Bibliographie

W. Rinow, Die innere Geometrie der metrischen Räume (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 105), XV+520 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961.

Das Buch gibt einen systematischen Aufbau der inneren Geometrie der metrischen Räume. In hohem Maße wurden topologische Hilfsmittel verwandt, die ermöglichten, daß viele klassische Begriffe bzw. Resultate der Differentialgeometrie ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen formuliert werden konnten.

Die behandelten Problemkreise von dem Gebiet der inneren Geometrie sind in zehn Kapiteln zerteilt. Im ersten Kapitel sind die Grundbegriffe der metrischen Geometrie und die im folgenden nötigen Grundideen der Topologie angegeben. Das zweite Kapitel behandelt die stetigen Abbildungen und entwickelt den Begriff der Kurven vom Standpunkt der Topologie und auch als parametrisierte Punktmengen.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen wird im dritten Kapitel die Länge einer Kurve und die innere Metrik eines metrischen Raumes definiert. Als Beispiel der inneren Metriken wird die Metrik der Finslerräume eingehender behandelt.

In den folgenden drei Kapiteln folgt eine ausführliche Behandlung der Theorie der geodätischen Kurven.

Im siebenten Kapitel ist der in der Theorie der metrischen Räume so wichtige Begriff der Krümmung definiert. Dieser Begriff beruht auf dem Vergleich der Dreiecke des Raumes mit kongruenten Dreiecken auf Flächen konstanter Krümmung. Die Bestimmung der Krümmung ist auch durch den Dreiecksexzeß angegeben, die bezüglich der vorigen Definition einen einfacheren Charakter hat.

Das achte Kapitel behandelt das Clifford—Kleinsche Raumformenproblem. Das Clifford—Kleinsche Raumformenproblem bedeutet die Aufgabe der Bestimmung aller Mannigfaltigkeiten konstanter Riemannscher Krümmung. Die Bestimmung der euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raumformen geschieht nach einen von F. Klein stammenden Lösungsverfahren mittels der Decktransformationsgruppen des Basisraumes.

Das neunte Kapitel enthält Untersuchungen über Räume, deren Krümmung $\leqq 0$ ist. Ein Raum mit der Krümmung <0 *ist im wesentlichen durch folgende Forderung definiert:* Bilden die Punkte a, b, c, ein nichtausgeartetes Dreieck, sind ferner K_{ab} bzw. K_{ac} die Kürzesten zwischen a, b bzw. a, c und sind x, y die Mittelpunkte von K_{ab} bzw. K_{ac}, so gilt $\varrho(x, y)<\frac{1}{2}\varrho(b, c)$, wo die Funktion $\varrho(x, y)$ den Abstand der Punkte x, y bedeutet. Viele interessante Einzelprobleme werden diskutiert.

Im letzten Kapitel untersucht der Verf. die Sphäroide und Räume vom elliptischen Typ.

Das interessante Buch von Prof. Rinow wird gewiß zu weiteren Untersuchungen Anlaß geben.

A. Moór (Szeged)

A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I (Mathematical Surveys, Number 7), 224 pages, Providence, American Mathematical Society, 1961.

In the afterwar period there took place a rapid development in the theory of semigroups, i. e. algebraic systems with an associative binary operation. In the last decade the theory of semigroups has become an independent branch of mathematics, which has its own aspect, its own methods and contains a great deal of valuable results, sometimes rather deep and apt for application. Some results and methods of the semigroup theory are applied in functional analysis, in the general theory of transformations, and also in the abstract theory of automata, still being in statu nascendi.

Mathematicians interested in semigroups may be satisfied by the fact that in the last few years several books have appeared dealing with the systematic study of these objects, such as the

'Semigroups" by E. S. LYAPIN (Moscow, 1960, in Russian), the present book of A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, and the quite recent book "Die Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen" (Leipzig and Hamburg, 1962), by L. RÉDEI.

The book of CLIFFORD and PRESTON contains a suitably selected rich material representing the most interesting and important investigations in semigroups. It is written in a clear and easily comprehensible style.

