

## Zur Eindeutigkeit der Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen\*)

Von HEINZ GÜNTHER TILLMANN in Mainz (Deutschland)

Quantenmechanische Systeme und quantisierte Wellenfelder können beschrieben werden durch ein System  $\mathfrak{S} = \{P_\nu, Q_\nu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*\}^1$  von Operatoren in einem Hilbertschen Raum  $H$ . Dabei sollen  $P_\nu, Q_\nu$  hermitesche Operatoren sein, welche den „Kommutatorrelationen“

$$[P_\mu Q_\nu - Q_\nu P_\mu = -i\delta_{\nu\mu}I, \quad P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu = 0, \quad Q_\mu Q_\nu - Q_\nu Q_\mu = 0$$

genügen.  $\Psi_\lambda$  und  $\Psi_\lambda^*$  sind zueinander adjungierte Operatoren und sollen den „Anti-kommutatorrelationen“ genügen:

$$\Psi_\lambda \Psi_\lambda^* + \Psi_\lambda^* \Psi_\lambda = \delta_{\lambda\lambda}I, \quad \Psi_\lambda \Psi_\lambda + \Psi_\lambda^* \Psi_\lambda^* = 0.$$

Zu  $\mathfrak{S}$  hinzu tritt dann noch der Hamiltonoperator  $H$  des Systems, der gewöhnlich als Funktion der Operatoren aus  $\mathfrak{S}$  dargestellt wird und die zeitliche Veränderung der Observablen als infinitesimaler Operator beschreibt.

Die physikalisch sinnvollen Aussagen der Theorie, wie Übergangswahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte, lassen sich ausdrücken durch innere Produkte  $\langle B\varphi, \varphi' \rangle$  oder  $\langle B\varphi, \varphi \rangle$ , bleiben also bei unitären Transformationen

$$B \rightarrow UBU^*, \quad \varphi \rightarrow U\varphi$$

invariant.

Es ist deshalb die Frage von Interesse, ob durch die Vertauschungsrelationen (zusammen mit der Form des Hamiltonoperators als Funktion der Operatoren aus  $\mathfrak{S}$ ) die Theorie vollständig festgelegt und die Operatoren aus  $\mathfrak{S}$  etwa bis auf eine gemeinsame unitäre Transformation bestimmt sind, bzw. welche zusätzlichen Forderungen man dazu noch stellen muß.

Bekanntlich<sup>2)</sup> ist die Kommutatorrelation  $PQ - QP = -iI$  nicht durch Elemente einer Banachalgebra, also nicht durch beschränkte Operatoren im Hilbertraum lösbar. Man muß also zulassen, daß die  $P_\nu, Q_\nu$  unbeschränkte, hermitesche Operatoren sind. Es kann jedoch angenommen werden, daß  $P_\nu, Q_\nu$  abgeschlossene Opera-

\* Eine erste Fassung dieser Arbeit entstand 1954–55 während der Tätigkeit des Verfassers am University College Ibadan (Nigeria).

Herrn Prof. B. SZ.-NAGY danke ich sehr für eine eingehende Diskussion während seines Aufenthaltes in Heidelberg im Jahre 1961, welche den Anstoß zur jetzigen, erweiterten Fassung lieferte.

<sup>1)</sup> Vgl. etwa WENTZEL, *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder* (Wien, 1943), oder BOGOLJUBOV—SHIRKOV, *Introduction to the theory of quantized fields* (New York, 1959).

<sup>2)</sup> Vgl. H. WIELANDT [8] (Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit).

toren<sup>3)</sup> sind. Aber solche Operatoren können nicht im ganzen Hilbertraum  $\mathbf{H}$ , sondern nur in dichten Teilmannigfaltigkeiten von  $\mathbf{H}$  definiert sein. Daher erfordert die Kommutatorrelation eine Präzisierung, weil auf beiden Seiten der Gleichung Operatoren mit verschiedenen Definitionsbereichen stehen. Man könnte etwa fordern  $PQ\varphi - QP\varphi = -i\varphi$  für  $\varphi \in D(PQ) \cap D(QP)$ <sup>4)</sup>, d. h.

$$(\alpha) \quad (PQ - QP)^\sim = -iI.$$

Hieraus folgt für  $\varphi \in D(PQ) \cap D(QP)$ ,  $\varphi' \in D(P) \cap D(Q)$ :

$$(\beta) \quad \langle Q\varphi, P\varphi' \rangle - \langle P\varphi, Q\varphi' \rangle = -i\langle \varphi, \varphi' \rangle.$$

Alle Glieder in  $(\beta)$  sind aber auch für  $\varphi \in D(P) \cap D(Q)$  definiert und es erscheint als natürliche Präzisierung Kommutatorrelation zu verlangen, daß  $(\beta)$  auch für alle  $\varphi, \varphi' \in D(P) \cap D(Q)$  gültig ist.

In den physikalischen Theorien spielen ferner die Operatoren

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \quad \text{und} \quad A' = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \subset \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)^* = A^*$$

eine entscheidende Rolle. Es liegt nur nahe, daß man neben<sup>5)</sup>  $A^{**} = A^\sim = \{A^{**} | D(P) \cap D(Q)\}^\sim$  auch verlangt, daß  $A^*$  durch seine Werte auf  $D(P) \cap D(Q)$  schon vollständig bestimmt ist, nämlich

$$(\gamma) \quad A^* = \{A^* | D(P) \cap D(Q)\}^\sim = A'^\sim.$$

Unter diesen Voraussetzungen können wir zeigen (Theorem 1) daß  $P$  und  $Q$  im wesentlichen (d. h. bis auf unitäre Äquivalenz und direkte Summenbildung) eindeutig bestimmt sind.

Ein Beispiel zeigt, daß weder auf die Forderung  $A^* = A'^\sim$  verzichtet noch  $(\beta)$  durch  $(\alpha)$  ersetzt werden kann, ohne diese Eindeutigkeit aufzugeben.

Im Falle eines endlichen oder abzählbaren Systems  $\mathfrak{S}$  gilt ein ähnlicher Eindeutigkeitssatz (Theorem 3) unter den Voraussetzungen:

- a)  $P_\nu, Q_\nu$  erfüllen die Bedingungen  $(\beta)$  und  $(\gamma)$  (für jedes  $\nu$ );
- b)  $P_\nu$  und  $Q_\nu$  sind vertauschbar mit  $P_\mu, Q_\mu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  ( $\mu \neq \nu$ );
- c)  $\Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  erfüllen die „Antikommutatorrelationen“;

<sup>3)</sup> Ein Operator  $T$  heißt abgeschlossen, wenn sein Graph, d. h. die Menge aller Paare  $\{\varphi, T\varphi\}$  in  $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$  abgeschlossen ist. Gleichwertig damit ist die folgende Bedingung: Aus  $\varphi_n \rightarrow \varphi, T\varphi_n \rightarrow \tilde{\varphi}$  folgt  $\varphi \in D_T$  und  $T\varphi = \tilde{\varphi}$ . Ist  $T$  nicht abgeschlossen, der adjungierte Operator  $T^*$  dicht definiert, so ist  $T^\sim = T^{**}$  eine abgeschlossene Erweiterung von  $T$  und zwar diejenige mit kleinstem Definitionsbereich. Insbesondere ist für jeden hermiteschen (nicht notwendig beschränkten) Operator  $T$  die Abschliessung  $T^\sim = T^{**}$  ein abgeschlossener hermitescher Operator.

