О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ АВТОМАТОВ. I

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)*

В настоящей статье исследуется вопрос о вложимости конечного множества частично упорядоченных автоматов в произведение автоматов в смысле В. М. Глушкова. Полученный результат обобщает одну теорему Й. Хартманиса, относяшуюся к некоторому частному виду произведения автоматов.

Относительно терминологии мы ссылаемся на работу [1] Глушкова. Автомат $\mathbf{A}(A, X, Y, \delta, \lambda)$ мы назовем упорядоченным, если множества его входных сигналов, выходных сигналов и состояний — упорядочены, и выполняются следующие условия:

a) если $x_1 \geqq x_2$, то $\delta(a, x_1) \geqq \delta(a, x_2)$; $x_1, x_2 \in X, a \in A$ произвольные,

b) если $a_1 \geqq a_2$, то $\delta(a_1, x) \geqq \delta(a_2, x)$; $a_1, a_2 \in A, x \in X$ произвольные,

c) если $a_1 \geqq a_2$, то $\lambda(a_1) \geqq \lambda(a_2)$.

В дальнейшем, говоря об автомате, мы всегда будем подразумевать упорядоченный автомат.

Пусть дано множество произвольных конечных автоматов $\mathbf{A}_i(A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. В соглащение с терминологией Глушкова произведением этих автоматов мы называем автомат $\mathbf{A}$, с множеством состояний $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$, где отношение упорядоченности на множестве A задается следующим образом:

$$a[=(a_1, a_2, \ldots, a_k)] \geqq a'[=(a_1', a_2', \ldots, a_k')],$$

если для всех пар a_i, a_i' имеет место неравенство $a_i \geqq a_i'$. Упорядочение входных сигналов в $\mathbf{A}$ — произвольно. Функция обратной связи $\varphi: A \times X \to X_1 \times \ldots \times X_k$ подчиняется следующим условиям:

1) если $x \geqq x' (\in X)$, то $\varphi(a_1, \ldots, a_k, x) \geqq \varphi(a_1, \ldots, a_k, x')$,

2) если $(a_1, \ldots, a_k) \geqq (a_1', \ldots, a_k')$, то $\varphi(a_1, \ldots, a_k, x) \geqq \varphi(a_1', \ldots, a_k', x)$.

($X_1 \times \ldots \times X_k$ упорядочено аналогично множеству $A_1 \times \ldots \times A_k$). Функция δ перехода автомата $\mathbf{A}$ определена обычным путем: $\delta(a, x) = (\delta_1(a_1, x_1), \ldots, \ldots, \delta_k(a_k, x_k))$, где $a = (a_1, \ldots, a_k)$ и $(x_1, \ldots, x_k) = \varphi(a_1, \ldots, a_k, x)$. Наконец, упорядочение множества Y выходных сигналов автомата $\mathbf{A}$ — такое, что $a \geqq a'$ влечет $\lambda(a) \geqq \lambda(a')$.

---

* F. GÉCSEG (Szeged)

Будем пользоваться следующими обозначениями: если π — произвольное разбиение множества M, $a, a' \in M$ и a, a' содержится в одном и том же классе по разбиению π, то мы пишем: $a' \equiv a(\pi)$. Допустимым разбиением произвольного автомата мы называем разбиение этого автомата, при котором из $a \equiv a'(\pi)$ следует $\delta(a, x) \equiv \delta(a', x)(\pi)$ и если $a \leqq b$, $a \equiv a'(\pi)$, $b \equiv b'(\pi)$, то не может выполняться $a' > b'$. В этом случае мы пишем $\pi(a) \leqq \pi(b)$, где $\pi(a)$ — множество всех таких элементов a', для которых имеет место $a \equiv a'(\pi)$.

