ПРИМИТИВНЫЕ КЛАССЫ АЛГЕБР, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ КЛАССАМ ПОЛУМОДУЛЕЙ И МОДУЛЕЙ

Б. ЧАКАНЬ (Москва)*

Целью настоящей статьи является продолжение исследований, проведенных в работе автора [3], в частности, усиление некоторых результатов, там изложенных. Ввиду этого предполагается знакомство читателя с определениями, обозначениями и результатами упомянутой работы.

§ 1

В [3] сформулированы следующие условия, которыми может обладать некоторый примитивный класс $\mathfrak{A}$:

I. В $\mathfrak{A}$ существует нульместная операция, отмеченный которой элемент образует подалгебру в любой алгебре класса $\mathfrak{A}$.

II′. В любой алгебре из $\mathfrak{A}$ каждая конгруэнция однозначно определяется своим классом, являющимся нормальной подалгеброй.

III. В любой алгебре из $\mathfrak{A}$ каждая подалгебра нормальна.

IV. Класс $\mathfrak{A}$ нормальный.

Кроме этих условий, нам понадобится и следующее:

V. В классе $\mathfrak{A}$ прямое и свободное произведения двух алгебр совпадают. Иными словами, между прямым и $\mathfrak{A}$-свободным произведениями алгебр A и B класса $\mathfrak{A}$ существует такой изоморфизм, при котором элементы A и B соответствуют самим себе.

Условие V исследовал А. А. Терехов [2]. Им отмечено, что V имеет смысл лишь при наличии I, а также дана характеристика квазипримитивных классов, удовлетворяющих условиям I, V. Напомним, что существование свободного произведения в примитивном классе установлено Сикорским [4].

* B. Csákány

Алгебру R с основными операциями $+,\cdot$, и с нулевым элементом $\mathbf{0}$, для которых выполняются аксиомы

$$r_1+r_2=r_2+r_1,\ (r_1+r_2')+r_3=r_1+(r_2+r_3),$$
$$(r_1+r_2)r_3=r_1r_3+r_2r_3,\ r_3(r_1+r_2)=r_3r_1+r_3r_2,$$
$$(r_1r_2)r_3=r_1(r_2r_3),$$
$$r_1+\mathbf{0}=r_1,\ r_1\mathbf{0}=\mathbf{0}\ r_1=\mathbf{0},$$

где $r_1, r_2, r_3\in R$, мы будем называть (ассоциативным) полукольцом.

Аддитивную полугруппу A с единичным элементом 0, в которой определено операторное произведение $a\varrho$, где $a\in A$, ϱ — элемент некоторого полукольца с единицей R, подчиненное условиям

$$a(\varrho_1+\varrho_2)=a\varrho_1+a\varrho_2,\ (a+b)\varrho_1=a\varrho_1+b\varrho_1,$$
$$a(\varrho_1\varrho_2)=(a\varrho_1)\varrho_2,\ a\mathbf{0}=0,\ a1=a,\ 0\varrho_1=0,$$

где $a, b\in A$, $\varrho_1, \varrho_2\in R$, $\mathbf{0}$ — нулевой элемент, а 1 — единица в R, мы назовем правым унитарным R-полумодулем.

Легко видеть, что если R фиксированное полукольцо с единицей, то все правые унитарные R-полумодули образуют примитивный класс.

§ 2

Сейчас мы охарактеризуем с точностью до эквивалентности примитивные классы адгебр с условиями I, V. Подготовкой служит следующая

Лемма. *Если эквивалентность примитивных классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ определяется отображением операций φ и алгебрам A, A' из $\mathfrak{A}$ соответствуют алгебры B, B' из $\mathfrak{B}$, то алгебре $A\times A'$ соответствует $B\times B'$, а $\mathfrak{A}$-свободному произведению $A*A'$ — $\mathfrak{B}$-свободное произведение $B*B'$.*

Доказательство. Пусть θ — отображение элементов A на B при рассматриваемой эквивалентности, а θ — отображение элементов A' на B'. Построим отображение η элементов $A\times A'$ на $B\times B'$ так:

$$(a, a')\eta=(a\theta, a'\theta'),\quad (a\in A, a'\in A').$$

η взаимно однозначно и если ν произвольная n-местная операция класса $\mathfrak{A}$, то для любых $a_i\in A$, $a_i'\in A'$ $(i=1,\ldots,n)$

$$((a_1, a_1')\ldots(a_n, a_n')\nu)\eta=(a_1\ldots a_n\nu, a_1'\ldots a_n'\nu)\eta=$$
$$=((a_1\ldots a_n\nu)\theta, (a_1'\ldots a_n'\nu)\theta')=((a_1\theta)\ldots(a_n\theta)(\nu\varphi), (a_1'\theta')\ldots(a_n'\theta')(\nu\varphi))=$$
$$=(a_1\theta, a_1'\theta')\ldots(a_n\theta, a_n'\theta')(\nu\varphi)=((a_1, a_1')\eta\ldots(a_n, a_n')\eta)(\nu\varphi).$$

