Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen

Von L. LEINDLER in Szeged

Herrn Professor Béla Szőkefalvi-Nagy zum 50. Geburtstag gewidmet

J. MEDER [4] und K. TANDORI [6] haben Approximationssätze für die $(C, 1)$-Mittel allgemeiner Orthogonalentwicklungen mit den üblichen Methoden der Theorie der allgemeinen Orthogonalreihen bewiesen. G. ALEXITS und D. KRÁLIK [3] haben neuerlich den Satz von K. TANDORI, welcher den von J. MEDER erweitert, mit *reihentheoretischen* Methoden noch verallgemeinert. Ihr Satz lautet folgenderweise:

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall (a, b) definiertes, beliebiges Orthonormalsystem, $\{c_n\} \in l^2$ [1]) eine reelle Zahlenfolge und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad (\text{Konvergenz in } L^2(a, b)). \tag{1}$$

Wir nehmen an, daß die Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \vartheta^2(n) < \infty$$

die $(C, 1)$-Summierbarkeit der Reihe (1) auf einer Menge $E \subset (a, b)$ sichert, wobei $\vartheta(x)$ eine positive, monoton gegen $+\infty$ wachsende Funktion ist. Bedeutet $\bar{l}(x)$ eine positive, von unten konkave, monoton gegen $+\infty$ strebende Funktion, für welche $x^\gamma/\bar{l}(x)$ mit festem $0<\gamma<1$ bei genügend großem x monoton nicht abnimmt, so folgt aus dem Erfülltsein der Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \bar{l}^2(n) \vartheta^2(n) < \infty,$$

daß die $(C, 1)$-Mittel $\sigma_n(x)$ der Orthogonalreihe (1) die Funktion $f(x)$ auf E mit dem Annäherungsgrad

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{\bar{l}(n)}\right) \tag{2}$$

approximieren.

---

[1]) D. h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

In § 2 beweisen wir wieder mit den klassischen Methoden der Theorie der allgemeinen Orthogonalreihen drei mit Rieszscher Summation verknüpfte Sätze, aus denen sich als Spezialfälle der Satz von G. ALEXITS und D. KRÁLIK und das Ergebnis, daß im Falle $\bar{l}(x) = x^\gamma$ $(0<\gamma<1)$ schon die Bedingung $\sum c_n^2 \bar{l}^2(n) \equiv \sum c_n^2 n^{2\gamma} < \infty$ für (2) *hinreichend* ist, ergeben. Bevor wir unsere Sätze formulieren, führen wir einige Begriffe und Bezeichnungen ein, die wir im folgenden immer in demselben Sinne verwenden.

Sei $\lambda(\omega)$ $(\omega \geqq 0)$ eine positive, im strengen Sinne wachsende Funktion mit $\lambda(0)=0$ und $\lambda(n)\to\infty$ und $\Lambda(\omega)$ die eindeutig bestimmte inverse Funktion von $\lambda(\omega)$. Die Orthogonalreihe (1) heißt $(R, \lambda(n), 1)$-summierbar zur im Falle $\{c_n\}\in l^2$ durch den Riesz—Fischerschen Satz bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmten Funktion $f(x)$, wenn für $\omega = n$ mit $n\to\infty$

$$R_\omega(x) = \frac{1}{\lambda(\omega)} \sum_{k\leqq\omega} (\lambda(\omega)-\lambda(k)) c_k \varphi_k(x) \to f(x)$$

fast überall gilt. Wir setzen

$$s_\omega(x) = \sum_{k\leqq\omega} c_k\varphi_k(x), \quad m_n = \Lambda(2^n) \quad \text{und} \quad \bar{m}_n = [m_n];\,^{2)}$$

hier sind ω und m_n nicht notwendigerweise ganze Zahlen. Es seien $\varrho(\omega)$ $(\omega\geqq 0)$ eine positive monoton gegen Unendlich wachsende, $\mu(\omega)$ $(\omega\geqq 0)$ eine positive, monoton nichtabnehmende Funktion und $\gamma(\omega)$ $(\omega\geqq 0)$ eine positive, monotone Funktion, für welche die Funktion $\gamma(\omega)/\varrho(\omega)$ monoton gegen Null konvergiert.

