Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII
Triangulations canoniques. Fonction minimum

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Dans la Partie I de cette Note on étudiera d'abord certaines relations géométriques entre la dilatation unitaire minimum d'une contraction complètement non-unitaire T d'un espace de Hilbert et le comportement asymptotique des itérées T^n, T^{*n}. On arrivera ainsi à une classification naturelle de ces contractions et à des triangulations matricielles attachées à cette classification.

Ensuite, dans la Partie II, on introduira la classe C_0, constituée des T pour lesquelles il existe une fonction $d(z)$, holomorphe et bornée pour $|z|<1$, ne s'annulant pas identiquement et telle que $d(T)=O$. On établira, pour $T\in C_0$, l'existence d'une fonction minimum s'annulant pour T. Cette fonction joue un rôle analogue à celui du polynome minimum d'une matrice finie, elle caractérise notamment le spectre de T et permet la construction des sous-espaces invariants pour T. Ainsi, la classe C_0 généralise, dans un certain sens, la classe des contractions complètement non-unitaires des espaces de dimension finie. Dans cette partie on fera essentiellement usage du calcul fonctionnel avec des contractions, développé dans la Note VI ([4]) et de la théorie des fonctions appartenant à des classes de Hardy, notamment de l'arithmétique des fonctions intérieures, inaugurée par BEURLING [6].

Mentionnons que quelques des résultats de cette Note ont été annoncés dans [1].

PARTIE I

1. Relations géométriques entre la limite de $T^{*n}T^n$ et la dilatation unitaire minimum de T

1. Soit T une contraction complètement non-unitaire (*cf.* [2]) de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et soit U la dilatation unitaire minimum de T, opérant dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}\supseteq\mathfrak{H}$). Dans [3] on a démontré que les sous-espaces

$$(1.1)\qquad \mathfrak{L}=\overline{(U-T)\mathfrak{H}},\quad \mathfrak{L}'=\overline{(U^*-T^*)\mathfrak{H}}$$

de $\mathfrak{K}$ sont ambulants pour U. [1]) Désignons par Q et Q' les projections orthogonales

---

[1]) Rappelons qu'un sous-espace $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{K}$ est ambulant par rapport à U si $U^n\mathfrak{A}\perp\mathfrak{A}$ pour $n=1, 2, \ldots$ (*cf.* [3], p. 107).

de $\mathfrak{K}$ sur

(1.2) $$\mathfrak{M}=\mathfrak{K}\ominus(\bigoplus_{-\infty}^{\infty}U^n\mathfrak{L}),\quad \mathfrak{M}'=\mathfrak{K}\ominus(\bigoplus_{-\infty}^{\infty}U^n\mathfrak{L}'),$$

selon les cas. Désignons par P la projection orthogonale de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{H}$.
Nous allons utiliser ces notations constamment dans la suite.

2. Soit $\mathfrak{H}_1$ un sous-espace de $\mathfrak{H}$, invariant pour T, c'est-à-dire tel que $T\mathfrak{H}_1\subseteqq\mathfrak{H}_1$. $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$ est alors invariant pour T^*. Désignons par P_2 la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_2$. On a

$$P_2T^*P_2=T^*P_2,\quad P_2TP_2=P_2T$$

et par suite

(1.3) $$P_2T^nP_2=P_2T^n=(P_2T)^n\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Comme P_2T est une contraction, la suite

$$\|(P_2T)^nh\|\qquad(n=1,2,\ldots)$$

est non-croissante pour tout h fixé, $h\in\mathfrak{H}$. Par conséquent la suite

$$\|P_2T^nh\|\qquad(n=1,2,\ldots)$$

est convergente. Pour $0<m<n$ on a

(1.4) $$\|U^{-m}P_2T^mh-U^{-n}P_2T^nh\|^2=\|P_2T^mh\|^2-\|P_2T^nh\|^2$$

parce que U est unitaire et

$$(U^{-m}P_2T^mh,\,U^{-n}P_2T^nh)=(U^{n-m}P_2T^mh,\,P_2T^nh)=(T^{n-m}P_2T^mh,\,P_2T^nh)=$$
$$=(P_2T^{n-m}P_2T^mh,\,P_2T^nh)=(P_2T^{n-m}T^mh,\,P_2T^nh)=\|P_2T^nh\|^2.$$

De (1.4) il s'ensuit que la limite

(1.5) $$L_{P_2}h=\lim_{n\to\infty}U^{-n}P_2T^nh\qquad(h\in\mathfrak{H})$$

existe.