<sup>4)</sup> Den Definitionsbereich eines Operators  $T$  bezeichnen wir mit  $D_T$  oder auch mit  $D(T)$ . J. v. NEUMANN hat in [5] die durch die Unbeschränktheit der  $P, Q$  bedingte Problematik der Definitionsbereiche dadurch umgangen, daß er zu den durch die  $P$  bzw.  $Q$  erzeugten unitären Halbgruppen  $U(s) = e^{isP}, V(t) = e^{itQ}$  überging und die Vertauschungsrelation  $(\alpha^*) U(s)V(t) = e^{ist}V(t)U(s)$  benutzte. Der Übergang von (a) zu  $(\alpha^*)$  ist jedoch nur formal möglich. In [4] wurden kürzlich notwendige und hinreichende Zusatzbedingungen für einen strengen Übergang von (a) zu  $(\alpha^*)$  angegeben.

<sup>5)</sup>  $T/D_0$  ist die Einschränkung von  $T$  auf  $D_0$ , d. h. auf  $D_0 \cap D(T)$ .

d) es existiert ein „Vakuuzustand“  $\varphi_0$ ;

e) das System  $\mathfrak{S}$  ist irreduzibel<sup>6)</sup> in  $\mathbf{H}$ .

Auf die beiden letzten Forderungen kann verzichtet werden, falls  $\mathfrak{S}$  nur aus endlich vielen Paaren  $P_\nu, Q_\nu$  und  $\Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  besteht.

Im Falle eines Freiheitsgrades sind die früheren Resultate von F. RELICH [3] und J. DIXMIER [4] in unseren Ergebnissen enthalten (vgl. 7). Im Falle endlich vieler Freiheitsgrade erscheint unser Resultat besonders befriedigend, da wir für die Operatoren mit verschiedenen Indizes außer den Vertauschbarkeitsbedingungen keine weiteren Forderungen zu stellen brauchen, wie es etwa noch bei DIXMIER [4] nötig war.

### 1. Präzisierung der Kommutatorrelation $PQ - QP = -iI$

Da diese Relation nicht durch beschränkte Operatoren in einem Hilbertraum  $\mathbf{H}$  erfüllt werden kann, fordern wir

**1:**  $P, Q$  sind abgeschlossene, hermitesche Operatoren in einem Hilbertraum  $\mathbf{H}$ .  $D_P \cap D_Q$  ist dicht in  $\mathbf{H}$ .

Aus  $PQ\varphi - QP\varphi = -i\varphi$  folgt für alle  $\varphi' \in D_P \cap D_Q$ :

$$\langle Q\varphi, P\varphi' \rangle - \langle P\varphi, Q\varphi' \rangle = -i\langle \varphi, \varphi' \rangle.$$

Umgekehrt folgt hieraus wieder  $PQ\varphi - QP\varphi = -i\varphi$ , falls nur  $PQ\varphi$  und  $QP\varphi$  definiert sind. Alle hier auftretenden inneren Produkte sind aber für beliebige  $\varphi, \varphi' \in D_P \cap D_Q$  definiert. Als natürliche Präzisierung der Kommutatorrelation erscheint deshalb die Vertauschungsrelation

**2:**  $\langle Q\varphi, P\varphi' \rangle - \langle P\varphi, Q\varphi' \rangle = -i\langle \varphi, \varphi' \rangle$  für alle  $\varphi, \varphi' \in D_P \cap D_Q$ .

Ist  $D_0 := D_{PQ} \cap D_{QP}$  noch dicht in  $\mathbf{H}$ , so folgt aus **1** und **2**:

**2':**  $(PQ - QP)^\sim = -iI$ .

Wir setzen noch

$$(1) \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP), \quad A' = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP)$$

und mit  $Q_0 = Q|_{D_0}$ ,  $P_0 = P|_{D_0}$ :

$$(2) \quad A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0 + iP_0)^\sim, \quad A'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0 - iP_0)^\sim.$$

**Satz 1.**  $P, Q$  seien Operatoren, die den Bedingungen **1, 2** genügen. Dann gilt:  $A$  und  $A'$  sind abgeschlossene Operatoren und  $A' \subset A^*$ ;

$$(3) \quad A^*A + \frac{1}{2}I = A'^*A' - \frac{1}{2}I \supset \frac{1}{2}(Q^2 + P^2);$$

$$(4) \quad AA^* - \frac{1}{2}I \supset AA'_0 - \frac{1}{2}I \supset \frac{1}{2}(QQ_0 + PP_0).$$

<sup>6)</sup>  $\mathfrak{S}$  heißt irreduzibel, wenn es keinen echten Teilraum  $\mathbf{H}_0 \subset \mathbf{H}$  gibt, der alle Operatoren aus  $\mathfrak{S}$  reduziert. Dies ist äquivalent damit, daß es keine Projektion gibt, die mit allen Operatoren aus  $\mathfrak{S}$  vertauschbar ist.

Beweis. Für alle  $\varphi, \varphi' \in D_A = D_{A'} = D_P \cap D_Q$  gilt:

$$(5) \quad \langle A\varphi, A\varphi' \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle Q\varphi, Q\varphi' \rangle + \langle P\varphi, P\varphi' \rangle - i(\langle Q\varphi, P\varphi' \rangle - \langle P\varphi, Q\varphi' \rangle) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \langle Q\varphi, Q\varphi' \rangle + \langle Q\varphi, P\varphi' \rangle - \langle \varphi, \varphi' \rangle \} \quad \text{und analog}$$

$$(6) \quad \langle A'\varphi, A'\varphi' \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle Q\varphi, Q\varphi' \rangle + \langle P\varphi, P\varphi' \rangle + \langle \varphi, \varphi' \rangle \}, \quad \text{insbesondere}$$

$$(7) \quad \langle A'\varphi, A'\varphi' \rangle = \langle A\varphi, A\varphi' \rangle + \langle \varphi, \varphi' \rangle,$$

$$(8) \quad |A\varphi|^2 = \frac{1}{2} \{ |Q\varphi|^2 + |P\varphi|^2 - |\varphi|^2 \},$$

$$(9) \quad |A'\varphi|^2 = \frac{1}{2} \{ |Q\varphi|^2 + |P\varphi|^2 + |\varphi|^2 \}.$$

Da  $P$  und  $Q$  abgeschlossen sind, folgt aus (8) und (9) die Abgeschlossenheit von  $A$  und von  $A'$ . Da  $P$  und  $Q$  hermitesch sind, gilt

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q + iP)^* \supset \frac{1}{\sqrt{2}} (Q^* - iP^*) \supset \frac{1}{\sqrt{2}} (Q - iP) = A'.$$

Aus (7) folgt, daß  $A'^*A'$  und  $A^*A$  den gleichen Definitionsbereich haben und gilt:

$$A^*A + \frac{1}{2}I = A'^*A' - \frac{1}{2}I \supset \frac{1}{2}(Q^2 + P^2).$$

Da im Definitionsbereich von  $QQ_0 + PP_0$  gerade alle der Operatoren  $P^2, PQ, QP, Q^2$  definiert sind, folgt unmittelbar aus der Definition von  $A$  und  $A'$ :

$$AA^* - \frac{1}{2}I \supset AA'_0 - \frac{1}{2}I \supset \frac{1}{2}(QQ_0 + PP_0)$$

und damit (4). Wir stellen nun noch die zusätzliche Forderung:

$$3: (Q + iP)^* = \{ (Q + iP)^* | D_P \cap D_Q \} \sim \text{(d. h. } = (Q - iP)^* \text{)}.$$