Значит, $A\times A'$ эквивалентна $B\times B'$, а поэтому $B\times B'$ изоморфна той алгебре класса $\mathfrak{B}$, которая соответствует алгебре $A\times A'$ при рассматриваемой эквивалентности классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Перейдем к свободным произведениям. При определении в $B*B'$ операций класса $\mathfrak{A}$ посредством

$$(1)\qquad b_1\ldots b_r\varrho=b_1\ldots b_r(\varrho\varphi),\quad (b_i\in B*B',\ i=1,\ldots,r),$$

$B*B'$ превращается в алгебру класса $\mathfrak{A}$ $\overline{B*B'}$ (см. лемму 1 из [3] и ее доказательство). При этом θ, θ' изоморфно отображают A, A' на подалгебры B, B' алгебры $\overline{B*B'}$. Поскольку $A*A'$ — $\mathfrak{A}$-свободное произведение, θ и θ' можно продолжить до гомоморфного отображения η $A*A'$ в $\overline{B*B'}$. Гомоморфизм η на самом деле есть отображение на $\overline{B*B'}$. Действительно, если $x\in B*B'$, то существует запись вида $x=b_1\ldots b_nb_1'\ldots b_m'\sigma$, где σ — главная производная операция класса $\mathfrak{A}$, $b_i\in B$ $(i=1,\ldots,n)$, $b_j'\in B'$ $(j=1,\ldots,m)$. Однако $\sigma=\varrho\varphi$, где ϱ — некоторая операция класса $\mathfrak{A}$, а поэтому, ввиду (1), в алгебре $\overline{B*B'}$

$$x=b_1\ldots b_nb_1'\ldots b_m'\varrho.$$

Определяя в $A*A'$ операции класса $\mathfrak{B}$ путем

$$a_1\ldots a_r(\varrho\varphi)=a_1\ldots a_r\varrho,\quad (a_i\in A*A',\ i=1,\ldots,r),$$

мы превратим $A*A'$ в алгебру класса $\mathfrak{B}$ $\overline{A*A'}$, притом θ^{-1}, θ'^{-1} изоморфно отображают B, B' в подалгебры A, A' алгебры $\overline{A*A'}$. Как и выше, θ^{-1} и θ'^{-1} можно продолжить до гомоморфного отображения χ $B*B'$ на $\overline{A*A'}$.

$\eta\chi$ является отображением $A*A'$ на себя, тождественным для элементов A и A'. Имеет место

$$(a_1\ldots a_na_1'\ldots a_m'\varrho)(\eta\chi)=\big((a_1\eta)\ldots(a_n\eta)(a_1'\eta)\ldots(a_m'\eta)(\varrho\varphi)\big)\chi=$$
$$=\big((a_1\theta)\ldots(a_n\theta)(a_1'\theta')\ldots(a_m'\theta')(\varrho\varphi)\big)\chi=a_1\ldots a_na_1'\ldots a_m'\varrho,$$

т. е. $\eta\chi$ — тождественное отображение. Итак, η — взаимно однозначно, т. е. оно есть изоморфизм $A*A'$ на $\overline{B*B'}$. Ввиду (1), $A*A'$ и $B*B'$ эквивалентны при отображении операций φ. Этим лемма доказана.

Еще раз отметим, что отображение операций φ, определяющее эквивалентность классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, тем самым однозначно определяет и соответствие между алгебрами классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Теорема 1. *Примитивный класс алгебр $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда эквивалентен примитивному классу всех правых унитарных полумодулей над некоторым ассоциативным полукольцом с единицей, если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I и V.*

Доказательство. Если в $\mathfrak{A}$ выполняются условия I, V, то свободную алгебру класса $\mathfrak{A}$ с двумя свободными образующими можно отождествить с прямым произведением двух свободных алгебр класса $\mathfrak{A}$ с одним свободным образующим каждая. Из этого факта, как и при доказательстве теоремы 1 в [3], вытекает, что в $\mathfrak{A}$ существует такая двуместная ассоциативная операция $+$ с нулем, что для любой n-местной операции ω класса $\mathfrak{A}$ тождественно

$$(x_1+y_1)\dots(x_n+y_n)\omega = x_1\dots x_n\omega + y_1\dots y_n\omega. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, получаем коммутативность операции $+$.