Pour tout entier fixé ν et pour tout $g\in\mathfrak{H}$ on a

$$(U^{-n}P_2T^nh,\,U^{\nu}(U-T)g)=(P_2T^nh,\,U^{n+\nu}(U-T)g)=$$
$$=(P_2T^nh,\,T^{n+\nu+1}g-T^{n+\nu}Tg)=0$$

dès que $n+\nu\geqq 0$. Par conséquent $L_{P_2}h$ est orthogonal à $U^{\nu}\mathfrak{L}$ ($\nu=0,\pm1,\pm2,\ldots$), donc

(1.6) $$L_{P_2}h\in\mathfrak{M}\qquad(h\in\mathfrak{H}).$$

Dans le cas particulier où P_2 est l'opérateur identique I de $\mathfrak{H}$ (correspondant à l'espace invariant $\mathfrak{H}_1=\{0\}$), on a

$$h-L_Ih=\sum_{n=0}^{\infty}(U^{-n}T^n-U^{-n-1}T^{n+1})h=\sum_{n=0}^{\infty}U^{-n-1}(U-T)T^nh,$$

donc $$h-L_Ih\in\bigoplus_{-\infty}^{\infty}U^n\mathfrak{L}.$$

Comme d'autre part $L_I h \in \mathfrak{M}$ en vertu de (1. 6), on conclut que

$$L_I h = Qh \qquad (h \in \mathfrak{H}). \tag{1. 7}$$

3. Soit maintenant

$$\mathfrak{H}_1 = \{h: h \in \mathfrak{H},\ T^n h \to 0\};$$

il est manifeste que $\mathfrak{H}_1$ est invariant pour T, donc nous pouvons appliquer les résultats du numéro précédent. Mais pour ce choix de $\mathfrak{H}_1$ (et de P_2) on peut dire même plus. Notamment, pour tout entier $m \geqq 0$ et pour tout $h \in \mathfrak{H}$ nous avons

$$L_I h = \lim_{n\to\infty} U^{-n-m} T^{n+m} h = \lim_{n\to\infty} [U^{-m} U^{-n} T^n P_2 T^m h + U^{-m-n} T^n (I-P_2) T^m h] =$$
$$= U^{-m} L_I P_2 T^m h,$$

parce que, par la définition de P_2, $T^n(I-P_2) \to O$. En tenant compte de (1. 7) nous obtenons

$$Qh = U^{-m} Q P_2 T^m h.$$

Or, comme $\mathfrak{M}$ réduit U, Q et U permutent, donc

$$Qh = U^{-m} Q P_2 T^m h = Q U^{-m} P_2 T^m h \qquad (h \in \mathfrak{H}). \tag{1. 8}$$

Lorsque $m \to \infty$, il s'ensuit par (1.5)

$$Qh = Q L_{P_2} h;$$

comme d'autre part on a $Q L_{P_2} h = L_{P_2} h$ en vertu de (1. 6), il résulte

$$L_{P_2} = Q|\mathfrak{H} = L_I.\ ^{2)} \tag{1. 9}$$

Dans le cas particulier $m = 1$, (1. 8) nous donne

$$UQh = QP_2 Th \qquad (h \in \mathfrak{H}), \tag{1. 10}$$

d'où, en posant

$$T_2 = P_2 T|\mathfrak{H}_2 (= (T^*|\mathfrak{H}_2)^*), \qquad Q_2 = Q|\mathfrak{H}_2,$$

il résulte

$$UQ_2 = Q_2 T_2. \tag{1. 10'}$$

De (1. 7) il s'ensuit

$$\|Qh\| = \lim_{n\to\infty} \|U^{-n} T^n h\| = \lim_{n\to\infty} \|T^n h\|,$$

ce qui montre que, pour un élément $h \in \mathfrak{H}$,

$$Qh = 0 \text{ si } h \in \mathfrak{H}_1 \text{ et dans ce cas seulement.} \tag{1. 11}$$

Ainsi, on a

$$Q\mathfrak{H} = Q(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) = Q\mathfrak{H}_2,$$

c'est-à-dire

$$Q\mathfrak{H} = Q_2 \mathfrak{H}_2. \tag{1. 12}$$

---

[2]) Si $\mathfrak{E}$ est dans le domaine de l'opérateur S, on désigne par $S|\mathfrak{E}$ la restriction de S à $\mathfrak{E}$.

En d'autres termes, (1. 11) et (1. 12) expriment que Q_2 est une application linéaire biunivoque de $\mathfrak{H}_2$ sur la variété $Q\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{M}$.

Remarquons aussi qu'en vertu de (1. 10) l'espace $\overline{Q\mathfrak{H}} = \overline{Q_2\mathfrak{H}_2}$ est invariant pour U.

4. De (1. 9) on obtient pour $h \in \mathfrak{H}$

$$PQh = \begin{cases} PL_{P_2}h = \lim\limits_{n\to\infty} PU^{*n}P_2T^nh = \lim\limits_{n\to\infty} T^{*n}P_2T^nh, \\ PL_Ih = \lim\limits_{n\to\infty} PU^{*n}T^nh = \lim\limits_{n\to\infty} T^{*n}T^nh; \end{cases}$$

puisque $T^{*n}P_2 = T_2^{*n}P_2$, $P_2T^n = P_2T^nP_2 = T_2^nP_2$ il en résulte

$$A_T^2h = PQh = A_{T_2}^2P_2h \qquad (h \in \mathfrak{H}) \tag{1. 13}$$

où
$$A_T = (\lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n)^{\frac{1}{2}}, \quad A_{T_2} = (\lim_{n\to\infty} T_2^{*n}T_2^n)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $h \in \mathfrak{H}_2$ posons

$$WQ_2h = A_{T_2}h. \tag{1. 14}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \|WQ_2h\|^2 = \|A_{T_2}h\|^2 = (A_{T_2}^2h, h) = (A_{T_2}^2P_2h, h) = \\ = (PQh, h) = (Qh, h) = \|Qh\|^2 = \|Q_2h\|^2, \end{aligned} \tag{1. 15}$$