Let us give a short review of the contents of the book, which consists of 5 chapters and an Appendix, containing some results taken from the book of A. K. SUSHKEWITCH "The Theory of Generalized Groups" (Kharkow, 1937, in Russian). In the first chapter the basic concepts and definitions are given. The associativity test of F. W. LIGHT for finite gruppoids is presented. In § 3 some results concerning translations and (regular) representations are included. The further §§ deal with the semigroup of all binary relations on a set; the concepts of congruence, factor semigroup, homomorphism, semilattice and band of semigroups are introduced and some general theorems proved. The class of inverse semigroups is treated separately and the remark is made that in volume 2 the authors will give a more detailed study of this important class of semigroups. § 10 deals with the problem of embedding of semigroups into groups. At the end of the chapter the concepts of the free semigroup and generating relations are introduced.

In chapter 2 the ideals of semigroups are considered. § 1 introduces the concept of GREEN's equivalence classes. Further, some special cases are treated, such as the $\mathfrak{D}$-structure of the transformation semigroups of sets and the regular $\mathfrak{D}$-classes of arbitrary semigroups. There are to be found some investigations on semigroups with zero element, containing minimal ideal and proofs theorems analogical with the well-known JORDAN—HÖLDER—SCHREIER theorems in group theory. The chapter ends by some results preparing the study of completely 0-simple semigroups.

Chapter 3 deals with the representations of semigroups by means of matrices the elements of which belong to a group with zero element, and the famous theorem of REES is discussed, enabling us to give a complete description of completely 0-simple semigroups. The authors further present the application of this theorem to Brand gruppoids and then give a description of all the homomorphisms of completely 0-simple semigroups. The last two §§ treat special (Schützenberger) representations of semigroups and the true representations of regular semigroups.

Chapter 4 is devoted to the theory of the decompositions of semigroups into the union of semigroups of various kinds (including groups) and the ideal extensions of semigroups.

Chapter 5 treats the representations of semigroups by means of matrices over a field, the principal irreducible representations of a semigroup, as well as representations of completely 0-simple semigroups.

The book ends by reviewing some important results of the theory of the characters of commutative semigroups due to Š. SCHWARZ, E. HEWITT and H. S. ZUCKERMAN.

In the book there are also some very valuable exercises to be solved and some open questions mentioned.

We are looking forward with much interest to the second part of the work.

I. Peák (Szeged)

H. S. M. Coxeter, Unvergängliche Geometrie. Ins Deutsche übersetzt von J. J. BURCKHARDT, 552 Seiten, Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1963.

Den viel hundert- sogar viel tausendjährigen Stoff der Geometrie vermag man immer wieder in neuer Gruppierung vorzutragen. Dennoch ragt COXETERS Buch aus der Literatur ähnlichen Charackters hervor und ist vom großen Nutzen für die Forscher und Lehrer der Geometrie. Der stets im Vordergrund stehende Leitfaden des Werkes ist: aus jeder mathematischen Konstruktion den geometrischen Kern hervorzuheben und den Stoff der Geometrie mit dem Felix Klein-schen Gedanken zu vereinigen.

Die Lehrer der Geometrie finden in diesem Buch schöne und lehrreiche Anwendungen, und-zwar nicht nur die gebräuchlichen kosmologischen, kinematischen, sondern auch die weniger bekannten kristallographischen und botanischen Anwendungen. Die Thematik ist sehr umfangreich: die nicht-Euklidische Geometrie, Differentialgeometrie, elementare Topologie (in selbstständigem Aufbau, mit dem Vierfarbenproblem im Mittelpunkt) bekommen ihren gehörigen Platz. Neuartig sind u. a. die Benützung von Dominos zur Illustration von sechs unter den siebzehn Bewegungsgruppen der ebenen Kristallographie (§ 4.4), ein sparsam gewähltes Axiomensystem der affinen Geometrie (§ 15.4), eine elementare Behandlung der extremen quadratischen Formen (18.4), eine Anwendung von geodätischen Polarkoordinaten auf die Begründung der hyperbolischen Trigonometrie (§ 20.6) und die Behandlung der geometrischen Transformationen (§ 5.6, 6.7, 7.6, 15.4).