Множество M, состоящее из всех одноместных операций и из нульместной операции $\mathbf{0}$ класса $\mathfrak{A}$, можно превратить в полукольцо с единицей, если в нем определить операции полукольца следующим образом:

$$x(\mu_1+\mu_2) = x\mu_1 + x\mu_2, \quad x\mathbf{0} = 0, \quad x(\mu_1\mu_2) = (x\mu_1)\mu_2.$$

Полученное полукольцо обозначим через R. Сейчас мы можем доказать, что примитивный класс $\mathfrak{R}$ всех правых унитарных R-полумодулей эквивалентен классу $\mathfrak{A}$. Доказательство состоит в дословном повторении доказательства теоремы 2 из [3]. Отметим, что при этом нам приходится использовать разложимость операций класса $\mathfrak{R}$ в сумму одноместных операций, которая вместо ссылки на свойства абелевых Ω-групп доказывается индукцией по степени слова, определяющего операцию, над системой операций, состоящей из сложения и умножений на элементы полукольца R.

С другой стороны, пусть примитивный класс $\mathfrak{A}$ эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{R}$ всех правых унитарных полумодулей над некоторым ассоциативным полукольцом с единицей R. Выполнение I в $\mathfrak{A}$ очевидно. Рассмотрим в $\mathfrak{A}$ прямое произведение $A\times A'$ ($A, A'\in\mathfrak{A}$) и возьмем прямое произведение полумодулей P, P', соответствующих в $\mathfrak{R}$ алгебрам A, A'. Согласно лемме, $P\times P'$ соответствует алгебре $A\times A'$. Убедимся, что $P\times P'$ — свободное произведение полумодулей P и P' в классе $\mathfrak{R}$.[1]) В самом деле, $P\times P'$ порождается своими подмодулями P и P'. Далее, если θ, θ' — гомоморфизмы P, соответственно P' в некоторый R-полумодуль Q, то пусть отображение η $P\times P'$ в Q определяется так:

$$(p,p')\eta = (p,0)\theta + (0,p')\theta' \qquad (p\in P, p'\in P').$$

Для элементов из P η совпадает с θ, а для элементов из P' — с θ'; кроме того, оно является гомоморфизмом $P\times P'$ в Q, ибо если $p_1, p_2\in P$,

[1]) Доказательство этого факта по существу идет от А. А. Терехова [2] и мы включаем его лишь для удобства читателя.

$p_1', p_2' \in P'$, то

$$[(p_1, p_1') + (p_2, p_2')]\eta = (p_1 + p_2, p_1' + p_2')\eta =$$
$$= (p_1 + p_2, 0)\theta + (0, p_1' + p_2')\theta' =$$
$$= (p_1, 0)\theta + (p_2, 0)\theta + (0, p_1')\theta' + (0, p_2')\theta' = (p_1, p_1')\eta + (p_2, p_2')\eta$$

и для любого $\varrho \in R$

$$[(p_1, p_1')\varrho]\eta = (p_1\varrho, p_1'\varrho)\eta = (p_1\varrho, 0)\theta + (0, p_1'\varrho)\theta' =$$
$$= [(p_1, 0)\theta]\varrho + [(0, p_1')\theta']\varrho = [(p_1, 0)\theta + (0, p_1')\theta']\varrho = [(p_1, p_1')\eta]\varrho.$$

Из доказанного на основании леммы следует, что $A \times A'$ есть $\mathfrak{A}$-свободное произведеиие своих подалгебр A и A'. Этим показано выполнение условия V в $\mathfrak{A}$, что завершает доказательство теоремы 1.

§ 3

Теперь мы будем рассматривать, как и в работе [3], класс унитарных модулей над кольцом.

Теорема 2. *Для примитивного класса $\mathfrak{A}$ следующие четыре утверждения равносильны:*

(A). $\mathfrak{A}$ эквивалентен примитивному классу всех правых унитарных модулей над некоторым ассоциативным кольцом с единицей.

(B). $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I, II′, III.

(C). $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I, II′, V.

(D). $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I, IV, V.