Satz I. *Es sei $l(\omega)$ eine positive monoton nichtabnehmende Funktion mit $l(\bar{m}_n+1) = l(\bar{m}_n+2) = \ldots = l(\bar{m}_{n+1})$ $(n=1, 2, \ldots)$ und*

$$l(m_{n+1}) \leqq K l(m_n) \qquad (n=1, 2, \ldots;\ 0<K<2). \tag{3}$$

Ferner sei $\{c_n\}$ eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 l^2(n) < \infty. \tag{4}$$

Ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n l(n) \varphi_n(x) \tag{5}$$

auf einer Menge $E\subset(a, b)$ $(R, \lambda(n), 1)$-summierbar, so approximieren die $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel $R_n(x)$ der Orthogonalreihe (1) die Funktion $f(x)$ auf E fast überall mit dem Annäherungsgrad

$$|R_n(x)-f(x)| = o_x\left(\frac{1}{l(n)}\right). \tag{6}$$

In diesem Satz können die „guten" Eigenschaften des Systems $\{\varphi_n(x)\}$ ausgenutzt werden. Im Spezialfall $\lambda(n)=n$ ist es bekannt, daß die Reihe (5) im Fall (4) z. B. für das trigonometrische System $(R, n, 1)$- (d. h. $(C, 1)$-) summierbar ist; dasselbe gilt für ein beliebiges Orthogonalsystem $\{\varphi_n(x)\}$, dessen 2^n-ten Lebesgue-

²) $[a]$ bezeichnet den ganzen Teil von a.

schen Funktionen ($n=1, 2, \ldots$) auf der Menge E gleichmäßig beschränkt sind (siehe z. B. ALEXITS [2]). Die Ersatzbedingungen für $l(\omega)$ sind leider nötig.

Aus dem Satz I ergibt sich der folgende

Satz II. *Sichert die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \varrho^2(n) < \infty \tag{7}$$

die $(R, \lambda(n), 1)$-Summierbarkeit der Reihe (1) für jede die Bedingung (7) erfüllenden Koeffizientenfolgen $\{c_n\}$ auf einer Menge $E \subset (a, b)$ fast überall, so folgt aus dem Erfülltsein der Bedingungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \varrho^2(n) \mu^2(n) < \infty \tag{8}$$

und

$$\mu(m_{n+1}) \leqq K\mu(m_n) \qquad (n=1, 2, \ldots; \ 0 < K < 2), \tag{9}$$

daß die $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel $R_n(x)$ der Orthogonalreihe (1) die Funktion $f(x)$ auf E fast überall mit dem Annäherungsgrad

$$|R_n(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{\mu(n)}\right) \tag{10}$$

approximieren.

Der folgende Satz besagt, daß für die $(R, \lambda(n), 1)$-Summierbarkeit die Heranziehung der Folge $\{\varrho(n)\}$ in gewißen Fällen unnötig ist.

Satz III. *Gilt*

$$K_1\mu(m_n) \leqq \mu(m_{n+1}) \leqq K_2\mu(m_n) \quad \textit{mit} \quad 1 < K_1 \leqq K_2 < 2, \tag{11}$$

so folgt schon aus der Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \mu^2(n) < \infty, \tag{12}$$

daß die $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel $R_n(x)$ der Orthogonalreihe (1) die Funktion $f(x)$ in (a, b) fast überall mit dem Annäherungsgrad (10) approximieren.

Es ist bekannt, daß im Falle des $(C, 1)$-Verfahrens $\lambda(n) = \Lambda(n) = n$ ist. So sind die Bedingung (9) mit $\mu(2^{n+1}) \leqq K\mu(2^n)$ $(0 < K < 2)$ und die Bedingung (11) mit $\mu(n) = \alpha n^\gamma$ $(\alpha > 0, 0 < \gamma < 1)$ erfüllt. Daraus ergeben sich unsere vorerwähnten Behauptungen.

