinere Fall kann in gewißem Sinne auf den ursprünglichen Fall unitärer Gruppen zurückgeführt werden. In dieser Arbeit werden wir nämlich den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Es seien $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ und $\{S_s\}_{s\geqq 0}$ zwei einparametrige starkstetige Halbgruppen von Kontraktionen in einem Hilbertschen Raum H, für die die Weylsche Vertauschungsrelation*

$$T(t)S(s)=e^{its}S(s)T(t) \qquad (-\infty<t,s<+\infty) \tag{3}$$

erfüllt ist, wobei

$$T(t)=\begin{cases} T_t & \text{für } t\geqq 0\\ T^*_{-t} & \text{für } t<0\end{cases} \quad \text{und} \quad S(s)=\begin{cases} S_s & \text{für } s\geqq 0\\ S^*_{-s} & \text{für } s<0\end{cases}$$

gesetzt wird. Dann gibt es in einem geigneten Erweiterungsraum $\mathbf{H}$ zwei einparametrige starkstetige Gruppen von unitären Operatoren, $\{\mathbf{U}(t)\}_{-\infty<t<+\infty}$ und $\{\mathbf{V}(s)\}_{-\infty<s<+\infty}$, für die die Weylsche Relation

$$\mathbf{U}(t)\mathbf{V}(s)=e^{its}\mathbf{V}(s)\mathbf{U}(t) \qquad (-\infty<t,s<+\infty) \tag{4}$$

erfüllt ist und für die

$$T(t)\,S(s) = \mathrm{pr}\,\mathbf{U}(t)\mathbf{V}(s) \qquad (-\infty < t, s < +\infty) \tag{5}$$

gilt[1]*. Der Raum* $\boldsymbol{H}$ *kann in dem Sinne minimal gewählt werden, daß er von den Elementen* $\mathbf{U}(t)\mathbf{V}(s)h$ $(h \in H;\ -\infty < t, s < +\infty)$ *aufgespannt wird. Dann ist die Struktur* $\{\boldsymbol{H}, \mathbf{U}(t), \mathbf{V}(s), H\}$ *bis auf Isomorphie bestimmt.*

Die gewünschten unitären Dilatationen $\{\mathbf{U}(t)\}$ und $\{\mathbf{V}(s)\}$ werden wir in zwei Schritten konstruieren. Im ersten Schritt konstruieren wir in einem Erweiterungsraum $\boldsymbol{H}^\circ$ von H eine einparametrige starkstetige Gruppe $\{\mathbf{U}^\circ(t)\}$ von unitären Operatoren und eine einparametrige starkstetige Halbgruppe $\{\mathbf{V}_s^\circ\}_{s\geqq 0}$ von Kontraktionen für die die Weylsche Relation

$$\mathbf{U}^\circ(t)\mathbf{V}^\circ(s) = e^{its}\mathbf{V}^\circ(s)\mathbf{U}^\circ(t) \qquad (-\infty < t, s < +\infty)$$

erfüllt ist und

$$T(t)\,S(s) = \mathrm{pr}\,\mathbf{U}^\circ(t)\mathbf{V}^\circ(s) \qquad (-\infty < t, s < +\infty)$$

gilt, wobei $\mathbf{V}^\circ(s) = \begin{cases} \mathbf{V}_s^\circ & \text{für } s \geqq 0 \\ \mathbf{V}_{-s}^{\circ *} & \text{für } s < 0 \end{cases}$ gesetzt wird. Im zweiten Schritt konstruieren wir in einem Erweiterungsraum $\boldsymbol{H}$ von $\boldsymbol{H}^\circ$ unitäre Dilatationen $\{\mathbf{U}(t)\}_{-\infty<t<+\infty}$ und $\{\mathbf{V}(s)\}_{-\infty<s<+\infty}$ von $\{\mathbf{U}^\circ(t)\}$ bzw. von $\{\mathbf{V}^\circ(s)\}$, die die gewünschten Eigenschaften besitzen.