W peut être prolongé en une application isométrique de $\overline{Q_2\mathfrak{H}_2} = \overline{Q\mathfrak{H}}$ dans $\mathfrak{H}_2$, notamment sur $\overline{A_{T_2}\mathfrak{H}_2}$. Or, $A_{T_2}h = 0$ entraîne, en vertu de (1. 15), $Qh = 0$, ce qui, à son tour, entraîne $h \in \mathfrak{H}_1$ d'après (1. 11), donc $h \in \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$, $h = 0$. Ainsi, la transformation autoadjointe A_{T_2} de $\mathfrak{H}_2$ admet une inverse (au sens large, sans être nécessairement bornée), dont le domaine est alors dense dans $\mathfrak{H}_2$, c'est-à-dire $\overline{A_{T_2}\mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H}_2$. Par conséquent W est une application unitaire de $\overline{Q\mathfrak{H}}$ *sur* $\mathfrak{H}_2$.

En vertu de (1. 10') nous avons

$$UW^{-1}WQ_2 = Q_2T_2, \quad (U|\overline{Q\mathfrak{H}})W^{-1}WQ_2 = Q_2T_2,$$

d'où il s'ensuit par (1. 14)

$$W(U|\overline{Q\mathfrak{H}})W^{-1}A_{T_2} = A_{T_2}T_2. \tag{1. 16}$$

Cela étant, nous pouvons énoncer le suivant:

Théorème 1. *Soit, pour la contraction complètement non-unitaire T de $\mathfrak{H}$,*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \quad \text{où} \quad \mathfrak{H}_1 = \{h\colon h \in \mathfrak{H}, T^nh \to 0\};$$

soit P_2 la projection de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_2$ et soit $T_2 = P_2T|\mathfrak{H}_2$ $(=(T^*|\mathfrak{H}_2)^*)$. On a alors

$$PQh = A_T^2h = A_{T_2}^2P_2h \qquad (h \in \mathfrak{H}) \tag{1. 17}$$

et

$$V_2 A_{T_2} = A_{T_2} T_2 \tag{1.18}$$

où

$$A_T = (\lim_{n\to\infty} T^{*n} T^n)^{\frac{1}{2}}, \quad A_{T_2} = (\lim_{n\to\infty} T_2^{*n} T_2^n)^{\frac{1}{2}}$$ [3])

et V_2 est une transformation isométrique de $\mathfrak{H}_2$ en soi-même, dont la dilatation unitaire minimum est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}$. De plus A_{T_2} admet une inverse, à domaine dense dans $\mathfrak{H}_2$.

Outre la liaison entre V_2 et U tous les autres énoncés ont déjà été prouvés. En ce qui concerne V_2, observons que par (1. 16)

$$V_2 = W(U|\overline{Q\mathfrak{H}})W^{-1},$$

ce qui montre que V_2 et $U|\overline{Q\mathfrak{H}}$ sont unitairement équivalentes, donc leurs dilatations unitaires minimum sont aussi unitairement équivalentes. Or il est manifeste que si $\mathfrak{M}_1$ est le sous-espace de $\mathfrak{K}$ engendré par $U^{-n}Q\mathfrak{H}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, $U|\mathfrak{M}_1$ est la dilatation unitaire minimum de $U|\overline{Q\mathfrak{H}}$. Comme $\mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{M}$, il reste seulement à prouver que $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1 = \{0\}$. Or, $\mathfrak{M}_2$ réduit U et on a $\mathfrak{M}_2 \perp \mathfrak{H}$ puisque, pour $h \in \mathfrak{H}$ et $f \in \mathfrak{M}_2$,

$$(f, h) = (Qf, h) = (f, Qh) = 0.$$

Ainsi $\mathfrak{K} \ominus \mathfrak{M}_2$ comprend $\mathfrak{H}$ et réduit U, ce qui entraîne (en vertu du fait que $\mathfrak{K}$ est l'espace de la dilatation unitaire minimum de T) que $\mathfrak{K} \ominus \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}_2 = \{0\}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Cela achève la démonstration du théorème.

En remplaçant T par T^*, Q par Q', etc., on obtient de manière analogue le

Théorème 1'. *Soit, pour la contraction complètement non-unitaire T de $\mathfrak{H}$,*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \quad \text{où} \quad \mathfrak{H}_2 = \{h : h \in \mathfrak{H}, T^{*n} h \to 0\};$$

soit P_1 la projection de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_1$ et soit $T_1 = T|\mathfrak{H}_1$. On a alors

$$PQ'h = A_{T^*}^2 h = A_{T_1^*}^2 P_1 h \qquad (h \in \mathfrak{H}) \tag{1.17'}$$

et

$$T_1 A_{T_1^*} = A_{T_1^*} V_1 \tag{1.18'}$$

où

$$A_{T^*} = (\lim_{n\to\infty} T^n T^{*n})^{\frac{1}{2}}, \quad A_{T_1^*} = (\lim_{n\to\infty} T_1^n T_1^{*n})^{\frac{1}{2}},$$

*et V_1 est une transformation *-isométrique*[4]) *de $\mathfrak{H}_1$ en soi-même, dont la dilatation unitaire minimum est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}'$. De plus, $A_{T_1^*}$ admet une inverse, à domaine dense dans $\mathfrak{H}_1$.*

[3]) Limites fortes.