Рассмотрим конечное множество автоматов $\mathbf{A}_j (j=1, \ldots, k)$ с отношением частичной упорядоченности R. Обозначим через $P(\mathbf{A}_i)$ множество, состоящее из всех автоматов из множества $\{\mathbf{A}_j\}$, которые больше автомата $\mathbf{A}_i$, и из самого автомата $\mathbf{A}_i$. Произведение $\mathbf{A}$ автоматов $\mathbf{A}_j$ мы назовем их R-произведением, если для функции φ обратной связи выполняются 1), 2) и

3) если $\varphi(a_1, \ldots, a_k, x) = (x_1, \ldots, x_k)$, то $x_i = \varphi_i(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}, a_i, x)$, где $\mathbf{A}_{i_1}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$ — все автоматы, которые больше автомата $\mathbf{A}_i$.

Рассмотрим конечные множества $\{\mathbf{M}_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ соотв. $\{\mathbf{A}_j\}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ произвольных автоматов. Мы говорим, что множество $\{\mathbf{M}_i\}$ представимо множеством $\{\mathbf{A}_j\}$, если существует такое R-произведение автоматов $\mathbf{A}_j$, которое для всех i содержит в качестве подавтомата автомат, изоморфный автомату $\mathbf{M}_i$.

Имеет место

Теорема 1. Если множество $M = \{\mathbf{M}_r\}$ $(r=1, \ldots, n)$ представляется R-произведением $\mathbf{A}$ автоматов $\mathbf{A}_i$ $(i=1, \ldots, k)$, то каждое множество $P(\mathbf{A}_i)$ индуцирует допустимое разбиение π_{r_i} каждого автомата $\mathbf{M}_r$, где состояния из $\mathbf{M}_r$ тогда и только тогда содержатся в одном и том же класса разбиения π_{r_i}, если компоненты их образов в данном изоморфизме вложения $\mathbf{M}_r$ в $\mathbf{A}$, взятые из любого $\mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i)$, совпадают. Если $\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{A}_j$, то разбиение с индуцирующим множеством $P(\mathbf{A}_i)$ больше разбиения, индуцирующегося множеством $P(\mathbf{A}_j)$. Пересечение всех таких разбиений в $\mathbf{M}_r$ является тривиальным.

Обратно, пусть даны допустимые разбиения $\pi_{r_1}, \ldots, \pi_{r_{l_r}}$ в автоматах $\mathbf{M}_r$ $(r=1, \ldots, n)$, пересечение которых является тривиальным. Рассмотрим множество разбиений $\pi_{r_1}, \ldots, \pi_{r_{l_r}}, \pi_{r_0}$, дге π_{r_0} — разбиение автомата $\mathbf{M}_r$, для которого имеет место $m \equiv m'(\pi_{r_0})$ для всех $m, m' \in \mathbf{M}_r$. Тогда существуют конечное множество автоматов $\{A_i\}$ $(i=1. \ldots, k)$ и упорядочение R этого множества, такие, что каждый $\mathbf{M}_r$ представляется некоторым R-произведением автоматов $\mathbf{A}_i$, причем каждому разбиению π_{r_i} соответствует некоторое $\mathbf{A}_i$ так, что разбиение в $\mathbf{M}_r$, индуцирующееся множеством $P(\mathbf{A}_i)$, совпадает с π_{r_i}. Далее, каждое $P(\mathbf{A}_i)$ индуцирует некоторое π_{r_i} во всех автоматах $\mathbf{M}_r$. $\pi_{r_i} \geqq \pi_{r_j}$, если для индуцирующих $P(\mathbf{A}_i)$ и $P(\mathbf{A}_j)$ имеет место $\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{A}_j$.

Доказательство. Пусть дано множество автоматов $\{\mathbf{M}_r\}$ $(r=1, \dots, n)$ и множество автоматов $\{\mathbf{A}_i\}$ $(i=1, \dots, k)$ с (частичным) упорядочением R. Рассмотрим R-произведение $\mathbf{A}$ автоматов $\mathbf{A}_i$, в котором все автоматы $\mathbf{M}_r$ изоморфно вложены. Берем такие разбиения π_i автомата $\mathbf{M}_r$, что $m_r \equiv m'_r(\pi_i)$ $(m_r, m'_r \in \mathbf{M}_r)$, если компоненты их образов в $\mathbf{A}$, содержащиеся в $\mathbf{A}_j$ $(\mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i))$, совпадают. Покажем, что эти разбиения допустимы. С одной стороны, если $m_r \equiv m'_r(\pi_i)$, то $\delta_r(m_r, x_r) \equiv \delta_r(m'_r, x_r)(\pi_i)$ $(x_r \in X_r)$. Действительно, пусть χ_r изоморфизм автомата $\mathbf{M}_r$ в $\mathbf{A}$:

$$\chi_r(m_r) = (\dots, a_j, \dots, a_k, \dots) \ (a_j \in A_j, \ \mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i)).$$

$$\chi_r(m'_r) = (\dots, a_j, \dots, a'_k, \dots) \ (a_k, a'_k \in A_k, \ \mathbf{A}_k \notin P(\mathbf{A}_i)).$$

Тогда

$$\delta(\dots, a_j, \dots, a_k, \chi_r(x_r)) = (\dots, \delta_j(a_j, x_j), \dots, \delta_k(a_k, x_k), \dots),$$

$$\delta(\dots, a_j, \dots, a'_k, \chi_r(x_r)) = (\dots, \delta_j(a_j, x'_j), \dots, \delta_k(a'_k, x'_k), \dots),$$

где

$$(\dots, x_j, \dots, x_k, \dots) = \varphi(\dots, a_j, \dots, a_k, \dots, \chi_r(x_r)),$$

$$(\dots, x'_j, \dots, x'_k, \dots) = \varphi(\dots, a_j, \dots, a'_k, \dots, \chi_r(x_r)).$$

Но, по определению R-произведения, $x_j = x'_j$.

Если класс C_i по разбиению π_i определяется элементами a_j $(\in A_j, \mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i))$, и класс C'_i элементами a_j^*, то имеет место один из следующих утверждений:

α) можно найти такое j $(\mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i))$, что элемент a_j не находится в отношении упорядоченности с элементом a_j^*.

Если все a_j $(\in A_j, \mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i))$ находятся в отношении упорядоченности с соответствующими элементами a_j^*, то

β) найдутся такие j и l, $(\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_l \in P(\mathbf{A}_i))$, что $a_j > a_j^*$, $a_l < a_l^*$;

γ) для всех j $(\mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i))$: $a_j \geqq a_j^*$;

δ) для всех j $(\mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i))$: $a_j \leqq a_j^*$.

Очевидно, в случаях α) и β) ни один элемент из C_i не находится в отношении упорядоченности ни с одним элементом из C'_i.

В случае γ) соотв. δ) произвольный элемент из класса C_i не меньше (соотв. не больше) любого элемента из класса C'_i.

Этим доказано, что разбиения π_i — допустимы.

Пусть теперь $\mathbf{A}_i \leqq \mathbf{A}_j$. Тогда $m_r \equiv m'_r(\pi_i)$ влечет $m_r \equiv m'_r(\pi_j)$, т. е. $\pi_i \leqq \pi_j$.

Остается показать, что пересечение π этих допустимых разбиений является тривиальным. Предположим, что π обладает таким классом, который содержит два различных состояния m_r и m_r'. Но в этом случае $\chi_r(m_r) = \chi_r(m_r')$, вопреки предположению, согласно которому χ_r — изоморфизмы. Этим первая часть теоремы доказана.

Для дальнейших предпосылаем несколько определений. Мы говорим, что состояние a автомата $\mathbf{A}$ — изолированное, если любое из $a \leqq b$ и $a \geqq b$ влечет за собой $b = a$.

Рассмотрим множество M_i $(i = 1, \ldots, k)$ и некоторое его частичное упорядочение R. Мы говорим, что M_i опередит M_j, если $M_i > M_j$, но ни с каким $M_k (\in \{M_i\})$ не выполняется $M_i > M_k > M_j$.

Теперь рассмотрим конечное множество M таких автоматов $\mathbf{M}_r$ $(r = 1, \ldots, n)$, что каждый автомат $\mathbf{M}_r$ из M обладает разбиениями $\pi_{r_1}, \ldots, \pi_{r_{i_r}}$, пересечение которых является тривиальным.