Dies ist unter Voraussetzung von Satz 1 gleichwertig mit  $A' = A^*$ , und wir erhalten:<sup>7)</sup>

<sup>7)</sup> Aus 1 und 2' folgt bereits

$$A'_0 A'_0 - \frac{1}{2}I = A_0^* A_0 - \frac{1}{2}I \supset \frac{1}{2}(QQ_0 + PP_0) \subset AA'_0 - \frac{1}{2}I \subset AA^* - \frac{1}{2}I.$$

Satz 2 gilt also auch unter den Voraussetzungen 1 und 2' zusammen mit (3\*)  $A^* = (A^* | D_{PQ} \cap D_{QP}) \sim A'_0$ , oder mit (3\*\*)  $QQ_0 + PP_0$  ist wesentlich selbstadjungiert. Damit sind auch die Resultate von RELICH [6] und DIXMIER [1] in unserem Theorem 1 enthalten.

Es genügt jedoch nicht, 1, 2' und 3 vorauszusetzen, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$H = L^2(0,1), \quad Q\varphi(x) = x \cdot \varphi(x), \quad D_Q = H, \quad P\varphi(x) = -i \frac{d}{dx} \varphi(x),$$

$$D_P = \{ \varphi : \varphi, \varphi' \in L^2, \varphi(0) = \varphi(1) \}.$$

Dann sind  $P$  und  $Q$  selbstadjungiert und es gilt 1, 2', 3, aber  $D(A^*A) \neq D(AA^*)$ .

Zugleich folgt, daß 3 nicht aus 1 und 2 abgeleitet werden kann, denn schränkt man  $D_P$  durch die zusätzliche Bedingung  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  ein, so gilt 1 und 2, aber nicht 3.

Satz 2. Erfüllen  $P, Q$  die Forderungen 1, 2, 3, so gilt:

$$AA^* = A^*A + I.$$

Satz 3. Aus

$$(10) \quad AA^* = A^*A + I \quad (A \text{ abgeschlossen}),$$

folgt:  $B = AA^*$  hat ein rein diskretes Spektrum, bestehend aus den Eigenwerten  $\lambda_n = n + 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Diese haben alle die gleiche Vielfachheit.

Beweis. Es sei  $B = AA^* = A^*A + I$ .  $B$  ist selbstadjungiert und hat sein Spektrum in  $[1, \infty]$ . Sei  $\lambda_0$  aus dem Spektrum von  $B$  und  $B = \int \lambda dE_\lambda$  die kanonische Spektralzerlegung von  $B$ . Dann ist  $\{E_\lambda\}$  in der Umgebung von  $\lambda_0$  nicht konstant, es

gibt also normierte Vektoren  $\varphi_n$ , so daß  $\varphi_n = \left( E_{\lambda_0 + \frac{1}{n}} - E_{\lambda_0 - \frac{1}{n}} \right) \varphi_n$ ,  $B\varphi_n = \int_{\lambda_0 - \frac{1}{n}}^{\lambda_0 + \frac{1}{n}} \lambda dE_\lambda \varphi_n$ .

$\varphi_n$  liegt dann im Definitionsbereich von  $B^2$ , insbesondere existiert

$$(11) \quad BA\varphi_n = AA^*A\varphi_n = A(B - I)\varphi_n = (\lambda_0 - 1)A\varphi_n + A\varphi_n'$$

mit  $\varphi_n' = \int_{|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{n}} (\lambda - \lambda_0) dE_\lambda \varphi_n$ , also  $|\varphi_n'| \leq \frac{1}{n} |\varphi_n| = \frac{1}{n}$ ,

$$(12) \quad |A\varphi_n'|^2 = \langle A^*A\varphi_n', \varphi_n' \rangle = \langle (B - I)\varphi_n', \varphi_n' \rangle \leq \left( \lambda_0 + \frac{1}{n} - 1 \right) |\varphi_n'|^2 \leq \lambda_0 \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Aus (11), (12) folgt also

$$(13) \quad |BA\varphi_n - (\lambda_0 - 1)A\varphi_n| \rightarrow 0, \quad |\varphi_n| = 1.$$

Hat nun die Folge  $|A\varphi_n|$  eine positive untere Schranke, so gehört auch  $\lambda_0 - 1$  zum Spektrum von  $B$ . Existiert eine solche Schranke nicht, so gibt es eine Teilfolge  $\{\varphi_{n_k}\}$  für die  $|A\varphi_{n_k}|$  gegen Null strebt. Dann folgt aber aus

$$A\varphi_n|^2 = \langle A^*A\varphi_n, \varphi_n \rangle = \langle (B - I)\varphi_n, \varphi_n \rangle \leq \left( \lambda_0 - \frac{1}{n} - 1 \right) |\varphi_n|^2 = \lambda_0 - 1 - \frac{1}{n},$$

daß  $\lambda_0 = 1$  sein muß.

Alle Spektralwerte sind also natürliche Zahlen und mit  $\lambda_0 = k$  sind auch  $1, 2, \dots, k - 1$  Werte des Spektrums von  $B$ . Es sei nun  $\mathbf{H}_n$  der Eigenraum von  $B$  zum Eigenwert  $\lambda_n = n + 1$ . Dann bildet  $A$  den Eigenraum  $\mathbf{H}_n$  in  $\mathbf{H}_{n-1}$  ab und für  $n \geq 1$  ist diese Abbildung eineindeutig.  $A^*$  bildet  $\mathbf{H}_{n-1}$  eineindeutig in  $\mathbf{H}_n$  ab und aus  $AA^*\varphi = (n + 1)\varphi$ ,  $A^*A\varphi = n\varphi$  für jedes  $\varphi \in \mathbf{H}_n$  folgt, daß die Abbildungen  $A: \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbf{H}_{n-1}$ ,  $A^*: \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbf{H}_{n+1}$  Abbildungen „auf“ sind. Also haben alle Räume  $\mathbf{H}_n$  die gleiche Dimension, die wir mit  $m$  bezeichnen.

## 2. Eindeutigkeit der Operatoren $A, A^*, P, Q$

Wir setzen nun voraus, daß die Operatoren  $P, Q$  so beschaffen sind, daß die Operatoren  $A$  und  $A' = A^*$  aus (1) der Relation (10)

$$AA^* = A^*A + I.$$

genügen. Wir werden zeigen, daß dann der Hilbertraum  $\mathbf{H}$  in eine direkte orthogonale Summe  $\mathbf{H} = \bigoplus \mathbf{H}^{(\alpha)}$  von  $m$  Teilräumen  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  zerlegt werden kann, derart, daß  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  die Operatoren  $P, Q, A, A^*$  reduziert. Die Einschränkungen von  $P, Q$  auf  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  sind zu den Heisenberg-Schrödingerschen Operatoren unitär äquivalent. Zunächst verschaffen wir uns eine geeignete Orthonormalbasis von  $\mathbf{H}$ .