Zum Beweis benützen wir den folgenden Satz von B. Sz.-Nagy (siehe [3]):

Es sei $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ *eine einparametrige starkstetige Halbgruppe von Kontraktionen in einem Hilbertschen Raum H. Dann gibt es in einem geeigneten Erweiterungsraum* $\boldsymbol{H}$ *eine einparametrige starktetige Gruppe* $\{\mathbf{U}(t)\}_{-\infty<t<+\infty}$ *von unitären Operatoren, für die*

$$T(t) = \mathrm{pr}\,\mathbf{U}(t) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

gilt, wobei

$$T(t) = \begin{cases} T_t & \textit{für } t \geqq 0 \\ T_{-t}^* & \textit{für } t < 0 \end{cases}$$

gesetzt wird. Der Raum $\boldsymbol{H}$ *kann in dem Sinne minimal gewählt werden, daß er von den Elementen von der Form* $\mathbf{U}(t)h$ $(h \in H;\ -\infty < t < +\infty)$ *aufgespannt wird. Dann ist die Struktur* $\{\boldsymbol{H}, \mathbf{U}(t), H\}$ *bis auf Isomorphie bestimmt.*

Beweis des Satzes

Es sei $\{\mathbf{U}^\circ(t)\}_{-\infty<t<+\infty}$ die *minimale unitäre Dilatation* von $\{T(t)\}$; der entsprechende Erweiterungsraum $\boldsymbol{H}^\circ$ ist von den Elementen von der Form $\mathbf{U}^\circ(t)x$ $(x \in H;\ -\infty < t < +\infty)$ aufgespannt, also ist die durch die endlichen Linearkombinationen

$$\xi = \sum_j \mathbf{U}^\circ(t_j)x_j \tag{6}$$

[1]) Sind A und $\mathbf{B}$ beschränkte lineare Operatoren in H, bzw. in einem Erweiterungsraum $\boldsymbol{H}$ von H, so bedeutet $A = \mathrm{pr}\mathbf{B}$, daß für jedes Element $h \in H$, $Ah = \mathbf{PB}h$ gilt, wobei $\mathbf{P}$ die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{H}$ auf H ist. $\mathbf{B}$ heißt eine *Dilatation* von A.

gebildete lineare Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{L}^\circ$ in $\boldsymbol{H}^\circ$ dicht. Ist ξ durch (6) gegeben, so setzen wir

(7) $$\eta(s)=\sum_j e^{-ist_j}\mathbf{U}^\circ(t_j)S(s)x_j \qquad (-\infty<s<+\infty).$$

Diese Zuordnung $\xi\to\eta(s)$ ist *eindeutig*, d. h. von der speziellen Wahl der Darstellung (6) des Elementes ξ unabhängig. Offenbar genügt es hierzu zu zeigen, daß aus $\xi=0$ folgt $\eta(s)=0$ $(-\infty<s<+\infty)$.

Aus
$$\xi=\sum_j \mathbf{U}^\circ(t_j)x_j=0$$
folgt für jede reelle Zahl t
$$\sum_j T(t+t_j)x_j=\mathbf{P}^\circ\sum_j \mathbf{U}^\circ(t+t_j)x_j=\mathbf{P}^\circ\mathbf{U}^\circ(t)\sum_j \mathbf{U}^\circ(t_j)x_j=\mathbf{P}^\circ\mathbf{U}^\circ(t)\xi=0,$$
wobei $\mathbf{P}^\circ$ die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{H}^\circ$ auf H bedeutet. Daraus folgt weiter
$$\mathbf{P}^\circ\mathbf{U}^\circ(t)\eta(s)=\mathbf{P}^\circ\sum_j e^{-ist_j}\mathbf{U}^\circ(t+t_j)S(s)x_j=$$
$$=e^{its}\sum_j e^{-is(t+t_j)}T(t+t_j)S(s)x_j=e^{its}S(s)\sum_j T(t+t_j)x_j=0$$
$(-\infty<t<+\infty)$, und daher
$$(\eta(s),\mathbf{U}^\circ(t)x)=(\mathbf{U}^\circ(-t)\eta(s),x)=(\mathbf{P}^\circ\mathbf{U}^\circ(-t)\eta(s),x)=0$$
für jedes $x\in H$. Der Raum $\boldsymbol{H}^\circ$ ist aber von den Elementen $\mathbf{U}^\circ(t)x$ $(x\in H;\ -\infty<t<+\infty)$ aufgespannt, also ist $\eta(s)=0$, w. z. b. w.

Aus (6), (7) und aus der soeben bewiesenen Eindeutigkeit der Zuordnung $\xi\to\eta(s)$ folgt, daß der durch $\eta(s)=\mathbf{V}^\circ(s)\xi$ definierte Operator $\mathbf{V}^\circ(s)$ die Linearmannigfaltigkeit $\boldsymbol{L}^\circ$ eindeutig und linear in sich überführt.

a) Von (7) kann man unmittelbar die folgenden Eigenschaften von $\mathbf{V}^\circ(s)$ ablesen:

1° $\mathbf{V}^\circ(s)$ ist starkstetig in s, d. h. von $s_n\to s$ folgt $\mathbf{V}^\circ(s_n)\xi\to\mathbf{V}^\circ(s)\xi$ für jedes $\xi\in\boldsymbol{L}^\circ$.