Покажем, что можно найти конечное множество $\{\mathbf{A}_i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ таких автоматов и такое упорядочение R этого множества, чтобы M представлялся некоторым R-произведением автоматов $\mathbf{A}_i$.

Рассмотрим произвольный автомат $\mathbf{M}_r$ (из M) и некоторое допустимое разбиение π_r этого автомата. Тогда можно конструировать автоматы $\mathbf{M}_{\pi_r}$, множество входных сигналов которых есть $(\pi_{r_i}(m_{r_i}), \ldots, \pi_{r_j}(m_{r_j}), x_r)$, где $\pi_{r_i}, \ldots, \pi_{r_j}$ — все допустимые разбиения, опережающие разбиение π_r, а $x_r (\in X_r)$ — произвольно. Множествами состояний (и выходных сигналов) служат классы автомата $\mathbf{M}_r$ по разбиению π_r. Функция перехода автомата $\mathbf{M}_{\pi_r}$ определяется следующим образом:

Обозначим через $T = \{\pi_{r_1}, \ldots, \pi_{r_{i_r}}\}$ множество заданных разбиений автомата $\mathbf{M}_r$. Далее, пусть T_1 — множество максимальных элементов множества T. Если $\pi_{r_k} \in T_1$, то $\delta_{r_k}(\pi_{r_k}(m_k), x_r) = \pi_{r_k}(\delta(m_k, x_r))$. Пусть T_2 — множество максимальных элементов множества $T - T_1$, и $\pi_{r_j} \in T_2$. Если теперь $\pi_{r_j}(m)$ — изолированное и существуют такие классы $\pi_{r_k}(m_k')$, ... (по всеми разбиениями, опережающими разбиение π_{r_j}), что $\delta_{r_k}(\pi_{r_k}(m_k', x_r)) = \pi_{r_k}(m_k)$, ... и для всех таких классов $\bigcap \pi_{r_k}(m_k') = a_k \neq \varnothing$, $\pi_{r_k}(m_k'), \pi_{r_k}(m_k), \ldots$ — изолированные и $\pi_{r_j}(m) \subseteq a_k$,[1] то мы выберем произвольный класс $\pi_{r_j}(m')$ из некоторого a_k и положим в этом случае

$$\delta_{r_j}(\pi_{r_j}(m), (\pi_{r_k}(m_k), \ldots, x_r)) = \pi_{r_j}(\delta_r(m', x_r)),$$

[1]) Если подставляя x_r' в место x_r получаются эти же соотношения, то пусть

$$\delta_{r_j}(\pi_{r_j}(m), (\pi_{r_k}(m_k), \ldots, x_r')) = \pi_{r_j}(\delta_r(m', x_r'))$$

соотв.

$$\delta_{r_i}(\pi_{r_i}(m_i), (\pi_{r_j}(m_j), \ldots, x_r')) = \pi_{r_i}(\delta_r(m_i', x_r')).$$

а во всех остальных случаях

$$\delta_{r_j}(\pi_{r_j}(m), (\pi_{r_k}(m_k), \ldots, x_r)) = \pi_{r_j}(\delta_r(m, x_r)).$$

Теперь обозначим через T_3 множество максимальных элементов множества $T-(T_1+T_2)$. Пусть $\pi_{r_i}(\in T_3)$ — произвольно. Если $\pi_{r_i}(m_i)$ — изолированный и существуют такие классы $\pi_{r_j}(m'_j)$, ... (по всеми разбиениями, опережающими разбиение π_{r_i}), что

$$\delta_{r_j}(\pi_{r_j}(m'_j), (\pi_{r_k}(m'_k), \ldots, x_r)) = \pi_{r_j}(m_j), \ldots$$

