# Über die Konvergenz von Partialsummen der Orthogonalreihen

Von L. LEINDLER in Szeged und L. G. PÁL in Budapest

**1.** Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem und $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge mit $\sum a^2 < \infty$. A. N. KOLMOGOROFF hat den folgenden Satz bewiesen [1]:

*Ist die Orthogonalreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

*fast überall* $(C, 1)$*-summierbar, so ist die Folge der Partialsummen*

$$s_{2^n}(x) = \sum_{\nu=0}^{2^n} a_\nu \varphi_\nu(x) \tag{2}$$

*fast überall konvergent.*

Wenn man voraussetzt, daß die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ „im wesentlichen monoton abnehmend" ist, dann kann man die entsprechende Aussage über einen allgemeineren Typus von Teilfolgen behaupten. Diese Teilfolgen sind — im Gegensatz zu (2) — nicht mehr stark lückenhaft.[1]) Es gilt nämlich der folgende Satz von K. TANDORI [2]:

*Es sei* $N(\geqq 1)$ *eine beliebig angegebene natürliche Zahl. Mit* $\{n_k\}$ *wird die (wachsend angeordnete) Folge derjenigen natürlichen Zahlen bezeichnet, die in der Form*

$$n_k = 2^{\nu_1} \pm 2^{\nu_2} \pm \dots \pm 2^{\nu_r} \tag{3}$$

*mit ganzzahligen Exponenten* $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_r \geqq 0$ $(1 \leqq r \leqq N)$ *aufgeschrieben werden können. Sind die Bedingungen*

$$c_n \geqq c_{n+1} (>0), \quad \Sigma c_n^2 < \infty, \quad a_n = O(c_n) \tag{4}$$

*erfüllt, und ist die Reihe* (1) *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar, so konvergiert die Folge der* $n_k$*-ten Partialsummen der Reihe* (1) *fast überall.*

**2.** In dieser Note geben wir eine einfache Bedingung dafür, daß die im Tandorischen Satz auftretende Folge $\{s_{n_k}\}$ auch in dem Fall fast überall konvergent sei, wenn wir über die Monotonität der Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ gar nichts voraussetzen.

---

[1]) Wir nennen eine Indexfolge $\{\nu_n\}$ stark lückenhaft, wenn für jedes $n$ $\dfrac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqq q > 1$ gilt.

Satz. *Ist*

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 < \infty, \tag{5}$$

*so konvergiert die Teilfolge* $\{s_{n_k}(x)\}$ *der Partialsummen der Orthogonalreihe* $\sum a_n\varphi_n(x)$ *fast überall.*

Beweis. Auf Grund der Bedingung (5) ist die Orthogonalreihe (1) fast überall $(C, 1)$-summierbar [3], [4]. Nach dem genannten Kolmogoroffschen Satz konvergiert also die Teilfolge der Partialsummen $\{s_{2^\nu}(x)\}$ fast überall.

Betrachten wir nun die wachsend angeordnete Folge der Zahlen (3), und es sei $\{k_\nu\}$ diejenige Teilfolge der Indices $\{k\}$ für welche

$$n_{k_\nu} = 2^\nu.$$

Unter Benützung dieser Schreibweise können wir also sagen, daß die Folge

$$s_{n_{k_\nu}}(x) = \sum_{\varrho=0}^{n_{k_\nu}} a_\varrho \varphi_\varrho(x)$$

fast überall konvergent ist, und daher haben wir nur die folgende Aussage zu prüfen:
Wenn $i$ ein beliebiger Index zwischen $k_\nu$ und $k_{\nu+1}$ ist, dann besteht für $\nu\to\infty$ die Relation

$$s_{n_i}(x) - s_{n_{k_\nu}}(x) = o_x(1)$$

fast überall.
Zu diesem Zweck bilden wir für jedes $\nu$ die folgende Summe:

$$\begin{aligned}\sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} \left(s_{n_i}(x) - s_{n_{i-1}}(x)\right) &= \sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} \sum_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} a_l\varphi_l(x) = \\ = \sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} \sqrt{\sum_{l=n_{i-1}+1}^{\nu_i} a_l^2} &\left\{ \frac{\sum\limits_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} a_l\varphi_l(x)}{\sqrt{\sum\limits_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} a_l^2}} \right\} \equiv \sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} C_i\Phi_i(x),\end{aligned} \tag{6}$$

wobei $\{\Phi_i(x)\}_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}}$ ein Orthonormalsystem in $[a, b]$ ist[3]). Nach dem bekannten Menchoffschen Lemma [5] existiert also für jedes $\nu$ eine nichtnegative Funktion $\delta_\nu(x)$, durch welche alle Abschnitte der Summe (6) dem Betrage nach majorisiert werden, d. h. für welche

$$|s_{n_i}(x) - s_{n_{k_\nu}}(x)| \leqq \delta_\nu(x) \tag{7}$$

[3]) Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für jedes $i$ die Summe $\sum\limits_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} a_l^2$ positiv ist.

für alle $i$ zwischen $k_\nu$ und $k_{\nu+1}$ ist, und gleichzeitig gilt:

$$\int_a^b \delta_\nu^2(x)\,d\mu(x) = O\big(\log^2(k_{\nu+1}-k_\nu)\big) \sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} C_i^2 = \tag{8}$$

$$= O\big(\log^2(k_{\nu+1}-k_\nu)\big) \sum_{i=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} \sum_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} a_l^2 = O\big(\log^2(k_{\nu+1}-k_\nu)\big) \sum_{\varrho=n_{k_\nu}+1}^{n_{k_{\nu+1}}} a_\varrho^2 =$$

$$= O\big(\log^2(k_{\nu+1}-k_\nu)\big) \sum_{\varrho=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} a_\varrho^2.$$

Beachten wir aber, daß die Differenz $(k_{\nu+1}-k_\nu)$ — also die Anzahl derjenigen Elemente der Folge (3), die zwischen $2^\nu$ und $2^{\nu+1}$ liegen — höchstens gleich der Potenz $\nu^N$ ist, so bekommen wir aus (8) die folgende Abschätzung:

$$\int_a^b \delta_\nu^2(x)\,d\mu(x) = O(1)(\log \nu^N)^2 \sum_{\varrho=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} a_\varrho^2 =$$

$$= O(1)(N\cdot\log\nu)^2 \sum_{\varrho=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} a_\varrho^2 = O(1)(\log\log 2^\nu)^2 \sum_{\varrho=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} a_\varrho^2.$$

Aus dieser Relation ergibt sich unmittelbar, daß wegen unserer Bedingung (5)

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \int_a^b \delta_\nu^2(x)\,d\mu(x) = O(1) \sum_{\nu=2}^{\infty} (\log\log 2^\nu)^2 \sum_{\varrho=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} a_\varrho^2 =$$

$$= O(1) \sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$$

gilt, und daher nach dem Beppo Levischen Satz $\sum \delta_\nu^2(x)$ fast überall konvergiert; also fast überall

$$\delta_\nu(x) = o_x(1) \qquad (\nu\to\infty)$$

gilt. Diese Relation liefert aber zusammen mit (7) die Richtigkeit unserer Behauptung.

## Literaturverzeichnis

[1] A. N. Kolmogoroff, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

[2] K. Tandori, Bemerkung zu einem Satz von A. N. Kolmogoroff, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 133—135.

[3] D. Menchoff, Sur la sommation des séries orthogonales, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **180** (1925), 2011—2013.

[4] S. Kaczmarz, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.

[5] D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales. I, *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105.

*(Eingegangen am 24. Oktober 1962)*