Der folgende Satz ergibt sich unmittelbar aus dem Hilfssatz I, der in den Approximationssätzen eine analoge Rolle spielt, wie das Kroneckersche Lemma in den Größenordnungssätzen:

Satz IV. *Es sei $\{p_n\}$ eine im strengen Sinne wachsende Indexfolge und $\{w_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit $w_{p_n+1} = w_{p_n+2} = \ldots = w_{p_{n+1}}$.*

$(n=1, 2, \ldots)$. *Konvergieren die Partialsummen* $\tilde{s}_{p_n}(x)$ *der Orthogonalreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n \varphi_n(x)$$

auf einer Menge $E\subset(a, b)$, *so approximieren die Partialsummen* $s_{p_n}(x)$ *der Reihe* (1) *auf* E *die Funktion* $f(x)$ *mit dem Annäherungsgrad*

$$|s_{p_n}(x)-f(x)| = o_x\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von K. TANDORI [6].

In § 3 geben wir Sätze für die Größenordnung der $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel der Orthogonalreihe (1).

Satz V. *Es sei* $l(\omega)$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Funktion mit* $l(\overline{m}_n+1) = l(\overline{m}_n+2) = \ldots = l(\overline{m}_{n+1})$ $(n=1, 2, \ldots)$ und $l(n)\to\infty$. *Ferner sei* $\{c_n\}$ *eine Koeffizientenfolge mit der Eigenschaft*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2[l(n)]^{-2}<\infty. \tag{13}$$

Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n[l(n)]^{-1}\varphi_n(x) \tag{14}$$

auf einer Menge $E\subset(a, b)$ $(R, \lambda(n), 1)$-*summierbar, so gilt die Abschätzung*

$$R_n(x)=o_x(l(n)) \tag{15}$$

für die $(R, \lambda(n), 1)$-*Mittel* $R_n(x)$ *der Orthogonalreihe* (1) *auf* E *fast überall.*

Die „guten" Eigenschaften des Systems $\{\varphi_n(x)\}$ können auch im Satz V ausgenutzt werden.

Aus dem Satz V folgt der folgende:

Satz VI. *Sichert die Bedingung* (7) *die* $(R, \lambda(n), 1)$-*Summierbarkeit der Reihe* (1) *für jede, die Bedingung* (7) *erfüllende Koeffizientenfolge* $\{c_n\}$ *auf einer Menge* $E\subset(a, b)$, *so folgt aus der Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\gamma^2(n)<\infty$$

für die $(R, \lambda(n), 1)$-*Mittel* $R_n(x)$ *der Orthogonalreihe* (1) *auf* E *die Abschätzung*

$$R_n(x)=o_x\left(\frac{\varrho(n)}{\gamma(n)}\right). \tag{16}$$

Für $\gamma(n)\equiv 1$ wurde dieser Satz im Spezialfall $\varrho(n)=\log\log n$, $\lambda(n)=n$ von K. TANDORI [7] und im Fall $\varrho(n)=\log\log\log n$, $\lambda(n)=\log n$ von J. MEDER [5] bewiesen.

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis unserer Sätze werden wir einige Hilfssätze vorausschicken.

Hilfssatz I. *Es sei* $\{p_m\}$ *eine Indexfolge:* $(1 \leqq) p_1 < p_2 < \ldots < p_m < \ldots$. *Sind* $\{u_n\}$ *eine beliebige, und* $\{\lambda_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit* $\lambda_{p_m+1} = \ldots = \lambda_{p_{m+1}}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *so folgt aus der Konvergenz der* p_m*-ten Partialsummen* $s^*_{p_m}$ *der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \lambda_n$ *die Konvergenz der* p_m*-ten Partialsummen* s_{p_m} *der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *und es gilt für* $s = \lim s_{p_m}$ *die Beziehung*

$$|s_{p_m} - s| = o\left(\frac{1}{\lambda_{p_{m+1}}}\right). \tag{1. 1}$$

Die Notwendigkeit der Ersatzbedingung für $\{\lambda_n\}$ kann mit einem Gegenbeispiel leicht bewiesen werden.