[4]) C'est-à-dire que V_1^* est isométrique.

2. Une classification des contractions et des triangulations matricielles correspondantes

1. Les décompositions de l'espace $\mathfrak{H}$ considérées dans les théorèmes 1 et 1' conduisent à des triangulations matricielles et à une classification des contractions[5]).

Définition. Une contraction complètement non-unitaire T sera dite de classe

$$C_{0.}\ si\ T^n \to O; \quad C_{.0}\ si\ T^{*n} \to O;$$

$$C_{1.}:\ si\ T^n h \not\to 0\ pour\ h \neq 0; \quad C_{.1}:\ si\ T^{*n}h \not\to 0\ pour\ h \neq 0;$$

de plus soit $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha.} \cap C_{.\beta}$ $(\alpha = 0, 1;\ \beta = 0, 1)$.

Il est manifeste qu'on peut caractériser ces classes aussi moyennant les opérateurs A_T et A_{T^*}. Par exemple, $T \in C_{0.}$ si $A_T = O$, $T \in C_{1.}$ si A_T admet une inverse (au sens large), etc.

2. Voici les triangulations qui résultent si l'on applique les théorèmes 1 et 1', exprimées en termes de la classification ci-dessus.

Théorème 2. *Toute contraction complètement non-unitaire T admet des triangulations de type*

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} C_{0.} & * \\ O & C_{1.} \end{pmatrix}, \qquad \text{(a')}\quad \begin{pmatrix} C_{.1} & * \\ O & C_{.0} \end{pmatrix}$$

et

$$\text{(b)}\quad \begin{pmatrix} C_{01} & * & * & * & * \\ O & C_{00} & * & * & * \\ O & O & C_{11} & * & * \\ O & O & O & C_{00} & * \\ O & O & O & O & C_{10} \end{pmatrix}, \text{[6])}$$

les triangulations de type (a) *et* (a') *étant univoquement déterminées.*[7]) *La triangulation de type* (b) *peut être choisie de sorte que le terme C_{11} soit quasi similaire*[8]) *à une transformation unitaire W qui est unitairement équivalente à une partie de $U|\mathfrak{M}$ ainsi qu'à une partie de $U|\mathfrak{M}'$.* [9])

---

[5]) Par des raisons de commodité nous restreignons cette classification aux contractions complètement non-unitaires, bien qu'elle serait possible même sans telle restriction. D'ailleurs on sait que toute contraction se décompose de manière univoque en somme orthogonale d'une contraction complètement non-unitaire et d'une transformation unitaire; *cf.* [2].

[6]) Pour les opérateurs dans les diagonales on a indiqué seulement leurs classes; les $*$ marquent des opérateurs qu'on ne précisera pas. On fait la convention d'admettre aussi l'espace banal $\{0\}$ dont le seul opérateur $0 \to 0$ appartient à toutes nos classes. En d'autres termes, quelques éléments dans les diagonales (ensemble avec leur ligne et colonne) peuvent manquer dans (a), (a'), ou (b).

[7]) Dans [1] on a indiqué par erreur encore une triangulation; celle-ci ne s'obtient pas par nos méthodes.

[8]) Deux opérateurs bornés A et B seront dits *quasi similaires* s'il existe des opérateurs bornés X et Y admettant des inverses (non-nécessairement bornés, mais à domaines denses) tels que

$$AX = XB \quad \text{et} \quad BY = YA.$$

Dans [1] on a dit „quasi linéairement équivalent" au lieu de „quasi similaire".

[9]) Nous disons que la transformation A de l'espace $\mathfrak{A}$ fait *partie* de la transformation B de l'espace $\mathfrak{B}$, où $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A}$ réduit B et $A = B|\mathfrak{A}$.

Démonstration. Partons de la triangulation

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * \\ O & T_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \quad T_1 = T|\mathfrak{H}_1, \quad T_2 = (T^*|\mathfrak{H}_2)^*,$$

étudiée dans le théorème 1. Par définition on a alors $T_1 \in C_{0\cdot}$. En ce qui concerne T_2, remarquons que si $T_2^{*n}h \to 0$ pour un $h \in \mathfrak{H}_2$, par (1. 13) on a aussi $T^{*n}T^n h \to 0$, donc

$$\|T^n h\|^2 = (T^{*n}T^n h, h) \to 0, \quad T^n h \to 0,$$

ce qui veut dire $h \in \mathfrak{H}_1$, d'où $h=0$. Par conséquent $T_2 \in C_{1\cdot}$. De cette manière la triangulation envisagée est de type (a).