Доказательство. (A) влечет (B). В самом деле, всякий прмитивный класс правых унитарных модулей над ассоциативном кольцом с единицей удовлетворяет условиям I, II′, III. Поэтому нам достаточно заметить, что если примитивные классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ эквивалентны, то отображение элементов, устанавливающее эквивалентность соответствующих алгебр A из $\mathfrak{A}$ и B из $\mathfrak{B}$, переводит подалгебры A в подалгебры B, а также конгруэнции A в конгруэнции B.

(B) влечет (C). В классе $\mathfrak{A}$ со свойством (B) свободное произведение двух алгебр согласно лемме 2 из [3] совпадает с их прямым произведением.

(C) влечет (D). Класс $\mathfrak{A}$ со свойством (C) по теореме 1 эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{R}$ всех правых унитарных полумодулей над некоторым ассоциативным полукольцом с единицей R. Рассмотрим в классе $\mathfrak{R}$ свободный полумодуль F с двумя свободными образующими x_1, x_2. Элементы F представимы словами класса $\mathfrak{N}$ с переменными x_1, x_2. Индукцией по степени слов над системой операций, состоящей из сложения и умножений на элементы из R, получим, что всякий элемент из F имеет вид $x_1\varrho_1+x_2\varrho_2$, $\varrho_1, \varrho_2 \in R$. Такое представление является единственным, ибо если $x_1\varrho_1+x_2\varrho_2=x_1\varrho_1'+x_2\varrho_2'$, $\varrho_1', \varrho_2' \in R$, то, так как F свободен в классе $\mathfrak{N}$, это равенство выполняется в $\mathfrak{N}$ тождественно, и, подставляя $x_1=x, x_2=0$ и $x_1=0$, $x_2=x$, мы получаем, что $\varrho_1=\varrho_1'$, $\varrho_2=\varrho_2'$.

Введем в F следующее бинарное отношение: $x_1\sigma_1+x_2\sigma_2 \equiv x_1\tau_1+x_2\tau_2$ тогда и только тогда, если $\sigma_1+\sigma_2=\tau_1+\tau_2$. Из аксиом полумодуля вытекает, что это отношение определяет конгруэнцию $\varkappa$ в F. В классе $\mathfrak{N}$, эквивалентном классу $\mathfrak{A}$, выполняется условие II'. Принимая во внимание, что $x_1 \equiv x_2$, ибо $x_1=x_1 1+x_2\mathbf{0}$, $x_2=x_1\mathbf{0}+x_2 1$, мы видим, что нулевой класс конгруэнции $\varkappa$ содержит ненулевой элемент, в противном случае $\varkappa$ оказалась бы тривиальной в силу II'. Поэтому существует такой элемент $x_1\tau_1+x_2\tau_2 \in F$, что $x_1\tau_1+x_2\tau_2 \equiv 0$, но $x_1\tau_1+x_2\tau_2 \neq 0$. Таким образом, существуют такие $\tau_1, \tau_2 \in R$, что $\tau_1+\tau_2=0$, притом они отличны от нуля, поскольку $\tau_1=0$ влечет за собой $\tau_2=0$, откуда $x_1\tau_1+x_2\tau_2=0$ вопреки предположению. Следовательно, в полукольце R существуют ненулевые элементы, обладающие противоположными элементами относительно сложения. Совокупность всех таких элементов образует подкольцо R_1 в R, являющееся в нем даже (двусторонним) идеалом. Покажем, что $R_1=R$.

Допустим, что это не так, т. е. $R_1 \subset R$ и элементы из R, не принадлежащие к R_1, не имеют противоположного элемента. Рассмотрим в R смежные классы $R_1+\varrho (\varrho \in R)$. Если $\varrho_1+\varrho=\varrho_1'+\varrho'$, $(\varrho_1, \varrho_1' \in R_1$, $\varrho, \varrho' \in R)$, то $\varrho=(-\varrho_1+\varrho_1')+\varrho'$, а поэтому $R_1+\varrho=R_1+(-\varrho_1+\varrho_1')+\varrho'=R_1+\varrho'$, откуда следует, что если два смежных класса имеют общий элемент, то они совпадают. Итак, эти классы осуществляют разбиение полукольца R, которое, очевидно, является и конгруэнцией в R. Поскольку нулевой класс этой конгруэнции есть R_1, то полученное факторполукольцо мы можем обозначать через R/R_1; его единицей служит R_1+1.