Beweis von Hilfssatz I. Durch Abelsche Umformung ergibt sich für

$$s_{p_{m+k}} - s_{p_m} = \sum_{\nu = p_m+1}^{p_{m+k}} \frac{1}{\lambda_\nu} \lambda_\nu u_\nu$$

die Abschätzung

$$|s_{p_{m+k}} - s_{p_m}| = \left| \sum_{\nu = p_m+1}^{p_{m+k}-1} \left(\frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)(s^*_\nu - s^*_{p_m}) + \frac{1}{\lambda_{p_{m+k}}} (s^*_{p_{m+k}} - s^*_{p_m}) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=m+1}^{m+k-1} \left(\frac{1}{\lambda_{p_i}} - \frac{1}{\lambda_{p_{i+1}}}\right)(s^*_{p_i} - s^*_{p_m}) + \frac{1}{\lambda_{p_{m+k}}} (s^*_{p_{m+k}} - s^*_{p_m}) \right| =$$

$$= o\left(\frac{1}{\lambda_{p_{m+1}}} - \frac{1}{\lambda_{p_{m+k}}}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_{p_{m+k}}}\right) = o\left(\frac{1}{\lambda_{p_{m+1}}}\right).$$

Daraus folgt im Falle $k \to \infty$ die Beziehung (1. 1).

Damit haben wir Hilfssatz I bewiesen.

Hilfssatz II. *Gilt*

$$\frac{\mu(\nu_{n+1})}{\mu(\nu_n)} \geqq K > 1, \tag{1. 2}$$

so folgt aus der Bedingung (12), *daß die Partialsummen* $s_{\nu_n}(x)$ *der Reihe* (1) *in* (a, b) *die Funktion* $f(x)$ *fast überall mit dem Annäherungsgrad*

$$|s_{\nu_n}(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{\mu(\nu_n)}\right) \tag{1. 3}$$

approximieren. (Hier sind ν_n nicht notwendigerweise ganze Zahlen.)

Beweis von Hilfssatz II. Dann ist nach (1. 2) und (12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^2(\nu_n) \int_a^b (s_{\nu_n}(x)-f(x))^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^2(\nu_n) \sum_{k>\nu_n} c_k^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^2(\nu_n) \sum_{m=n}^{\infty} \Big(\sum_{\nu_m<k\le\nu_{m+1}} c_k^2\Big) = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{\nu_m<k\le\nu_{m+1}} c_k^2\Big) \sum_{n=1}^{m} \mu^2(\nu_n) =$$

$$= O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{\nu_m<k\le\nu_{m+1}} c_k^2\Big) \mu^2(\nu_m) = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\mu^2(n) < \infty.$$

Nach dem Satz von B. LEVI konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^2(\nu_n)(s_{\nu_n}(x)-f(x))^2$$

fast überall und so gilt (1. 3) in (a, b) fast überall, womit der Hilfssatz II bewiesen ist.

Hilfssatz III. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz I und der ergänzenden Voraussetzung $\lambda_n \to \infty$ folgt aus der Konvergenz der p_m-ten Partialsummen $\tilde{s}_{p_m}$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\lambda_n^{-1}$ die Abschätzung*

$$s_{p_m} = o(\lambda_{p_m}). \tag{1.4}$$

Beweis von Hilfssatz III. Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Kroneckerschen Lemma (siehe z. B. ALEXITS [1], S. 68), wenn wir dieses auf die Zahlenfolge $\{\lambda_{p_m}\}$ und die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=p_m+1}^{p_{m+1}} u_\nu\right)$ anwenden.