Montrons que si

$$T = \begin{pmatrix} T_1' & * \\ O & T_2' \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2', \quad T_1' = T|\mathfrak{H}_1', \quad T_2' = (T^*|\mathfrak{H}_2')^*$$

est une triangulation de T de type (a), elle nécessairement coïncide avec celle que nous venons de construire. Pour cela il suffit de prouver

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1'. \tag{2. 1}$$

Or, pour $h \in \mathfrak{H}_1'$ on a $T^n h = T_1'^n h \to 0$ parce que $T_1' \in C_{0\cdot}$. En vertu de la définition de $\mathfrak{H}_1$ cela entraîne $h \in \mathfrak{H}_1$, donc

$$\mathfrak{H}_1' \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Soit maintenant $h \in \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1'$. On a alors, d'une part, $T^n h \to 0$ parce que $h \in \mathfrak{H}_1$, d'autre part, $P_2' T^n h = T_2'^n h$ parce que $h \in \mathfrak{H}_2'$ (P_2' désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_2'$); comme $T_2' \in C_{1\cdot}$, $T_2'^n h \to 0$ entraîne $h=0$. Donc $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1' = \{0\}$, ce qui prouve (2. 1).

Nous avons ainsi démontré que toute contraction complètement non-unitaire admet une triangulation de type (a) et une seule. En ce qui concerne la triangulation de type (a′) il n'y a qu'à reproduire les considérations ci-dessus en s'appuyant cette fois-ci sur le théorème 1′ au lieu du théorème 1.

Passons au problème des triangulations de type (b). On peut partir de chacune des triangulations déjà obtenues: nous choisissons la triangulation de type (a)

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * \\ O & T_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \quad T_1 \in C_{0\cdot}, \quad T_2 \in C_{1\cdot}. \tag{2. 2}$$

Pour T_1 et T_2 prenons alors leurs triangulations de type (a′):

$$T_i = \begin{pmatrix} T_{i1} & * \\ O & T_{i2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_{i1} \oplus \mathfrak{H}_{i2}, \quad T_{i1} \in C_{\cdot 1}, \quad T_{i2} \in C_{\cdot 0} \qquad (i=1, 2). \tag{2. 3}$$

Comme $T_1 \in C_{0\cdot}$, on a aussi $T_{11} \in C_{0\cdot}$, $T_{12} \in C_{0\cdot}$. En effet, $T_1^n \to O$ entraîne $T_{11}^n \to O$ et $T_{12}^n \to O$ parce que $T_{11}^n = T_1^n|\mathfrak{H}_{11}$ et $T_{12}^n = P_{12}T_1^n|\mathfrak{H}_{12}$ où P_{12} est la projection orthogonale de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_{12}$. Par conséquent, on a

$$T_{11} \in C_{01}, \quad T_{12} \in C_{00}.$$

D'autre part, comme $T_2 \in C_{1.}$ et $T_{21} = T_2|\mathfrak{H}_{21}$, on a aussi $T_{21} \in C_{1.}$ et par conséquent

$$T_{21} \in C_{11}.$$

Prenons finalement pour T_{22} sa triangulation de type (a):

(2. 4) $$T_{22} = \begin{pmatrix} T_{221} & * \\ O & T_{222} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}_{22} = \mathfrak{H}_{221} \oplus \mathfrak{H}_{222}, \quad T_{221} \in C_{0.}, \quad T_{222} \in C_{1.};$$

vu que $T_{22}^{*n} \to O$, on aura aussi $T_{222}^{*n} = T_{22}^{*n}|\mathfrak{H}_{222} \to O$ et $T_{221}^{*n} = P_{221} T_{22}^{*n}|\mathfrak{H}_{221} \to O$, donc

(2. 5) $$T_{221} \in C_{00}, \quad T_{222} \in C_{10}.$$

En réunissant (2. 2), (2. 3) et (2. 4) nous obtenons la triangulation

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & * & * & * & * \\ O & T_{12} & * & * & * \\ O & O & T_{21} & * & * \\ O & O & O & T_{221} & * \\ O & O & O & O & T_{222} \end{pmatrix},$$

qui est de type (b).

Étudions T_{21} de plus près. Dans ce but, désignons par $\mathfrak{R}_2$ le sous-espace de $\mathfrak{R}$ engendré par $U^n\mathfrak{H}_2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Évidemment, $U|\mathfrak{R}_2$ est la dilatation unitaire minimum de T_2. Soient

$$\mathfrak{L}_2' = \overline{(U^* - T_2^*)\mathfrak{H}_2}, \quad \mathfrak{M}_2' = \mathfrak{R}_2 \ominus \left(\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_2'\right).$$

Nous allons montrer que

(2. 6) $$\mathfrak{M}_2' \subseteq \mathfrak{M}'.$$

A cet effet, observons d'abord que $\mathfrak{L}_2' \subseteq \mathfrak{L}'$. Soit alors $l' \in \mathfrak{L}' \ominus \mathfrak{L}_2'$. Pour tout $h_2 \in \mathfrak{H}_2$ et tout entier ν on a

(2. 7) $$(h_2, U^\nu l') = ((U^* - T^*)h_2, U^{\nu-1} l') + (T^* h_2, U^{\nu-1} l') = (T_2^* h_2, U^{\nu-1} l')$$

puisque $T_2^* = T^*|\mathfrak{H}_2$ et

$$((U^* - T_2^*)h_2, U^{\nu-1} l') = 0$$

(le cas $\nu \neq 1$ s'ensuit de ce que $\mathfrak{L}'$ est ambulant, et le cas $\nu = 1$ de ce que $l' \perp \mathfrak{L}_2'$). De (2. 7) nous obtenons par récurrence