2° Für jedes $\xi\in\boldsymbol{L}^\circ$ und für beliebige $s,s'\geqq 0$ gilt $\mathbf{V}^\circ(s+s')\xi=\mathbf{V}^\circ(s)\mathbf{V}^\circ(s')\xi$, ferner ist $\mathbf{V}^\circ(0)\xi=\xi$.

b) Für je zwei Elemente $\xi',\xi''\in\boldsymbol{L}^\circ$ ist
$$(\mathbf{V}^\circ(s)\xi',\xi'')=(\xi',\mathbf{V}^\circ(-s)\xi'') \qquad (-\infty<s<+\infty).$$
Es ist nämlich
$$(\mathbf{V}^\circ(s)\xi',\xi'')=\Big(\sum_j e^{-ist'_j}\mathbf{U}^\circ(t'_j)S(s)x'_j,\ \sum_k \mathbf{U}^\circ(t''_k)x''_k\Big)=$$
$$=\sum_j\sum_k e^{-ist'_j}\big(\mathbf{U}^\circ(t'_j)S(s)x'_j,\ \mathbf{U}^\circ(t''_k)x''_k\big)=$$
$$=\sum_j\sum_k e^{-ist'_j}\big(S(s)x'_j,\ \mathbf{U}^\circ(t''_k-t'_j)x''_k\big)=$$
$$=\sum_j\sum_k e^{-ist'_j}\big(x'_j,\ S(-s)T(t''_k-t'_j)x''_k\big)=$$
$$=\sum_j\sum_k e^{-ist'_j}\big(x'_j,\ e^{-i(-s)(t''_k-t'_j)}T(t''_k-t'_j)S(-s)x''_k\big)=$$
$$=\sum_j\sum_k e^{-ist''_k}\big(x'_j,\ \mathbf{U}^\circ(t''_k-t'_j)S(-s)x''_k\big)=$$
$$=\sum_j\sum_k e^{-ist''_k}\big(\mathbf{U}^\circ(t'_j)x'_j,\ \mathbf{U}^\circ(t''_k)S(-s)x''_k\big)=(\xi',\mathbf{V}^\circ(-s)\xi'').$$

c) Für jedes $\xi \in \boldsymbol{L}^\circ$ und reelle s gilt $\|\mathbf{V}^\circ(s)\xi\| \leqq \|\xi\|$. Ist nämlich

$$\xi = \sum_j \mathbf{U}^\circ(t_j)x_j,$$

so gilt

$$\mathbf{V}^\circ(-s)\mathbf{V}^\circ(s)\xi = \sum_j \mathbf{U}^\circ(t_j)S(-s)S(s)x_j,$$

also

$$\begin{aligned}\|\mathbf{V}^\circ(s)\xi\|^2 &= (\mathbf{V}^\circ(s)\xi, \mathbf{V}^\circ(s)\xi) = (\mathbf{V}^\circ(-s)\mathbf{V}^\circ(s)\xi, \xi) = \\ &= \sum_j \sum_k (\mathbf{U}^\circ(t_j)S^*(s)S(s)x_j, \mathbf{U}^\circ(t_k)x_k) = \\ &= \sum_j \sum_k (S^*(s)S(s)x_j, \mathbf{U}^\circ(t_k - t_j)x_k) = \\ &= \sum_j \sum_k (S^*(s)S(s)x_j, T(t_k - t_j)x_k) = \\ &= \sum_j \sum_k (T(t_j - t_k)S^*(s)S(s)x_j, x_k);\end{aligned}$$

andererseits ist

$$\begin{aligned}\|\xi\|^2 &= \sum_j \sum_k (\mathbf{U}^\circ(t_j)x_j, \mathbf{U}^\circ(t_k)x_k) = \\ &= \sum_j \sum_k (\mathbf{U}^\circ(t_j - t_k)x_j, x_k) = \sum_j \sum_k (T(t_j - t_k)x_j, x_k).\end{aligned}$$

Wir haben also zu beweisen, daß

$$\|\xi\|^2 - \|\mathbf{V}^\circ(s)\xi\|^2 = \sum_j \sum_k (T(t_j - t_k)(I - S^*(s)S(s))x_j, x_k) \geqq 0.$$