Hilfssatz IV. *Es sei $\tilde{l}(\omega)$ eine positive, monotone Funktion mit $\tilde{l}(\overline{m}_n+1) = \tilde{l}(\overline{m}_n+2) = \ldots = \tilde{l}(\overline{m}_{n+1})$ und*

$$\tilde{l}(m_{n+1}) \le K\tilde{l}(m_n) \qquad (n=1, 2, \ldots;\ 0<K<2). \tag{1.5}$$

Dann folgt aus der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \tilde{l}^2(n) < \infty \tag{1.6}$$

die Abschätzung

$$|s_{\overline{m}_n}(x) - R_k(x)| = o_x\left(\frac{1}{\tilde{l}(k)}\right) \tag{1.7}$$

für jede n und k mit $\overline{m}_n < k \le \overline{m}_{n+1}$, fast überall in (a, b).

Beweis von Hilfssatz IV. Wir werden die Gleider auf der rechten Seite der Ungleichung

$$|s_{\overline{m}_n}(x) - R_k(x)| \le |s_{\overline{m}_n}(x) - R_{m_n}(x)| + |R_{m_n}(x) - R_{\overline{m}_n+1}(x)| + |R_{\overline{m}_n+1}(x) - R_k(x)| \tag{1.8}$$

einzeln abschätzen. Mit einfacher Rechnung ergibt sich nach (1. 5) und (1. 6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{l}^2(m_n)\int_a^b (s_{m_n}(x)-R_{m_n}(x))^2\,dx = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{l}^2(m_n)\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{\overline{m}_n}\lambda^2(k)c_k^2 =$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{l}^2(m_n)\frac{1}{2^{2n}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{k=\overline{m}_\nu+1}^{\overline{m}_{\nu+1}}\lambda^2(k)c_k^2 =$$

$$= O(1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=\overline{m}_\nu+1}^{\overline{m}_{\nu+1}}\lambda^2(k)c_k^2\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\frac{\tilde{l}^2(m_n)}{2^{2n}} =$$

$$= O(1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=\overline{m}_\nu+1}^{\overline{m}_{\nu+1}}\lambda^2(k)c_k^2\frac{\tilde{l}^2(m_{\nu+1})}{2^{2\nu}} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\tilde{l}^2(n)<\infty.$$

Daraus ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{l}^2(m_n)(s_{m_n}(x)-R_{m_n}(x))^2$$

fast überall konvergiert; also gilt fast überall

$$s_{\overline{m}_n}(x)-R_{m_n}(x) = o_x\left(\frac{1}{\tilde{l}(m_n)}\right). \tag{1.9}$$

Weiterhin gilt die Beziehung

$$|R_{\overline{m}_n+1}(x)-R_{m_n}(x)| = o_x\left(\frac{1}{\tilde{l}(m_n)}\right) \qquad (m_n<\overline{m}_{n+1}) \tag{1.10}$$

fast überall in (a, b). Dies folgt mit Anwendung des Satzes von B. Levi daraus, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \tilde{l}^2(m_n)\int_a^b (R_{\overline{m}_n+1}(x)-R_{m_n}(x))^2\,dx = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\tilde{l}^2(m_n)\frac{1}{\lambda^2(m_n)}\sum_{k=1}^{\overline{m}_n}\lambda^2(k)c_k^2 =$$

$$= O(1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=\overline{m}_\nu+1}^{\overline{m}_{\nu+1}}\lambda^2(k)c_k^2\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\frac{\tilde{l}^2(m_n)}{2^{2n}} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\tilde{l}^2(n)<\infty.\ ^{3)}$$

Nach (1. 6) gilt auch die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda(i)\,\tilde{l}^2(i)}{\lambda(i+1)-\lambda(i)}\int_a^b (R_i(x)-R_{i-1}(x))^2\,dx =$$

$$= O(1)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda(i+1)-\lambda(i))\,\tilde{l}^2(i)}{\lambda(i)\lambda^2(i+1)}\sum_{k=1}^{i}\lambda^2(k)c_k^2 =$$

[3]) Σ' bedeutet, daß man nur für die n mit $m_n<\overline{m}_{n+1}$ summiert.