(2. 8) $$(h_2, U^\nu l') = (T_2^{*k} h_2, U^{\nu-k} l') \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Or, d'après le théorème 1 (ii) de [3], nous avons $\mathfrak{H} \perp U^\mu \mathfrak{L}'$ pour $\mu \leqq 0$. En prenant $k \geqq \nu$ dans (2. 8) nous obtenons donc $(h_2, U^\nu l') = 0$. Cela veut dire que $\mathfrak{H}_2 \perp U^\nu(\mathfrak{L}' \ominus \mathfrak{L}_2')$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), d'où il résulte de manière évidente

$$\mathfrak{R}_2 \perp \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n (\mathfrak{L}' \ominus \mathfrak{L}_2').$$

Comme
$$\mathfrak{K} = (\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n(\mathfrak{L}' \ominus \mathfrak{L}_2')) \oplus (\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_2') \oplus \mathfrak{M}',$$
on obtient
$$(\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_2') \oplus \mathfrak{M}_2' = \mathfrak{K}_2 \subseteqq (\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{L}_2') \oplus \mathfrak{M}',$$
ce qui entraîne (2. 6).

Appliquons maintenant à T_2 et T_{21} le théorème 1'. Nous obtenons

$$T_{21}X = XW \tag{2. 9}$$

où $X = A_{T_{21}^*}$ et W est *-isométrique, ayant la dilatation unitaire minimum unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}_2'$. Montrons que W est même une transformation unitaire de $\mathfrak{H}_{21}$. En effet, en cas contraire il existe un $h \in \mathfrak{H}_{21}$, $h \neq 0$, tel que $Wh = 0$ et en vertu de (2. 9) $T_{21}^n Xh = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Comme $T_{21} \in C_{11}$, cela entraîne $Xh = 0$, et comme $X = A_{T_{21}^*}$ admet une inverse, il résulte $h = 0$, en contradiction avec l'hypothèse faite. Ainsi W est unitaire. Par conséquent W coïncide avec sa dilatation unitaire minimum dont on sait déjà qu'elle est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}_2'$. Or, $U|\mathfrak{M}_2'$ est évidemment une partie de $U|\mathfrak{M}'$. On conclut que W est unitairement équivalente à une partie de $U|\mathfrak{M}'$.

Pour continuer l'étude de T_{21}, rappelons qu'en vertu du théorème 1 nous avons

$$V_2 A_{T_2} = A_{T_2} T_2 \tag{2. 10}$$

où V_2 est une transformation isométrique dont la dilatation unitaire minimum est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}$; de plus A_{T_2} admet une inverse à domaine dense dans $\mathfrak{H}_2$. Posons

$$A = A_{T_2}|\mathfrak{H}_{21}, \quad \mathfrak{H}' = \overline{A\mathfrak{H}_{21}} = \overline{A_{T_2}\mathfrak{H}_{21}}, \quad V = V_2|\mathfrak{H}';$$

en vertu de (2. 10), $\mathfrak{H}'$ est invariant pour V_2, donc V est un opérateur isométrique de $\mathfrak{H}'$. En prenant les restrictions à $\mathfrak{H}_{21}$, on obtient de (2. 10)

$$VA = AT_{21}. \tag{2. 11}$$

Cette relation entraîne que V est même unitaire. En effet, en cas contraire on a un $h \in \mathfrak{H}'$, $h \neq 0$, tel que $V^*h = 0$; en vertu de (2. 11) on a alors

$$T_{21}^* A^* h = (AT_{21})^* h = (VA)^* h = A^* V^* h = 0, \quad T_{21}^{*n} A^* h = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

d'où, comme $T_{21} \in C_{11}$, il résulte $A^*h = 0$, donc $h \perp \overline{A\mathfrak{H}_{21}} = \mathfrak{H}'$. Cela contredit nos hypothèses sur h. De cette manière, V est unitaire, et par conséquent V est une partie de V_2, ainsi que de la dilatation unitaire minimum de V_2, qui, à son tour, est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}$. Ainsi, V est unitairement équivalente à une partie de $U|\mathfrak{M}$.

De (2. 9) et (2. 11) il résulte

$$VAX = AT_{21}X = AXW, \quad VB = BW \tag{2. 12}$$

où $B = AX$ est une transformation linéaire bornée de $\mathfrak{H}_{21}$ dans $\mathfrak{H}'$. Comme X et A_{T_2} admettent des inverses, B admet aussi une inverse, et comme $\overline{X\mathfrak{H}_{21}} = \mathfrak{H}_{21}$,