Satz 4. Es sei  $\mathbf{H}_0$  der Eigenraum von  $AA^*$  zum niedrigsten Eigenwert  $\lambda_0 = 1$  und  $m = \dim \mathbf{H}_0$ .  $\{\varphi_{\alpha,0}\}$  sei eine Orthonormalbasis in  $\mathbf{H}_0$ . Dann existiert

$$(14) \quad \varphi_{\alpha,k} = \frac{1}{\sqrt{k!}} (A^*)^k \varphi_{\alpha,0} \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

$\varphi_{\alpha,k}$  ist Eigenvektor von  $AA^*$  zum Eigenwert  $\lambda_k = k+1$  und  $\{\varphi_{\alpha,k}\}$  ist eine Orthonormalbasis von  $\mathbf{H}$ .

Beweis. Daß  $\varphi_{\alpha,k}$  existiert und Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_k = k+1$  von  $AA^*$  ist, wurde bereits im Beweis von Satz 3 gezeigt. Aus  $A^*: \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbf{H}_{n+1}$  folgt weiter, daß  $\{\varphi_{\alpha,k}\}$  für festes  $k$  in  $\mathbf{H}_k$  total ist. Es bleibt die Orthonormalität zu zeigen:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\alpha,k}, \varphi_{\beta,k} \rangle &= \frac{1}{k!} \langle (A^*)^k \varphi_{\alpha,0}, (A^*)^k \varphi_{\beta,0} \rangle = \frac{1}{(k-1)!} \left\langle \frac{AA^*}{k} (A^*)^{k-1} \varphi_{\alpha,0}, (A^*)^{k-1} \varphi_{\beta,0} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \langle (A^*)^{k-1} \varphi_{\alpha,0}, (A^*)^{k-1} \varphi_{\beta,0} \rangle = \langle \varphi_{\alpha,k-1}, \varphi_{\beta,k-1} \rangle = \langle \varphi_{\alpha,0}, \varphi_{\beta,0} \rangle \\ &= \delta_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Für  $k \neq j$  sind aber  $\varphi_{\alpha,k}$  und  $\varphi_{\beta,j}$  als Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von  $AA^*$  auch orthogonal.

Da die Eigenräume  $\mathbf{H}_k$  den Raum  $\mathbf{H}$  erzeugen, ist  $\{\varphi_{\alpha,k}\}$  auch vollständig in  $\mathbf{H}$ .

Satz 5.  $A$  und  $A^*$  sind vollständig charakterisiert durch die Relationen

$$(15) \quad A^* \varphi_{\alpha,k} = \sqrt{k+1} \varphi_{\alpha,k+1}, \quad A \varphi_{\alpha,k} = \sqrt{k} \varphi_{\alpha,k-1} \quad (A \varphi_{\alpha,0} = 0).$$

Der Definitionsbereich von  $A$  und  $A^*$  ist die Menge

$$(16) \quad D = \{ \varphi; \varphi = \sum c_{\alpha,k} \varphi_{\alpha,k}; \sum_k (k+1) \sum_{\alpha} |c_{\alpha,k}|^2 < \infty \} = D_A = D_{A^*}.$$

Beweis. Aus der Definition der  $\varphi_{\alpha,k}$  folgen unmittelbar die Relationen (15). Da  $A$  und  $A^*$  abgeschlossen sind, ist  $D$  sicher in  $D_A$  und  $D_{A^*}$  enthalten. Es sei nun

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum b_{\alpha,k} \varphi_{\alpha,k} \in D_A, & A \varphi &= \sum \beta_{\alpha,k} \varphi_{\alpha,k}, \\ \varphi' &= \sum c_{\alpha,k} \varphi_{\alpha,k} \in D_{A^*}, & A^* \varphi &= \sum \gamma_{\alpha,k} \varphi_{\alpha,k}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\beta_{\alpha,k} = \langle A\varphi, \varphi_{\alpha,k} \rangle = \langle \varphi, A^*\varphi_{\alpha,k} \rangle = \sqrt{k+1} b_{\alpha,k+1},$$

$$\gamma_{\alpha,k} = \langle A^*\varphi', \varphi_{\alpha,k} \rangle = \langle \varphi', A\varphi_{\alpha,k} \rangle = \sqrt{k} c_{\alpha,k-1}.$$

Es gilt also

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_{\alpha,k-1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{\alpha} |b_{\alpha,k}|^2 < \infty,$$

$$\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_{\alpha,k+1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \sum_{\alpha} |c_{\alpha,k}|^2 < \infty.$$

Da aber  $\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{\alpha,k}|^2 < \infty$  ist, ergeben diese beiden Relationen, daß sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi'$  zu  $D$  gehören, also  $D = D_A = D_{A^*}$  ist.

Bemerkung. Aus den Relationen (15) und (16) folgt mit  $Q \supset \frac{1}{\sqrt{2}}(A^* + A)$ ,  $P \supset \frac{i}{\sqrt{2}}(A^* - A)$  unmittelbar, daß der Operator  $P^2 + Q^2$  wesentlich selbstadjungiert ist, sowohl in seinem natürlichen Definitionsbereich  $D_{P^2} \cap D_{Q^2}$  als auch in der linearen Hülle  $L$  der  $\varphi_{\alpha,k}$ , welche bezüglich  $P, Q, A$  und  $A^*$  invariant ist.

Theorem 1. Es seien  $P, Q$  abgeschlossene, hermitesche Operatoren, es gelte 2 und 3, also auch  $AA^* = A^*A + I$ . Dann gilt:

$$(17) \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^* + A)^{\sim}, \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}}(A^* - A)^{\sim};$$

$P$  und  $Q$  sind selbstadjungiert. Der Hilbertraum  $\mathbf{H}$  kann zerlegt werden in die direkte Summe von  $m$  paarweise orthogonalen Teilräumen  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$ , welche  $P, Q, A, A^*$  reduzieren. Die Einschränkungen  $P^{(\alpha)}, Q^{(\alpha)}$  von  $P, Q$  auf  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  sind in  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  irreduzibel. Diese irreduziblen Bestandteile sind bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Beweis. Auf  $D = D_A = D_{A^*}$  (vgl. (16)) gilt wegen (1)

$$Q\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^* + A)\varphi, \quad P\varphi = \frac{i}{\sqrt{2}}(A^* - A)\varphi,$$

also auch

$$Q \supset \frac{1}{\sqrt{2}}(A^* + A)^{\sim}, \quad P \supset \frac{i}{\sqrt{2}}(A^* - A)^{\sim}.$$

In  $\mathbf{H}$  ist durch

$$J(\sum c_{\alpha,k} \varphi_{\alpha,k}) = \sum \overline{c_{\alpha,k}} \varphi_{\alpha,k}$$

eine Konjugation  $J$  definiert und  $(A^* + A)^{\sim}$  ist bezüglich dieser Konjugation reell besitzt also eine selbstadjungierte Fortsetzung, hat also gleiche Defektzahlen. Wir zeigen, daß die Cayleysche Transformierte von  $(A^* + A)^{\sim}$ ,

$$V = \{(A^* + A)^{\sim} - iI\} \{(A^* + A)^{\sim} + iI\}^{-1}$$

den ganzen Raum  $\mathbf{H}$  als Definitionsbereich hat. Es sei  $\varphi_0 \perp D_V$ . Dann gilt insbe-

sondere:

$\langle \varphi_0, (A^* + A + iI)\varphi_{\alpha,k} \rangle = 0$  und wenn  $\varphi_0 = \sum d_{\alpha,k} i^k \varphi_{\alpha,k}$  gilt, so heißt dies:

$$0 = \langle \sum d_{\beta,j} j^j \varphi_{\beta,j}, \sqrt{k} \varphi_{\alpha,k-1} + i \varphi_{\alpha,k} + \sqrt{k+1} \varphi_{\alpha,k+1} \rangle,$$

also 
$$0 = \sqrt{k} d_{\alpha,k-1} i^{k-1} + d_{\alpha,k} i^k + \sqrt{k+1} d_{\alpha,k+1} i^{k+1} \quad \text{oder}$$

$$(18) \quad d_{\alpha,k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} (d_{\alpha,k} + \sqrt{k} d_{\alpha,k-1}).$$

Es sei nun irgendein  $d_{\alpha_0,0} \neq 0$ . Wir können dann  $d_{\alpha_0,0} = 1$  annehmen. Aus (18) folgt dann  $d_{\alpha_0,1} = 1$  und durch Induktion:  $d_{\alpha_0,k+1} \cong \frac{1+\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \cong 1$ , was der Konvergenz von  $\sum |d_{\alpha_0,k}|^2$  widerspricht. Es müssen also alle  $d_{\alpha_0,0}$  und nach (18) auch alle  $d_{\alpha,k}$  verschwinden.  $V$  ist also im ganzen Raum  $\mathbf{H}$  definiert und  $(A + A^*)^\sim$  ist selbstadjungiert. Da aber ein selbstadjungierter Operator keine echte hermitesche Fortsetzung haben kann, folgt

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^* + A)^\sim = Q^*.$$

Setzt man  $\psi_{\alpha,k} = i^k \varphi_{\alpha,k}$  so gilt:

$$(A^* + A)\varphi_{\alpha,k} = \sqrt{k+1} \varphi_{\alpha,k+1} + \sqrt{k} \varphi_{\alpha,k-1} = \sqrt{2} Q \varphi_{\alpha,k},$$

$$i(A^* - A)\psi_{\alpha,k} = \sqrt{k+1} \psi_{\alpha,k+1} + \sqrt{k} \psi_{\alpha,k-1} = \sqrt{2} P \psi_{\alpha,k}.$$

Die Operatoren  $(A^* + A)^\sim$  und  $i(A^* - A)^\sim$  sind also unitär äquivalent, d. h.  $\frac{i}{\sqrt{2}} (A^* - A)^\sim$  ist auch selbstadjungiert, stimmt also mit  $P$  überein.

Bezeichnen wir mit  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  den durch alle  $\varphi_{\alpha,k}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) aufgespannten Teilraum von  $\mathbf{H}$ , so werden offenbar  $P, Q, A$  und  $A^*$  durch  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  reduziert. Die Einschränkungen  $P^{(\alpha)}, Q^{(\alpha)}$  von  $P, Q$  auf  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  werden aber bezüglich der Basis  $\{\varphi_{\alpha,k}\}$  gerade durch die Heisenbergschen Matrizen charakterisiert, sind also insbesondere bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig festgelegt. Die Irreduzibilität von  $\{P^{(\alpha)}, Q^{(\alpha)}\}$  ist leicht einzusehen. Ist  $\mathbf{M} \subset \mathbf{H}^{(\alpha)}$  bei  $P, Q$  invariant, so auch bei  $A, A^*$  und  $AA^*$ . Also ist die Projektion auf  $\mathbf{M}, E_{\mathbf{M}}$ , vertauschbar mit den Projektionen  $E_n$  auf die Eigenräume  $\mathbf{H}_n$  von  $AA^*$ .  $\mathbf{H}_n \cap \mathbf{H}^{(\alpha)} = \{\lambda \varphi_{\alpha,n}\}$  ist aber eindimensional. Ist  $\mathbf{M} \neq 0$ , so muß  $\mathbf{H}_n \cap \mathbf{M} \neq \{0\}$  sein für ein  $n$ , d. h.  $\mathbf{M}$  enthält  $\varphi_{\alpha,n}$ , wegen Invarianz bei  $A, A^*$  aber dann auch alle  $\varphi_{\alpha,k}$ , also ganz  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$ .

### 3. Lösungen der Antikommutatorrelationen

Die Felder von Fermi-Dirac-Teilchen werden beschrieben durch Operatoren  $\Psi, \Psi^*$ , welche den „Antikommutatorrelationen“ genügen:

$$(19) \quad \Psi \Psi^* + \Psi^* \Psi = I, \quad \Psi \Psi = \Psi^* \Psi^* = 0.$$



Dabei soll  $\Psi$  ein abgeschlossener Operator,  $\Psi^*$  sein Adjungierter sein. Es sei nun

$$(20) \quad F^0 = \Psi\Psi^*, \quad F^1 = \Psi^*\Psi = I - F^0.$$

Satz 6. Wenn  $\Psi, \Psi^*$  den Relationen (19) genügen, so gilt:  $F^0$  und  $F^1 = I - F^0$  (aus (20)) sind orthogonale Projektionen auf zueinander orthogonale, komplementäre Teilräume  $\mathbf{H}^0, \mathbf{H}^1$  des Hilbertraums  $\mathbf{H}$ ;  $\Psi$  (bzw.  $\Psi^*$ ) ist eine partiell isometrische Abbildung mit dem Anfangsbereich  $\mathbf{H}^1$  (bzw.  $\mathbf{H}^0$ ) und dem Endbereich  $\mathbf{H}^0$  (bzw.  $\mathbf{H}^1$ ).

Zu jeder Orthonormalbasis  $\{\varphi_{v,0}\}$  von  $\mathbf{H}^0$  gibt es eine Orthonormalbasis  $\{\varphi_{v,1}\}$  von  $\mathbf{H}^1$ , so daß  $\Psi, \Psi^*$  dargestellt werden durch die Relationen

$$(21) \quad \Psi^*\varphi_{v,0} = \varphi_{v,1}, \quad \Psi^*\varphi_{v,1} = 0,$$

$$(22) \quad \Psi\varphi_{v,0} = 0, \quad \Psi\varphi_{v,1} = \varphi_{v,0}.$$

Die zweidimensionalen Räume  $\mathbf{H}^{(v)}$ , die durch  $\varphi_{v,0}$  und  $\varphi_{v,1}$  aufgespannt werden, reduzieren  $\Psi$  und  $\Psi^*$ .  $\Psi$  und  $\Psi^*$  sind also unitär äquivalent zu einer direkten Summe von Matrizen

$$\Psi^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^{(v)*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Aus  $\Psi\Psi^* = I - \Psi^*\Psi$  folgt  $0 \leq F^j \leq I$ . Also sind  $F^j$  und damit  $\Psi, \Psi^*$  beschränkte, also auch überall definierte Operatoren.