Рассмотрим примитивный класс всех правых унитарных R/R_1-полумодулей. Каждый R/R_1-полумодуль естественным образом можно рассматривать как R-полумодуль и при этом конгруэнции в нем остаются те же самые. Поэтому примитивный класс всех правых унитарных R/R_1-полумодулей удовлетворяет условию II', справедливость же условий I и V вытекает из теоремы 1. Повторением предыдущего процесса мы получим, что R/R_1 содержит ненулевое подкольцо R_2/R_1, где R_2 — соответствующее подполукольцо в R. Пусть $\varrho_2 \in R_2$, $\varrho_2 \notin R_1$. Тогда существует $\varrho_2' \in R_2$, для которого $\varrho_2+\varrho_2'=\varrho_1 \in R_1$. Мы видим, что $\varrho_2+(\varrho_2'-\varrho_1)=0$, т. е. ϱ_2 обладает противоположным элементом, что противоречит предположению.

Мы видим, что R является кольцом, а поэтому единица из R имеет противоположный элемент. Рассмотрим в $\mathfrak{R}$ операцию $xyz\omega = x + y(-1) + z$. Тождественно имеет место $xxz\omega = zxx\omega = z$. Берем операцию ω' из $\mathfrak{A}$, соответствующую ω при отображении операций, определяющем эквивалентность между $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}$. Согласно лемме 1 из [3], в $\mathfrak{A}$ тождественно $xxz\omega' = zxx\omega' = z$. По теореме 4 из [1] это равносильно тому, что в $\mathfrak{A}$ выполняется IV.

(D) влечет (A). Класс $\mathfrak{A}$ со свойством (D) эквивалентен примитивному классу $\mathfrak{R}$ всех правых унитарных полумодулей над некоторым полукольцом с единицей R. Из выполнения IV следует, по [1], существование в $\mathfrak{A}$, а также в $\mathfrak{R}$, тернарных операций ω', соответственно ω с тождеством $xxz\omega = zxx\omega = z$. Как упомянуто при доказательстве теоремы 1, ω разлагается следующим образом: $xyz\omega = x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3$. Здесь ω_i $(i = 1, 2, 3)$ — элементы из R, что показывается таким же путем, как и в доказательстве теоремы 2 из [3]. Тогда, пользуясь тождеством (2) и тем, что R само является правым унитарным R-полумодулем, получим:

$$1 + \omega_2 = 1 + 1\omega_2 = 100\omega + 010\omega = (1+0)(0+1)(0+0)\omega = 110\omega = 0.$$

Значит 1, а вместе с ней и каждый элемент из R, имеет противоположный элемент, т. е. R — кольцо. Учитывая, что система аксиом унитарного полумодуля содержит систему аксиом унитарного модуля, мы видим, что $\mathfrak{R}$ есть примитивный класс всех правых унитарных R-модулей. Теорема доказана.

Поскольку эквивалентность примитивных классов является транзитивной, из теоремы 2 и из теоремы 2 работы [3] вытекает

Следствие. Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда эквивалентен некоторому примитивному классу абелевых Ω-групп, если для $\mathfrak{A}$ верно какое-либо из утверждений (A), (B), (C) и (D).

Отметим, что системы условий в утверждениях (B), (C), (D) являются минимальными в том смысле, что ни в одной из них нельзя вычеркнуть ни одного из условий II′, III, IV, V. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что в примитивном классе всех групп выполняются I, II′, IV, но не выполняются III, V; в примитивном классе всех коммутативных полугрупп с единицей выполняются I, V, но не выполняются II′, IV; наконец, в примитивном классе всех полугрупп с тождественным соотношением $x_1x_2 = x_3x_4$ выполняется I, III, но не выполняется II′.

Отметим также, что в результате Шоды [4], цитированном и в § 5 работы [3], условие нормальности рассматриваемого примитивного класса оказывается излишним, так как оно является следствием условий I, II′, III.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Мальцев, К общей теории алгебраических систем, Мат. Сборник, **35** (77) (1954), 3—20.

[2] А. А. Терехов, Об алгебрах с совпадающими прямыми и свободными произведениями, Ученые зап. Ивановского Гос. Пед. Ин-та, **18** (1958), 61—66.

[3] Б. Чакань, Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 46—57.

[4] K. Shoda, Bemerkungen über die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung, *Proc. Japan Acad.*, **31** (1955), 128—130.

[5] R. Sikorski, Products of abstract algebras, *Fund. Math.*, **39** (1952), 211—228.

(Поступило 2/I/1962)