и для всех таких классов $\bigcap \pi_{r_j}(m'_j) = a_j \neq \varnothing, \pi_{r_j}(m'_j), \pi_{r_j}(m_j), \ldots$ — изолированные и $\pi_{r_i}(m_i) \subseteq a_j$, (см. сноску[1]), то мы выберем произвольный класс $\pi_{r_i}(m'_i)$ из некоторого a_j. В этом случае пусть

$$\delta_{r_i}(\pi_{r_i}(m_i), (\pi_{r_j}(m_j), \ldots, x_r)) = \pi_{r_i}(\delta_r(m'_i, x_r))$$

и

$$\delta_{r_i}(\pi_{r_i}(m_i), (\pi_{r_j}(m_j), \ldots, x_r)) = \pi_{r_i}(\delta_r(m_i, x_r))$$

во всех остальных случаях.

Продолжая этот процесс, мы конструируем автоматы для всех разбиений π_{r_k}. Упорядочение множества входных сигналов автомата $\mathbf{M}_{\pi_r}$ мы определим так: $(\pi_{r_i}(m_{r_i}), \ldots, x_r) \geqq (\pi_{r_i}(m'_{r_i}), \ldots, x'_r)$, тогда и только тогда, если $\pi_{r_i}(m_{r_i}) \geqq \pi_{r_i}(m'_{r_i})$ и $x_r \geqq x'_r$. Упорядочение множества состояний соотв. выходных сигналов определяется естественным образом.

Множество входных сигналов соотв. состояний мы дополним с входным сигналом x_{π_r} соотв. состоянием a_{π_r}, для которых $\delta_{\pi_r}(\pi_r(m_r), x_{\pi_r}) = \pi_r(m_r)$ и $\delta_{\pi_r}(a_{\pi_r}, x) = a_{\pi_r}$, где $(m_r \in \mathbf{M}_r)$ состояние $\pi_r(m_r)$ и входный сигнал x автомата $\mathbf{M}_{\pi_r}$ — произвольны.

Рассмотрим множество M' автоматов $\mathbf{M}_{\pi_r}$, для всех r. Мы вводим в M' отношение частичной упорядоченности R: $\mathbf{M}_{\pi_r} \geqq \mathbf{M}_{\pi'_r}$ тогда и только тогда, если $\pi_r \geqq \pi'_r$. Сконструируем R-произведение $\mathbf{A}$ этих автоматов: множеством входных сигналов автомата $\mathbf{A}$ является объединение множеств входных сигналов автоматов $\mathbf{M}_{\pi_r}$, а множеством выходных сигналов — обединение множеств выходных сигналов автоматов $\mathbf{M}_{\pi_r}$ с множеством N всех состояний из $\mathbf{A}$, содержащих такие компоненты $\pi_{r_1}(m_1), \ldots, \pi_{r_{i_r}}(m_{i_r})$, для которых $\pi_{r_1}(m_1) \cap \ldots \cap \pi_{r_{i_r}}(m_{i_r}) = \varnothing$, или такой компонент $\pi_n(m_n)$ $(n \neq r_j;\ j=1, \ldots, i_r)$, что $\pi_n(m_n) \neq a_{\pi_n}$.

Функция φ обратной связи автомата $\mathbf{A}$ — следующая:

$$\varphi(a, x_r) = \varphi(\ldots, \pi_{1_1}(m_{1_1}), \ldots; \ldots, \pi_{r_s}(m_{r_s})\ldots; \ldots, \pi_{n_t}(m_{n_t}), \ldots; x_r) =$$

$$= (\ldots, x_{\pi_{11}}, \ldots; \ldots; \ldots, \varphi_{r_s}(\pi_{j_k}(m_{j_k}), \ldots, x_r), \ldots; \ldots, x_{\pi_{n_t}}, \ldots),$$

где $\pi_{j_k}(m_{j_k})$ — произвольные состояния автоматов $\mathbf{M}_{\pi_{j_k}}$, большего автомата $\mathbf{M}_{\pi_{r_s}}$, а функции φ_i определены следующим образом:

Если $\pi_{r_k}(m_{r_k})$, ... — компоненты состояния a и $\pi_{r_k} \in T_1$, то $\varphi_{r_k}(x_r) = x_r$. Если $\pi_{r_j}(m_{r_j})$, ... — компоненты состояния a $(\pi_{r_j} \in T_2)$, опережены классами в a $\pi_{r_{ki}}(m_{r_{ki}})$, ..., то

$$\varphi_{r_j}(\pi_{r_{ki}}(m_{r_{ki}}), \ldots, x_r) = (\delta_{r_{ki}}(\pi_{r_{ki}}(m_{r_{ki}}), x_r), \ldots, x_r).$$

Если $\pi_{r_s}(m_{r_s})$, ... — компоненты состояния a $(\pi_{r_s} \in T_3)$, опережены классами в a $\pi_{r_{jl}}(m_{r_{jl}})$, ..., то

$$\varphi_{r_s}(\pi_{r_{jl}}(m_{r_{jl}}), \ldots; \ldots, \pi_{r_{ki_l}}(m_{r_{ki_l}}), \ldots; x_r) =$$
$$= \delta_{r_{jl}}(\pi_{r_{jl}}(m_{r_{jl}}), (\delta_{r_{ki_l}}(\pi_{r_{ki_l}}(m_{r_{ki_l}}), x_r), \ldots, x_r)),$$

и т. д.

Функцию выходов λ автомата **A** мы определим так:

$$\lambda(a) = \lambda(\ldots, \pi_{1_l}(m_{1_l}), \ldots; \ldots, \pi_{r_s}(m_{r_s}), \ldots; \ldots, \pi_{n_t}(m_{n_t})) = y_r$$

если $\pi_{1_l}(m_{1_l}) = a_{\pi_{1_l}}, \pi_{r_{s_1}}(m_{r_{s_1}}) \cap \ldots \cap \pi_{r_{s_k}}(m_{r_{s_k}}) = m_r$ и $\lambda_r(m_r) = y_r$, $\pi_{n_t}(m_{n_t}) = a_{n_{n_t}}$, а для всех остальных случаев

$$\lambda(a) = \lambda(\ldots, \pi_{1_l}(m_{1_l}), \ldots; \ldots, \pi_{r_s}(m_{r_s}), \ldots; \ldots, \pi_{n_t}(m_{n_t}), \ldots) = a.$$

Легко убедиться, что таким образом нами получен упорядоченный автомат **A**. В автомат **A** изоморфно вкладываются все автоматы $\mathbf{M}_r$, если мы поставим в соответствие входному сигналу x_r, состоянию m_r и выходному сигналу y_r автомата $\mathbf{M}_r$ входный сигнал x_r, состояние

$$a = (\ldots, a_{\pi_{1l}} \ldots; \ldots; \ldots, \pi_{r_1}(m_{r_1}), \ldots, \pi_{r_k}(m_{r_k}); \ldots, a_{\pi_{kt}}, \ldots)$$

для которого $\pi_{r_1}(m_{r_1}) \cap \ldots \cap \pi_{r_k}(m_{r_k}) = m_r$ и выходный сигнал y_r автомата **A**. Так как пересечение $\pi_{r_1} \cap \ldots \cap \pi_{r_k}$ совпадает с тривиальным разбиением, то рассматриваемое соответствие — взаимно однозначно. Легко видеть, что оно является и изоморфным.

Анализируя доказательство второй части теоремы 1, можно видеть, что в том случае, когда множество M состоит лишь из одного автомата $\mathbf{M}_1$, теорема 1 получит следующую форму:

Теорема 1'. Если автомат $\mathbf{M}_1$ представляется R-произведением **A** автоматов $\mathbf{A}_i$ $(i=1, \ldots, k)$, то каждое множество $P(\mathbf{A}_i)$ индуцирует допустимое разбиение π_{1i} автомата $\mathbf{M}_1$, где состояния из $\mathbf{M}_1$ тогда и только тогда содержатся в одном и том же класса разбиения π_{1i}, если компоненты их образов в данном изоморфизме вложения $\mathbf{M}_1$ в **A**, взятые из любого $\mathbf{A}_j \in P(\mathbf{A}_i)$, совпадают. Если $\mathbf{A}_i \geqslant \mathbf{A}_j$, то разбиение с индуцирующим множеством $P(\mathbf{A}_i)$ больше разбиения, индуцирующегося множеством $P(\mathbf{A}_j)$. Пересечение всех таких разбиений в $\mathbf{M}_1$ является тривиальным.