Aus  $\Psi^2 = 0 = (\Psi^*)^2$  folgt  $F^1F^0 = F^0F^1 = 0$  und

$$(F^0)^2 = F^0(I - F^1) = F^0; \quad (F^1)^2 = F^1(I - F^0) = F^1.$$

$F^j$  sind also selbstadjungiert und idempotent, also orthogonale Projektionen auf abgeschlossene Teilräume  $\mathbf{H}^0$  bzw.  $\mathbf{H}^1$ . Aus  $F^0F^1 = F^1F^0 = 0$  folgt, daß  $\mathbf{H}^0 \perp \mathbf{H}^1$ , und  $F^0 + F^1 = I$  ergibt  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^1$ , also  $\mathbf{H}^1 = (\mathbf{H}^0)^\perp$ . Da  $\Psi^*\Psi$  eine Projektion ist, ist  $\Psi$  partiell isometrisch, und zwar bildet es  $\mathbf{H}^1$  isometrisch auf  $\mathbf{H}^0$  ab:

$$|\Psi\varphi_1|^2 = \langle \Psi^*\Psi\varphi_1, \varphi_1 \rangle = |\varphi_1|^2 \quad \text{für } \varphi_1 \in \mathbf{H}^1,$$

$$\Psi\varphi_1 \in \mathbf{H}^0, \quad \text{da } F^1\Psi\varphi_1 = \Psi^*(\Psi^2)\varphi_1 = 0 \text{ ist.}$$

Analog sieht man, daß  $\Psi^*$  den Raum  $\mathbf{H}^0$  isometrisch in  $\mathbf{H}^1$  abbildet und  $\mathbf{H}^1$  annulliert. Da aber  $F^0$  und  $F^1$  Abbildungen auf  $\mathbf{H}^0$  bzw.  $\mathbf{H}^1$  sind, folgt, daß auch  $\Psi\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}^0$  und  $\Psi^*\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}^1$  ist.

Definieren wir zu einer Orthonormalbasis  $\{\varphi_{v,0}\}$  von  $\mathbf{H}^0$   $\varphi_{v,1} = \Psi^*\varphi_{v,0}$ , so sind die Bedingungen (21), (22) erfüllt und  $\{\varphi_{v,1}\}$  ist eine Orthonormalbasis von  $\mathbf{H}^1$ .

Die letzte Aussage von Satz 6 entnimmt man nun unmittelbar aus (21), (22).

#### 4. Darstellung der Operatoren von Boson- und Fermion-Feldern

Es sei  $\mathfrak{S} = \{P_\mu, Q_\mu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*\}_{\mu \in M, \lambda \in N}$  ein höchstens abzählbares System von linearen Operatoren im Hilbertschen Raum  $\mathbf{H}$ . Dabei sollen die  $P_\mu, Q_\mu$  den „Kommutatorrelationen“,  $\Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  den „Antikommutatorrelationen“ genügen und alle  $P, Q$  sollen mit allen  $\Psi, \Psi^*$  vertauschbar sein.

Genauer verlangen wir folgendes:

I.  $\Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  sind zueinander adjungiert und für alle  $\lambda, \kappa \in N$  gilt:

$$\Psi_\lambda \Psi_\kappa^* + \Psi_\kappa^* \Psi_\lambda = \delta_{\kappa\lambda} I, \quad \Psi_\lambda \Psi_\kappa + \Psi_\kappa \Psi_\lambda = 0;$$

II.  $P_\mu, Q_\mu$  ist für jedes  $\mu$  ein „kanonisches Paar“, d. h. es gelten die Bedingungen 1, 2, 3 aus Nr. 1;

III.  $P_\mu, Q_\mu$  sind vertauschbar mit  $P_\nu, Q_\nu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  für alle  $\lambda \in N$  und alle  $\mu \neq \nu \in M$ , d. h. die Spektralschar von  $P_\mu$  (bzw.  $Q_\mu$ ) ist mit der Spektralschar von  $P_\nu, Q_\nu$  und mit den Operatoren  $\Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  (die ja beschränkt sind) vertauschbar im üblichen Sinne.

Satz 7. Aus I folgt:

$$F_\lambda^0 = \Psi_\lambda \Psi_\lambda^* = I - \Psi_\lambda^* \Psi_\lambda = I - F_\lambda^1$$

sind orthogonale Projektionen. Die Elemente der Familie  $\{F_\lambda^0, F_\lambda^1\}_{\lambda \in N}$  sind paarweise miteinander vertauschbar.  $\Psi_\lambda$  und  $\Psi_\lambda^*$  sind partiell isometrische Operatoren, die mit allen  $F_\kappa^0, F_\kappa^1, \kappa \neq \lambda$ , vertauschbar sind.

Beweis. Nach Nr. 3 sind die  $F_\lambda^j$  Projektionen, die  $\Psi_\lambda$  und  $\Psi_\lambda^*$  partiell isometrische Operatoren. Aus den Relationen in I für  $\lambda \neq \kappa$  folgt aber:  $F_\lambda^j F_\kappa^i = F_\kappa^i F_\lambda^j$ ,  $\Psi_\lambda F_\kappa^j = F_\kappa^j \Psi_\lambda$  und  $\Psi_\lambda^* F_\kappa^j = F_\kappa^j \Psi_\lambda^*$ . Aus II folgt nach Theorem 1, daß alle  $P_\mu, Q_\mu$  selbstadjungierte Operatoren in  $H$  sind. Daher hat die Forderung III der Vertauschbarkeit von  $P_\mu$  mit  $Q_\nu, P_\nu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  einen wohlbestimmten Sinn.

Ist  $E_0$  irgendeine Projektion aus der Spektralschar von  $P_\mu$  (bzw. von  $Q_\mu$ ), so bedeutet III, daß der Raum  $H_0 = E_0(H)$  die Operatoren  $P_\nu, Q_\nu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  reduziert.  $E_0$  ist also mit den  $F_\lambda^j$  vertauschbar und der Zerlegung  $H = H_0 \oplus H_1$ ,  $H_1 = (H_0)^\perp$ , entspricht eine Zerlegung in eine direkte Summe für  $P_\nu$  und  $Q_\nu$ :

$$(22) \quad P_\nu = P_{\nu 0} \oplus P_{\nu 1}, \quad Q_\nu = Q_{\nu 0} \oplus Q_{\nu 1}.$$

Dann gilt aber auch

$$(24) \quad P_\nu^2 = P_{\nu 0}^2 \oplus P_{\nu 1}^2, \quad Q_\nu^2 = Q_{\nu 0}^2 \oplus Q_{\nu 1}^2,$$

$$P_\nu^2 + Q_\nu^2 = (P_{\nu 0}^2 + Q_{\nu 0}^2) \oplus (P_{\nu 1}^2 + Q_{\nu 1}^2),$$

$$(25) \quad (P_\nu^2 + Q_\nu^2)^- = (P_{\nu 0}^2 + Q_{\nu 0}^2)^- \oplus (P_{\nu 1}^2 + Q_{\nu 1}^2)^- = A_\nu A_\nu^* - \frac{1}{2} I.$$

Es wird also auch der selbstadjungierte Operator

$$A_\nu A_\nu^* \quad \text{mit} \quad A_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_\nu + iP_\nu), \quad A_\nu^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_\nu - iP_\nu)$$

durch  $H_0$  reduziert. Also ist auch  $A_\nu A_\nu^*$  mit  $P_\mu, Q_\mu$  vertauschbar und auch mit  $A_\mu, A_\mu^*$  und  $A_\mu A_\mu^*$ . Nun hat nach Satz 3  $A_\mu A_\mu^*$  ein rein diskretes Spektrum,

$$A_\mu A_\mu^* = \sum_0^\infty (m+1) E_\mu^m.$$

Da auch die Projektionen  $F_\lambda^j$  die Operatoren  $P_\mu$ ,  $Q_\mu$ , damit auch  $A_\mu A_\mu^*$  reduzieren, also mit den  $E_\mu^m$  vertauschbar sind, folgt:<sup>8)</sup>

Theorem 2. Aus I, II, III folgt:

Die Projektionen  $\{E_\mu^m, F_\lambda^j\}$  auf die Eigenräume der Operatoren  $A_\mu A_\mu^* = \sum_0^\infty (m+1) E_\mu^m$ ,  $\Psi_\lambda \Psi_\lambda^* = F_\lambda^0 = I - F_\lambda^1$  bilden ein kommutatives System.