$$= O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^2(k)c_k^2\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\tilde{l}^2(i)(\lambda(i+1)-\lambda(i))}{\lambda(i)\lambda^2(i+1)} =$$

$$= O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^2(k)c_k^2\sum_{i=k}^{\infty}\tilde{l}^2(i)\left(\frac{1}{\lambda^2(i)}-\frac{1}{\lambda^2(i+1)}\right) =$$

$$= O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^2(k)c_k^2\frac{\tilde{l}^2(k)}{\lambda^2(k)} = O(1)\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\tilde{l}^2(k) < \infty.$$

Nach dem Obigen gilt

$$\sum_{i=\bar{m}_n+1}^{\bar{m}_{n+1}}\frac{\lambda(i)\,\tilde{l}^2(i)}{\lambda(i+1)-\lambda(i)}(R_i(x)-R_{i-1}(x))^2 = o_x(1).$$

Offensichtlich ist

$$\sum_{i=\bar{m}_n+1}^{\bar{m}_{n+1}}\frac{\lambda(i+1)-\lambda(i)}{\lambda(i)} \leqq \frac{\lambda(\bar{m}_{n+1}+1)}{\lambda(\bar{m}_n+1)} = O(1),$$

also ergibt sich durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung:

$$|R_{\bar{m}_n+1}(x)-R_k(x)| \leqq \left\{\sum_{i=\bar{m}_n+2}^{k}\frac{\lambda(i)\,\tilde{l}^2(i)}{\lambda(i+1)-\lambda(i)}(R_i(x)-R_{i-1}(x))^2\right\}^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{i=\bar{m}_n+2}^{k}\frac{\lambda(i+1)-\lambda(i)}{\lambda(i)\,\tilde{l}^2(i)}\right\}^{1/2} = o_x\left(\frac{1}{\tilde{l}(k)}\right).$$

Daraus und aus (1. 9) und (1. 10) folgt die Abschätzung (1. 7) nach (1. 8).

Damit haben wir den Hilfssatz IV bewiesen.

Hilfssatz V. *Damit die Orthogonalreihe* (1) *mit* $\{c_n\}\in l^2$ *auf einer Menge* E $(R, \lambda(n), 1)$*-summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Partialsummen* $s_{\bar{m}_n}(x)$ *auf* E *fast überall konvergieren.*

Der Hilfssatz V wurde von A. ZYGMUND [8] bewiesen.

§ 2. Approximationen

Beweis von Satz I. Wir nehmen an, daß die Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ und die Funktion $l(\omega)$ die Bedingungen des Satzes I erfüllen. Dann können wir den Hilfssatz V mit der Koeffizientenfolge $\{c_n l(n)\}$ anwenden, und so ergibt sich die Konvergenz der Partialsummen $\tilde{s}_{m_n}(x)$ der Reihe (5) auf E fast überall. Also können wir den Hilfssatz I für die Reihe (5) mit $p_n=\bar{m}_n$ anwenden, und so ergibt sich auf E fast überall der Annäherungsgrad

$$|s_{\bar{m}_n}(x)-f(x)| = o_x\left(\frac{1}{l(\bar{m}_n)}\right). \tag{2. 1}$$

Nun wenden wir den Hilfssatz IV mit $\tilde{l}(\omega)=l(\omega)$ an; dies ist möglich nach den

Bedingungen (3) und (4). So ergibt sich die Abschätzung

$$|s_{\overline{m}_n}(x) - R_k(x)| = o_x\left(\frac{1}{l(k)}\right) \tag{2. 2}$$

für jede n und k mit $\overline{m}_n < k \leqq \overline{m}_{n+1}$, fast überall in $(a; b)$. Aus (2. 1) und (2. 2) folgt die Behauptung (6).

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

Beweis von Satz II. Es sei

$$\tilde{\mu}(\omega) = \begin{cases} \mu(\overline{m}_{n+1}) & \text{für} \quad \overline{m}_n + 1 \leqq \omega \leqq \overline{m}_{n+1}, \\ \mu(\omega) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach den Bedingungen des Satzes II ist die Reihe $\sum c_n \tilde{\mu}(n) \varphi_n(x)$ fast überall auf E $(R, \lambda(n), 1)$-summierbar, weiter bestehen die Bedingungen (3) und (4) des Satzes I mit $l(\omega) = \tilde{\mu}(\omega)$. Darum können wir Satz I anwenden: so folgt nach der Definition von $\tilde{\mu}(\omega)$ der Annäherungsgrad (10) fast überall auf E.

Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

Beweis von Satz III. Wir wenden den Hilfssatz II mit $\nu_n = m_n$ an, so bekommen wir die Beziehung

$$|s_{m_n}(x) - f(x)| = o_x\left(\frac{1}{\mu(m_n)}\right)$$

in (a, b) fast überall. Auf Grund von (11) und (12) können wir Hilfssatz IV mit $\tilde{l}(\omega) = \mu(\omega)$ anwenden und so ergibt sich nach (1. 7) die Abschätzung

$$|s_{m_n}(x) - R_k(x)| = o_x\left(\frac{1}{\mu(k)}\right)$$

für jede n und k mit $m_n < k \leqq m_{n+1}$, fast überall in (a, b). Aus dem Obigen und (11) folgt die Behauptung des Satzes III.

§ 3. Abschätzungen

Beweis von Satz V. Wir nehmen an, daß die Bedingungen des Satzes V erfüllt sind. Wir wenden zuerst Hilfssatz V mit der Koeffizientenfolge $\{c_n l^{-1}(n)\}$ an. So ergibt sich die Konvergenz der Partialsummen $\tilde{s}_{\overline{m}_n}(x)$ der Reihe (14) auf E fast überall. Also können wir Hilfssatz III für die Reihe (14) mit $p_n = \overline{m}_n$ anwenden: so ergibt sich nach (1. 4) fast überall auf E die Abschätzung

$$s_{\overline{m}_n}(x) = o_x(l(\overline{m}_n)).$$

Hiernach wenden wir Hilfssatz IV mit $\tilde{l}(\omega) = l^{-1}(\omega)$ an. So bekommen wir die Abschätzung

$$|s_{\overline{m}_n}(x) - R_k(x)| = o_x(l(k))$$

für jede n und k mit $m_n < k \leqq m_{n+1}$, fast überall in (a, b). Aus dem Obigen ergibt sich die Behauptung (15).

Damit haben wir den Satz V vollständig bewiesen.

Beweis von Satz VI. Es sei

$$\tilde{\gamma}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\gamma(\overline{m}_{n+1})}{\varrho(\overline{m}_{n+1})} & \text{für} \quad \overline{m}_n+1\leqq\omega\leqq\overline{m}_{n+1},\\[2ex] \dfrac{\gamma(\omega)}{\varrho(\omega)} & \text{sonst.}\end{cases}$$

Nach den Bedingungen des Satzes VI ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\tilde{\gamma}(n)\varphi_n(x)$$

auf E fast überall $(R,\lambda(n),1)$-summierbar. Mit $[l(\omega)]^{-1}=\tilde{\gamma}(\omega)$ erfüllen sich auch die weiteren Bedingungen des Satzes V, also können wir den Satz V anwenden. So ergibt sich die Abschätzung (16) fast übrall auf E.

Damit ist der Satz VI bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] G. Alexits, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960).

[2] ——— Sur la sommabilité des séries orthogonales, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 181–188.

[3] G. Alexits–D. Králik, Über Approximationen mit den aritmethischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), 387–399.

[4] J. Meder, On the estimation of Cesàro means of orthonormal series, *Annales Polon. Math.*, **4** (1957–58), 183–200.

[5] ——— On the summability almost everywhere of orthonormal series by the method of first logarithmic means, *Rozprawy Matematyczne, Polska Akad. Nauk, Inst. Mat.*, **17** (1959), 1–34.

[6] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. VII (Approximationssätze), *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 19–24.

[7] ——— Über die orthogonalen Funktionen I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57–130.

[8] A. Zygmund, Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, *Bulletin Intern. Acad. Polon. Sci. Lettres* (Cracovie), série A, **1927**, 293–308.

(Eingegangen am 30. Oktober 1961,
in ergänzter Form am 12. September 1962)