Обратно, пусть даны допустимые разбиения $\pi_{11}, \ldots, \pi_{1r}$ в автомате $\mathbf{M}_1$, пересечение которых является тривиальным.

Тогда существуют конечное множество автоматов $\{\mathbf{A}_i\}$ $(i=1,\dots,k)$ и упорядочение R этого множества, такие, что $\mathbf{M}_1$ представляется некоторым R-произведением автоматов $\mathbf{A}_i$, причем каждому разбиению π_{1i} соответствует некоторое $\mathbf{A}_i$ так, что разбиение в $\mathbf{M}_1$, индуцирующееся множеством $P(\mathbf{A}_i)$, совпадает с π_{1i}. $\pi_{1i} \leqq \pi_{1j}$, если для индуцирующих $P(\mathbf{A}_i)$ и $P(\mathbf{A}_j)$ имеет место $\mathbf{A}_i \leqq \mathbf{A}_j$.

Специалным случаем этой теоремы является теорема Хартманиса [2].

Прежде доказательства этого факта мы введем несколько определений. Пусть дано конечное множество автоматов $\{\mathbf{A}_i\}$ $(i=1, \dots, k)$. Рассмотрим на этом множестве бинарное отношение $\bar{R}:\mathbf{A}_i \bar{R} \mathbf{A}_j$; если произвольный выходный сигнал автомата $\mathbf{A}_i$ является входным сигналом автомата $\mathbf{A}_j$. Транзитивная оболочка этого отношения — частичная упорядоченность R. Если для некоторого автомата $\mathbf{A}_i$ не существует автомат из $\{\mathbf{A}_i\}$, опережающий его, то $\mathbf{A}_i$ называется максимальным. Если автомат $\mathbf{A}_k$ не опережает никакого автомата из $\{\mathbf{A}_i\}$, то $\mathbf{A}_k$ называется минимальным.

Теперь мы сформулируем условия, при которых теорема 1′ перейдет в теорему Хартманиса:

1) В автоматах $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{A}_i$ все входные сигналы, состояния и выходные сигналы — изолированы.

2) Множества X входных сигналов максимальных автоматов совпадают.

3) Множество X_i входных сигналов произвольного автомата $\mathbf{A}_i$ совпадает с множеством $Y_{j1} \times \dots \times Y_{jl} \times X$, где $Y_{j1}, \dots, Y_{jl}$ — множества выходных сигналов автоматов $\mathbf{A}_{j1}, \dots, \mathbf{A}_{jl}$, опережающие автомата $\mathbf{A}_i$,

4) R-произведение автоматов $\mathbf{A}_i$ $(i=1, \dots, k)$ является автоматом $\mathbf{A}$, множество входных сигналов (соотв. состояний) которого — множество X (соотв. $A_1 \times \dots \times A_k$). А относительно функции φ обратной связи мы имеем:

$$\varphi(\dots; a_{i1}, \dots, a_{ir}, a_i, \dots, a_k, x) = (x_1, \dots, x_k),$$

где $$x_i = \varphi_i(a_{i1}, \dots, a_{ir}); \; a_{i1} \in \mathbf{A}_{i1}, \dots, a_{ir} \in \mathbf{A}_{ir},$$

где $\mathbf{A}_{i1}, \dots, \mathbf{A}_{ir}$ — множество всех автоматов, опережающих автомат $\mathbf{A}_i$. Определение функции φ_i — аналогично определению функции φ_i, использованной при доказательства второй части теоремы 1.

Литература

[1] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи Матем. Наук*, **16** (1961), №5.

[2] J. Hartmanis, Loop-free structure of sequential machines, *Information and Control*, **1** (1962), 25—44.

(Поступило 24/XI. 1962 г.)