Die Operatoren  $P_\nu$ ,  $Q_\nu$ ,  $A_\nu$ ,  $A_\nu^*$  werden durch alle  $E_\mu^m$ ,  $F_\lambda^j$  ( $\mu \neq \nu$ ) reduziert.

Die Operatoren  $\Psi_\lambda$ ,  $\Psi_\lambda^*$  werden durch alle  $E_\mu^m$ ,  $F_\lambda^j$ ,  $\kappa \neq \lambda$ , reduziert.

Die Operatoren  $A_\mu^* A_\mu$  haben die Eigenwerte 0, 1, 2, ... Diese Eigenwerte können also als *Besetzungszahlen des Zustandes*  $\mu$  interpretiert werden.  $\langle A_\mu^* A_\mu \varphi, \varphi \rangle = |A_\mu \varphi|^2$  wäre dann als *Erwartungswert für die Anzahl der Teilchen im Zustand*  $\mu$  anzusprechen.

Entsprechend kann man die Eigenwerte 0, 1 von  $\Psi_\lambda^* \Psi_\lambda$  als *Besetzungszahlen für Teilchen im Zustand*  $\lambda$  auffassen, wobei für diese Teilchen das Pauli-Prinzip gelten würde.

Ein Zustand  $\varphi_0$  des Systems, bei dem alle möglichen Teilchenzustände unbesetzt sind, müßte also durch alle  $A_\mu$  und  $\Psi_\lambda$  annulliert werden.

Wir verlangen nun weiter:

IV. In  $\mathbf{H}$  gibt es einen „Vakuumszustand“, d. h. ein  $\varphi_0$ , das durch alle  $A_\mu$  und alle  $\Psi_\lambda$  auf Null abgebildet wird.

V. Das System  $\mathfrak{S}$  ist irreduzibel in  $\mathbf{H}$ .

Dann können wir zeigen, daß  $\mathfrak{S}$  durch I–V bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig festgelegt ist.

Theorem 3. Das System  $\mathfrak{S} = \{P_\mu, Q_\mu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*\}$  ist durch die Vertauschungsrelationen I–III, die Existenz eines Vakuumszustandes  $\varphi_0$  (IV) und die Irreduzibilität (V) bis auf unitäre Äquivalenz festgelegt. Die eindeutige Lösung  $\mathfrak{S}$  der Relationen I–V ist gegeben durch die Formeln (28), (29), (30), (31).

Beweis. Die Menge  $N = \{\lambda\}$  können wir mit einer Menge von natürlichen Zahlen identifizieren und erhalten dadurch eine vollständige Ordnung der Elemente  $\lambda$ . Der Vektor  $\varphi_0$ , der den Vakuumzustand repräsentiert, liegt in einem Eigenraum jedes der Operatoren  $A_\mu A_\mu^* = A_\mu^* A_\mu + I$  und  $\Psi_\lambda \Psi_\lambda^* = I - \Psi_\lambda^* \Psi_\lambda$ . Auf  $\varphi_0$  können wir also jeden der Operatoren  $\Psi_\lambda^*$  bzw.  $A_\mu^*$  anwenden. Dabei wird nur der Eigenwert für  $\Psi_\lambda \Psi_\lambda^*$  bzw.  $A_\mu A_\mu^*$  geändert,  $\Psi_\kappa \Psi_\kappa^*$  und  $A_\nu A_\nu^*$ ,  $\kappa \neq \lambda$ ,  $\nu \neq \mu$  haben für  $\varphi_0$  wie für  $\Psi_\lambda^* \varphi_0$  bzw.  $A_\mu^* \varphi_0$  den gleichen Eigenwert. Wir können die Anwendung von Operatoren  $\Psi^*$  und  $A^*$  beliebig oft wiederholen, bleiben immer in der Menge der simultanen Eigenvektoren der Familie  $\{A_\mu A_\mu^*, \Psi_\lambda \Psi_\lambda^*\}$ . Es sei nun

$$(26) \Delta_0 = \{(m, n); m = \{m_\mu\}, n = \{n_\lambda\}, m_\mu \in \{0, 1, 2, \dots\}, n_\lambda \in \{0, 1\}, \sum m_\mu < \infty, \sum n_\lambda < \infty\}.$$

Dann existiert für jedes  $(m, n) \in \Delta_0$  der Vektor

$$(27) \varphi_{m,n} = \prod_\mu \frac{1}{\sqrt{m_\mu!}} (A_\mu^*)^{m_\mu} \prod_\lambda (\Psi_\lambda^*)^{n_\lambda} \varphi_0.$$

<sup>8)</sup> Theorem 1 und 2 zeigen, daß bei GÄRDING–WIGHTMAN [2], [3] statt der v. Neumann–Weylschen Form der Vertauschungsrelationen auch unsere Bedingungen I, II, III benutzt werden können.

Dabei sollen die Faktoren  $\Psi_\lambda^*$  nach wachsenden  $\lambda$  angeordnet sein. Es gelten wegen Satz 5 und Satz 6 die Relationen

$$(28) \quad A_{\mu_0} \varphi_{m,n} = \sqrt{m_{\mu_0}} \varphi_{m-\delta_{\mu\mu_0}, n},$$

$$(29) \quad A_{\mu_0}^* \varphi_{m,n} = \sqrt{m_{\mu_0} + 1} \varphi_{m+\delta_{\mu\mu_0}, n},$$

$$(30) \quad \Psi_{\lambda_0} \varphi_{m,n} = (1)^{\sum_{\lambda < \lambda_0} n_\lambda} \cdot n_{\lambda_0} \cdot \varphi_{m, n-\delta_{\lambda\lambda_0}},$$

$$(31) \quad \Psi_{\lambda_0}^* \varphi_{m,n} = (-1)^{\sum_{\lambda < \lambda_0} n_\lambda} (1 - n_{\lambda_0}) \varphi_{m, n+\delta_{\lambda\lambda_0}}.$$

Dabei ist  $\delta_{\mu\mu_0}$  bzw.  $\delta_{\lambda\lambda_0}$  die Folge, die nur an der Stelle  $\mu_0$  bzw.  $\lambda_0$  eine 1, sonst lauter Nullen hat.  $A_{\mu_0}$  bzw.  $\Psi_{\lambda_0}$  verkleinern also den Index  $m_{\mu_0}$  bzw.  $n_{\lambda_0}$  um 1, während  $A_{\mu_0}^*$  bzw.  $\Psi_{\lambda_0}^*$  diesen um 1 vergrößern. ( $\varphi_{m,n}$  mit negativen  $m_\mu$  und  $n_\lambda \neq 0, 1$  sind dabei gleich Null zu setzen). Offenbar folgt nun

$$A_{\mu_0}^* A_{\mu_0} \varphi_{m,n} = m_{\mu_0} \varphi_{m,n}, \quad \Psi_{\lambda_0}^* \Psi_{\lambda_0} \varphi_{m,n} = n_{\lambda_0} \varphi_{m,n}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{m,n}, \varphi_{m,n} \rangle &= \langle \varphi_{m-\delta_{\mu\mu_0}, n}, \varphi_{m-\delta_{\mu\mu_0}, n} \rangle \\ &= \langle \varphi_{m, n-\delta_{\lambda\lambda_0}}, \varphi_{m, n-\delta_{\lambda\lambda_0}} \rangle = \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 1 \end{aligned}$$

bilden also die  $\varphi_{m,n}$ ,  $(m, n) \in \Delta_0$ , ein Orthonormalsystem in  $\mathbf{H}$ . Der durch diese  $\varphi_{m,n}$  aufgespannte Raum  $\mathbf{H}_0$  ist invariant bei  $\mathfrak{S}$ , muß also nach (V) mit  $\mathbf{H}$  übereinstimmen.