$\overline{A\mathfrak{H}_{21}} = \mathfrak{H}'$, on a $\overline{B\mathfrak{H}_{21}} = \mathfrak{H}'$, donc B^{-1} a domaine dense dans $\mathfrak{H}'$. Envisageons la transformation $|B| = (B^*B)^{\frac{1}{2}}$; elle est autoadjointe dans $\mathfrak{H}_{21}$ et comme $\| |B|h \| = \|Bh\|$ pour tout $h \in \mathfrak{H}_{21}$, $|B|h = 0$ entraîne $Bh = 0$, donc $h = 0$; par conséquent $|B|$ admet une inverse et $\overline{|B|\mathfrak{H}_{21}} = \mathfrak{H}_{21}$. De plus, on définit par

$$Bh = C|B|h \qquad (h \in \mathfrak{H}_{21})$$

une application isométrique C de $|B|\mathfrak{H}_{21}$ sur $B\mathfrak{H}_{21}$, qui se complète par continuité à une application unitaire de $\mathfrak{H}_{21}$ sur $\mathfrak{H}'$. De (2. 12) il s'ensuit successivement, vu que W est unitaire dans $\mathfrak{H}_{21}$ et V est unitaire dans $\mathfrak{H}'$,

$$BW^* = V^*B, \quad WB^* = B^*V, \quad WB^*B = B^*VB = B^*BW, \quad W|B| = |B|W,$$

$$VC|B| = VB = BW = C|B|W = CW|B|, \quad (VC - CW)|B| = O,$$

d'où on conclut $VC - CW = O$, $VC = CW$. Cela veut dire que V et W sont unitairement équivalentes. Comme V est unitairement équivalente à une partie de $U|\mathfrak{M}$, il en est de même pour W.

En multipliant les membres de (2. 11) par C^{-1} et en posant $Y = C^{-1}A$ nous obtenons

$$WY = YT_{21};$$

Y transforme $\mathfrak{H}_{21}$ dans $\mathfrak{H}_{21}$, admet une inverse (non nécessairement bornée), dont le domaine est dense dans $\mathfrak{H}_{21}$, parce que

$$\overline{Y\mathfrak{H}_{21}} = \overline{C^{-1}A\mathfrak{H}_{21}} = C^{-1}\overline{A\mathfrak{H}_{21}} = C^{-1}\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_{21}.$$

Cette relation et (2. 9) montrent que T_{21} et W sont quasi similaires, ce qui achève la démonstration du théorème.

3. La dernière partie du théorème 2 peut être précisée dans le cas où T elle même est de classe C_{11}. Notamment on a le

Théorème 3. *Soit $T \in C_{11}$. Dans ce cas $U|\mathfrak{M}$ et $U|\mathfrak{M}'$ sont unitairement équivalentes et T est quasi similaire à chacune de ces transformations.*

Démonstration. Appliquons à T les théorèmes 1 et 1' en tenant compte de ce que

$$\{h: h \in \mathfrak{H}, T^n h \to 0\} = \{0\} = \{h: h \in \mathfrak{H}, T^{*n} h \to 0\}.$$

Nous obtenons

$$A_T T = VA_T, \quad TA_{T^*} = A_{T^*}V' \tag{2. 13}$$

où V est isométrique, V' est $*$-isométrique, A_T et A_{T^*} admettent des inverses à domaines denses. En reproduisant pour T la partie de la démonstration du théorème 2 concernant T_{21} on obtient que V et V' sont unitaires et unitairement équivalentes. De plus en vertu des théorèmes 1 et 1' V est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}$, tandis que V' est unitairement équivalente à $U|\mathfrak{M}'$. Ces équivalences unitaires et les relations (2. 13) entraînent le théorème 3.

PARTIE II

3. La classe C_0

Soit H^∞ la classe des fonctions complexes, holomorphes et bornées dans le disque unité $D=\{z\colon |z|<1\}$. Dans [4], § 1 on a défini l'opérateur $u(T)$, quelle que soit la fonction $u\in H^\infty$ et la contraction complètement non-unitaire T. Rappelons cette définition. Pour

$$(3.1)\qquad u(z) = \sum_0^\infty c_k z^k \quad \text{avec} \quad \sum |c_k| < \infty$$

(qui évidemment appartient à H^∞) on pose

$$u(T) = \sum_0^\infty c_k T^k \qquad (\text{où } T^0=I).$$

Pour $u(z)\in H^\infty$ quelconque, $u_r(z)=u(rz)$ $(0<r<1)$ est de type que nous venons d'envisager, donc $u_r(T)$ se trouve déjà défini. On montre que

$$\lim_{r\to 1} u_r(T)$$

existe au sens de la convergence forte des opérateurs et c'est par cette limite qu'on définit $u(T)$.

Théorème 4. *Soit T une contraction complètement non-unitaire telle que $d(T)=O$ pour une certaine fonction $d\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$. On a alors $T^n\to O$ et $T^{*n}\to O$, c'est-à-dire que $T\in C_{00}$.*

Démonstration. En utilisant les notations du § 1, écrivons la première relation (1.8) pour $h=P_2 g$ $(g\in\mathfrak{H})$:

$$QP_2 g = U^{-m}QP_2 T^m P_2 g \qquad (m=0, 1, \ldots),$$

d'où

$$U^m QP_2 = QP_2 T^m P_2 \qquad (m=0, 1, \ldots).$$

Cela entraîne

$$(3.2)\qquad u(U)QP_2 = QP_2 u(T)P_2$$

pour toute fonction de type (3.1), où

$$u(U) = \sum_0^\infty c_k U^k = \int_0^{2\pi} u(e^{it})\, dE_t,$$

$\{E_t\}_{0\leqq t\leqq 2\pi}$ étant la famille spectrale de U. D'après le théorème 2 de [2] cette famille est absolument continue, c'est-à-dire que $(E_t k, k)$ est une fonction absolument continue de t, quel que soit $k\in\mathfrak{K}$. Par conséquent l'opérateur