Die Lektüre des Buches machen die Zitaten am Anfang der einzelnen Kapitel sehr anziehend. Dem Text sind 500 Aufgaben beigefügt; die Lösungen sind am Ende des Buches kurz angedeutet. Die bibliographischen Hinweise sind zeitgemäß und sehr reichlich. Einige Kapitel des Buches sind auch für die Weiterbildung von Mittelschullehrern zu empfehlen, so z. B. gleich das erste Kapitel über die Dreicke.

J. Berkes (Szeged)

Konrad Jacobs, Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie (Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, neue Folge, Heft 29), IV+214 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960.

Although the development of ergodic theory has taken place principally only since BIRKHOFF's paper in 1931, there exists already a huge literature on this subject. Since E. HOPF's excellent monograph (1937), treating the early development of the theory, there appeared no other monograph on the subject which would give a comprehensive account on the whole theory including its recent results and methods. The present work fills this gap, by giving a rather complete account of the pertaining literature up to 1958.

In contains nine chapters and ends with a very complete bibliography. For the convenience of the reader, the notions and facts of functional analysis and measure theory, which are used in the book, are summarized in the last two chapters (8 and 9).

Chapter 1 is devoted to functional analytic ergodic theorems, the fundamental problem of which is formulated as a fixed point-problem. First the ergodic theorem of ALAOGLU and BIRKHOFF is presented together with its genaralizations and related topics (§§ 1—2), then there follow general functional analytic recurrence theorems (§ 6). § 7 contains the author's results concerning the relation between the reversibility and almost periodicity of vectors of a Banach space. After giving a necessary and sufficient condition in order that a vector of a Hilbert space be almost periodic with respect to a semi-group of contractions (§ 8), the chapter ends with norm-convergence theorems of martingales (§ 9).

The results of Chapter 1 are applied in Chapter 2 to stationary Markov processes.

Chapter 3 treats the individual ergodic theorem in various forms. In § 1 the individual ergodic theorem is proved for discrete pointflows. Next this theorem is proved for discrete and continuous operator-flows (§ 2—3). § 4 deals with the case of non-singular measurable transformations, which are not necessarily measure-preserving. Generalizations and related questions are treated in § 5. At the end of this chapter, the a. e. convergence of discrete martingales is discussed.

In Chapter 4 the concepts of recurrency and ergodicity and those of strong and weak mixing are introduced (§ 1—4) with some important examples for these notions (§ 5). § 6 contains theorems concerning the decomposition into ergodic parts of measure spaces. § 7 discusses normal forms of measure-preserving flows, and § 8 treats the existence problem of invariant measures.

In Chapter 5 flows are studied which consist of continuous mappings of a topological space Ω into itself (topological flows). To begin with, in § 1 some results on these flows are presented, which can be proved by pure topological methods. More far-reaching results can be obtained when the measure theory of the Borel structure deduced from the topology of Ω is used. The corresponding theorems are given in § 2.

Chapter 6 is devoted essentially to the study of various topologies of the group G of all invertible measure-preserving transformations of the interval $\langle 0, 1)$, the latter being considered as a measure space with respect to Lebesgue measure. After introducing the notions of periodicity and antiperiodicity for elements of G, the notion of permutations, the strong (metric) and weak topologies of G, the author presents important density theorems (§§ 1—5). In § 6, cathegory theorem for the ergodic, weak, and strong mixing elements of G are given.

Chapter 7 deals with non stationary problems. In § 1 random ergodic theorem are proved, and § 2 is devoted to non stationary Markov processes.

In spite of its relatively short extent, the book is well-readable and the most important results of ergodic theory are presented in it with complete proofs.

I. Kovács (Szeged)