Die Operatoren  $A_\mu$ ,  $A_\mu^*$ ,  $\Psi_\lambda$ ,  $\Psi_\lambda^*$  sind aber durch (28), (29), (30), (31) als abgeschlossene Operatoren eindeutig festgelegt (vgl. Satz 5) und nach Theorem 1 sind dann auch  $P_\mu = \frac{i}{\sqrt{2}} (A_\mu^* - A_\mu)^\sim$  und  $Q_\mu = \frac{i}{\sqrt{2}} (A_\mu^* + A_\mu)^\sim$  durch (28) und (29) vollständig bestimmt.

Damit ist aber dann die Eindeutigkeit von  $\mathfrak{S}$  bis auf simultane unitäre Transformationen nachgewiesen.

Ist  $\mathfrak{S} = \{P_\mu, Q_\mu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*\}_{\mu \in M, \lambda \in N}$  ein endliches System, also  $M$  und  $N$  endliche Indexmengen, so ist  $\{A_\mu^* A_\mu, \Psi_\lambda^* \Psi_\lambda\}_{\mu \in M, \lambda \in N}$  ein System von endlich vielen, paarweise vertauschbaren selbstadjungierten Operatoren, welche alle diskretes Spektrum und 0 als Eigenwert haben. Es gibt also dann mindestens einen gemeinsamen Eigenvektor zum Eigenwert 0, d. h. (IV) ist eine Folge von (I, II, III).

Es sei nun  $\mathbf{H}_0$  der Raum aller gemeinsamen Eigenvektoren der  $A_\mu^* A_\mu$  und  $\Psi_\lambda^* \Psi_\lambda$  zum Eigenwert 0,  $\varphi_0^{(\alpha)}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbf{H}_0$ .

Dann können offenbar die Vektoren

$$\varphi_{m,n}^{(\alpha)} := \prod_\mu \frac{1}{\sqrt{m_\mu!}} (A_\mu^*)^{m_\mu} \prod_\lambda (\Psi_\lambda^*)^{n_\lambda} \varphi_0^{(\alpha)}$$

gebildet werden. Der durch die  $\varphi_{m,n}^{(\alpha)}$  mit festem  $\alpha$  aufgespannte Raum  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  reduziert

$A_\lambda, A_\mu^*, P_\mu, Q_\mu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*$  und es gilt:

$$A_\nu \varphi_{m,n}^{(\alpha)} = \sqrt{m_\nu} \varphi_{m-\delta_{\nu\nu}, n}^{(\alpha)}, \quad A_\nu^* \varphi_{m,n}^{(\alpha)} = \sqrt{m_\nu + 1} \varphi_{m+\delta_{\nu\nu}, n}^{(\alpha)},$$

$$\Psi_{\nu^*} \varphi_{m,n}^{(\alpha)} = (-1)^{\sum_{\lambda < \nu} n_\lambda} n_{\nu^*} \varphi_{m, n-\delta_{\lambda\nu}}^{(\alpha)}, \quad \Psi_{\nu^*}^* \varphi_{m,n}^{(\alpha)} = (-1)^{\sum_{\lambda < \nu} n_\lambda} (1 - n_{\nu^*}) \varphi_{m, n+\delta_{\lambda\nu}}^{(\alpha)}.$$

Hieraus folgt zusammen mit Satz 5 und Theorem 1:

**Theorem 4.** Ist  $\mathfrak{S} = \{P_\mu, Q_\mu, \Psi_\lambda, \Psi_\lambda^*\}_{\mu \in M, \lambda \in N}$  mit endlichen Indexmengen  $M, N$  und sind die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt, so gilt:

Es gibt eine Zerlegung  $\mathbf{H} = \bigoplus \mathbf{H}^{(\alpha)}$  von  $\mathbf{H}$  in paarweise orthogonale Teilräume  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$ , welche alle Operatoren aus  $\mathfrak{S}$  reduzieren. Die irreduziblen Systeme  $\mathfrak{S}^{(\alpha)} = \{P_\mu^{(\alpha)}, Q_\mu^{(\alpha)}, \Psi_\lambda^{(\alpha)}, \Psi_\lambda^{(\alpha)*}\}$  in  $\mathbf{H}^{(\alpha)}$  sind bis auf unitäre Äquivalenz bestimmt.

Insbesondere sind also quantenmechanische Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden vollständig bestimmt durch endlich viele Paare  $P_\mu, Q_\mu$ , für die II gilt und  $P_\nu, Q_\nu$  mit  $P_\mu, Q_\mu$  für  $\nu \neq \mu$  vertauschbar sind, und durch den Hamiltonoperator  $H = H(P_\mu, Q_\mu)$ . Die irreduziblen Bestandteile der  $P_\mu, Q_\mu$  sind den Schrödingerschen Operatoren äquivalent:

$$P_\mu \varphi = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi; \quad D_{P_\mu} = \left\{ \varphi; \varphi \in L^2(R^M), \varphi \text{ absolut stetig, } \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \in L^2 \right\},$$

$$Q_\mu \varphi = x_\mu \cdot \varphi; \quad D_{Q_\mu} = \{ \varphi; \varphi \in L^2(R^M), x_\mu \cdot \varphi \in L^2(R^M) \}$$

und die Schrödingergleichung  $-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = H\varphi$  kann in der gewohnten Weise als partielle Differentialgleichung geschrieben werden:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi + H \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, x_\mu \right) \varphi = 0.$$

### Literaturverzeichnis

- [1] J. DIXMIER, Sur la relation  $i(PQ - QP) = 1$ , *Compositio Math.*, **13** (1958), 263–270.
- [2] L. GÄRDING—A. WIGHTMAN, Representations of the anticommutation relations, *Proc. Nat. Acad. USA*, **40** (1954), 617–621.
- [3] L. GÄRDING—A. WIGHTMAN, Representations of the commutation relations, *Proc. Nat. Acad. USA*, **40**, (1954), 622–626.
- [4] C. FOIAŞ—L. GEHÉR—B. SZ.-NAGY, On the permutability condition of quantum mechanics, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 78–89.
- [5] J. v. NEUMANN, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Ann.*, **104**, (1931), 570–578.
- [6] F. RELICH, Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen, *Göttinger Nachr.*, **1946**, 107–116.
- [7] B. SZ.-NAGY, *Spektralzerlegung linearer Transformationen im Hilbertschen Raum* (Berlin, 1942).
- [8] H. WIELANDT, Über die Unbeschränktheit der Schrödingerschen Operatoren der Quantenmechanik, *Math. Ann.*, **121** (1949), 21.

(Eingegangen am 25 Juli 1962)