Wegen $\|S(s)\| \leqq 1$ ist $I - S^*(s)S(s) \geqq 0$; man setze $Q(s) = [I - S^*(s)S(s)]^{\frac{1}{2}}$. Aus

$$\begin{aligned}S^*(s)S(s)T(t) &= S(-s)S(s)T(t) = S(-s)e^{-its}T(t)S(s) = \\ &= T(t)S(-s)S(s) = T(t)S^*(s)S(s)\end{aligned}$$

folgt, daß $Q(s)$ mit $T(t)$ vertauschbar ist $(-\infty < t, s < +\infty)$; folglich gilt

$$\|\xi\|^2 - \|\mathbf{V}^\circ(s)\xi\|^2 = \sum_j \sum_k (T(t_j - t_k)Q(s)x_j, Q(s)x_k) =$$

$$= \sum_j \sum_k (\mathbf{U}^\circ(t_j - t_k)Q(s)x_j, Q(s)x_k) = \sum_j \sum_k (\mathbf{U}^\circ(t_j)Q(s)x_j, \mathbf{U}^\circ(t_k)Q(s)x_k) =$$

$$= \|\sum_j \mathbf{U}^\circ(t_j)Q(s)x_j\|^2 \geqq 0, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

d) In $\boldsymbol{L}^\circ$ erfüllen $\mathbf{U}^\circ(t)$ und $\mathbf{V}^\circ(s)$ die Weylsche Vertauschungsrelation. Für beliebige reelle t und s gilt nämlich

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^\circ(t)\mathbf{V}^\circ(s)\xi &= \mathbf{U}^\circ(t) \sum_j e^{-ist_j}\mathbf{U}^\circ(t_j)S(s)x_j = \\ &= e^{its} \sum_j e^{-is(t+t_j)}\mathbf{U}^\circ(t+t_j)S(s)x_j = \\ &= e^{its}\mathbf{V}^\circ(s) \sum_j \mathbf{U}^\circ(t+t_j)x_j = e^{its}\mathbf{V}^\circ(s)\mathbf{U}^\circ(t)\xi.\end{aligned}$$

e) Endlich gilt für $\xi = x \in H$, und für beliebige t und s: $\xi = \mathbf{U}^\circ(0)x$, $\mathbf{V}^\circ(s)\xi = S(s)x$, $\mathbf{U}^\circ(t)\mathbf{V}^\circ(t)\xi = \mathbf{U}^\circ(t)\,S(s)\xi$, also

$$\mathbf{P}^\circ\mathbf{U}^\circ(t)\mathbf{V}^\circ(s)x = T(t)\,S(s)x.$$

Wegen c) kann man die Definition von $\mathbf{V}^\circ(s)$ auf den ganzen Raum $\boldsymbol{H}^\circ$ durch Stetigkeit erweitern: $\{\mathbf{V}^\circ(s)\}_{s \geqq 0}$ wird eine einparametrige starkstetige Kontraktionshalbgruppe in $\boldsymbol{H}^\circ$, $\{\mathbf{V}^\circ(s)\}_{-\infty<s<+\infty}$ und $\{\mathbf{U}^\circ(t)\}_{-\infty<t<+\infty}$ werden die Weylsche Vertauschungsrelation im ganzen Raum $\boldsymbol{H}^\circ$ erfüllen, ferner gilt

$$T(t)\,S(s) = \mathrm{pr}\,\mathbf{U}^\circ(t)\mathbf{V}^\circ(s) \qquad (-\infty < t, s < +\infty).$$

Es sei jetzt $\{\mathbf{V}(s)\}_{-\infty<s<+\infty}$ die minimale unitäre Dilatation von $\{\mathbf{V}^\circ(s)\}_{-\infty<s<+\infty}$ in einem entsprechend gewählten minimalen Erweiterungsraum $\boldsymbol{H}$ von $\boldsymbol{H}^\circ$. Die lineare Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{L}$ der Elemente von der Form

$$\vartheta = \sum_j \mathbf{V}(s_j)\boldsymbol{x}_j \qquad (\boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{H}^\circ) \tag{9}$$

ist in $\boldsymbol{H}$ dicht. Für so ein ϑ setzen wir

$$\sigma(t) = \sum_j e^{its_j}\mathbf{V}(s_j)\mathbf{U}^\circ(t)\boldsymbol{x}_j \qquad (-\infty < t < +\infty). \tag{10}$$

Die Zuordnung $\vartheta \to \sigma(t)$ ist eindeutig, d. h. von der speziellen Wahl der Darstellung (9) des Elementes ϑ unabhängig. Definiert man den linearen Operator $\mathbf{U}(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ in $\boldsymbol{L}$ mit $\mathbf{U}(t)\vartheta = \sigma(t)$, so kann man mit Wiederholung der Rechnungen im ersten Schritte leicht sehen, daß die Definition von $\mathbf{U}(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ zum ganzen Raum $\boldsymbol{H}$ fortgesetzt werden kann, derart, daß die folgenden Beziehungen erfüllt werden:

1) $\mathbf{U}(-t) = \mathbf{U}^*(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$,
2) $\{\mathbf{U}(t)\}_{t \geqq 0}$ ist eine einparametrige starkstetige Kontraktionshalbgruppe,
3) $\mathbf{U}(t)\,\mathbf{V}(s) = e^{its}\mathbf{V}(s)\mathbf{U}(t)$ $(-\infty < t, s < +\infty)$,
4) $T(t)\,S(s) = \mathrm{pr}\,\mathbf{U}(t)\,\mathbf{V}(s)$ $(-\infty < t, s < +\infty)$.

Wir werden beweisen, daß $\mathbf{U}(t)$ sogar unitär ist.

Wiederholt man die Rechnung c) aus dem ersten Schritte, so sieht man, daß $\mathbf{U}(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ auf $\boldsymbol{L}$ isometrisch ist. $\mathbf{U}(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ bildet aber die lineare Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{L}$ ein-eindeutig auf sich ab, wie man von (9) und (10) unmittelbar ablesen kann. $\boldsymbol{L}$ ist in $\boldsymbol{H}$ dicht, voraus die Behauptung folgt.

Also besitzen $\{\mathbf{U}(t)\}$ und $\{\mathbf{V}(s)\}$ die gewünschten Eigenschaften, w. z. b. w.

Bemerkung. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\mathbf{X}(t, s) = e^{-\frac{i}{2}ts}\mathbf{U}(t)\mathbf{V}(s) = e^{\frac{i}{2}ts}\mathbf{V}(s)\mathbf{U}(t),$$

$$Y(t, s) = e^{-\frac{i}{2}ts}T(t)S(s) = e^{\frac{i}{2}ts}S(s)T(t).$$

Man kann leicht nachrechnen, daß die Beziehungen

$$e^{\frac{i}{2}(t_1s_2 - s_1t_2)}\mathbf{X}(t_1 + t_2, s_1 + s_2) = \mathbf{X}(t_1, s_1)\mathbf{X}(t_2, s_2) \tag{11}$$

$(-\infty < t_1, t_2, s_1, s_2 < +\infty)$, $\mathbf{X}^*(t, s) = \mathbf{X}(-t, -s)$ und $\mathbf{X}(0, 0) = \mathbf{I}$ gelten.

Es sei $\{x_n\}$ ein beliebiges endliches System der Elementen von H, und seien $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ zwei entsprechende Systeme von reellen Zahlen. Dann folgt aus (5) und (9):

$$\sum_j \sum_k e^{-\frac{i}{2}(s_k t_j - t_k s_j)} (Y(t_j - t_k, s_j - s_k)x_k, x_j) =$$

$$= \sum_j \sum_k e^{-\frac{i}{2}(s_k t_j - t_k s_j)} (\mathbf{X}(t_j - t_k, s_j - s_k)x_k, x_j) = \| \sum_k \mathbf{X}^*(t_k, s_k)x_k \|^2,$$

und folglich

$$\sum_j \sum_k e^{-\frac{i}{2}(s_k t_j - t_k s_j)} (Y(t_j - t_k, s_j - s_k)x_k, x_j) \geqq 0. \tag{12}$$

Man kann beweisen, daß das Bestehen der Ungleichung (12) für jedes endliche System $\{x_n\}$ von Elementen von H und für entsprechende Systeme $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ von reellen Zahlen, auch *hinreichend* dafür ist, daß unitäre Dilatationen $\{\mathbf{U}(t)\}_{-\infty<t<+\infty}$ und $\{\mathbf{V}(s)\}_{-\infty<s<+\infty}$ mit den gewünschten Eigenschaften existieren. (Diese Konstruktion ist analog einer Konstruktion in [4].)

Könnten wir also die Ungleichung (12) unmittelbar beweisen, so würden wir einen neuen Beweis des Satzes dieser Arbeit bekommen. Wir haben jedoch (12) bisher nur in dem Falle *unmittelbar* beweisen können, daß mindestens eine der Halbgruppen $\{S_s\}_{s\geqq 0}$, $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ aus lauter normalen Kontraktionen besteht.

Literaturverzeichnis

[1] H. Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie, *Zeitschrift f. Physik*, **46** (1928), 1—47.
[2] C. Foiaş, L. Gehér, and B. Sz.-Nagy, On the permutability condition of quantum mechanics, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 78—89.
[3] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.
[4] B. Sz.-Nagy, Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math.*, **15** (1954), 104—114.

(Eingegangen am 1. September 1962)