$$d(U)=\int_0^{2\pi} d(e^{it})\, dE_t$$

(où $d(e^{it})=\lim_{r\to 1} d(re^{it})$ existe presque partout en vertu du théorème de Fatou) est bien défini. De plus, on a en vertu du théorème de convergence de Lebesgue et grâce à la continuité absolue de $(E_t k, k)$,

$$\|d(U)k-d_r(U)k\|^2=\int_0^{2\pi}|d(e^{it})-d_r(e^{it})|^2\,d(E_t k,k)\to 0 \qquad (k\in\mathfrak{K}),$$

donc $d_r(U)\to d(U)$ fortement pour $r\to 1-0$. Ainsi, en posant $u=d_r$ dans (3. 2) et en faisant $r\to 1-0$ nous obtenons

$$d(U)QP_2=QP_2d(T)P_2=O. \tag{3. 3}$$

Mais comme $d(e^{it})\neq 0$ presque partout (puisque $d\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$) et comme $(E_t k, k)$ est une fonction absolument continue de t pour tout $k\in\mathfrak{K}$,

$$\int_0^{2\pi}|d(e^{it})|^2\,d(E_t k,k)=0 \quad\text{entraîne}\quad \|k\|^2=\int_0^{2\pi}d(E_t k,k)=0.$$

Or, la première intégrale, étant égale à $\|d(U)k\|^2$, s'annule, en vertu de (3. 3), pour tout $k\in QP_2\mathfrak{H}$, ce qui entraîne $QP_2=O$. En vertu de (1. 7) on a donc

$$L_I h=Qh=QP_2h=0$$

pour tout $h\in\mathfrak{H}_2$, d'où

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n h\|=\lim_{n\to\infty}\|U^{-n}T^n h\|=\|L_I h\|=0,$$

donc $h\in\mathfrak{H}_1$. Ainsi, $h\in\mathfrak{H}_1\cap\mathfrak{H}_2$, $h=0$. Cela veut dire que $\mathfrak{H}_2=\{0\}$, $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}$, donc $T^n\to O$. En échangeant les rôles de T et T^* et en remarquant que

$$d^\sim(T^*)=(d(T))^*=O$$

où $d^\sim(z)=\overline{d(\bar z)}\in H^\infty$, on obtient que $T^{*n}\to O$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.

Corollaire. *Soit T une contraction complètement non-unitaire et soit $d\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$. On a alors*

$$\{h\colon d(T)h=0\}\subseteqq\mathfrak{H}_1=\{h\colon T^n h\to 0\}.$$

Démonstration. Désignons par $\mathfrak{H}_1'$ le sous-espace formé des éléments h tels que $d(T)h=0$; $\mathfrak{H}_1'$ est évidemment invariant pour T. Soit $T_1'=T|\mathfrak{H}_1'$; pour toute fonction $u\in H^\infty$ on a alors $u(T_1')=u(T)|\mathfrak{H}_1'$. Par conséquent $d(T_1')=O$, donc $T_1'^n\to O$, c'est-à-dire $T^n h\to 0$ pour tout $h\in\mathfrak{H}_1'$, ce qui achève la démonstration.

La classe des contractions envisagées dans le théorème 4 mérite une étude approfondie, ce qui fera l'objet des paragraphes suivantes de cette Note. Pour commodité de langage faisons la

Définition. On appellera C_0 la classe des contractions complètement non unitaires T pour lesquelles il existe une fonction $d\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$, telle que $d(T)=O$.

Le théorème 4 s'exprime alors par la formule

$$C_0\subseteqq C_{00}.$$

Il convient d'observer que la classe C_0 comprend une vaste variété d'opérateurs. En effet, *pour toute fonction $u(z)\in H^\infty$, $u(z)\not\equiv 0$, qui n'est pas extérieure*[10]) *(et pour ces fonctions seulement) on peut trouver une contraction complètement non-unitaire T d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}\neq\{0\}$, telle que $u(T)=O$.*

C'est une conséquence du théorème 2 de [4], *voir* aussi [5]. Un résultat plus précis sera obtenu dans le paragraphe 5 (théorème 6).

4. L'existence de la fonction minimum

Le but de ce paragraphe est de montrer que parmi les fonctions qui s'annulent pour T, où $T\in C_0$, il y a une qu'on peut désigner *fonction minimum*, tout comme parmi les polynomes qui s'annulent pour un opérateur d'un espace de dimension finie il existe un polynome minimum.

1. Nous commençons par établir deux lemmes sur les fonctions de la classe H^∞.

Lemme 1. *Soient u, v deux fonctions intérieures et soit w leur plus grand diviseur commun intérieur*[10]). *Soit $f(t)$ une fonction intégrable* $(0\leqq t\leqq 2\pi)$, *pour laquelle*

$$\int_0^{2\pi} u(e^{it})f(t)e^{int}\,dt=0 \quad \textit{et} \quad \int_0^{2\pi} v(e^{it})f(t)e^{int}\,dt=0 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

On a alors aussi

$$\int_0^{2\pi} w(e^{it})f(t)e^{int}\,dt=0 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Démonstration. En vertu des hypothèses faites, les fonctions $f_1(t)=$ $=u(e^{it})f(t)e^{-it}$, $f_2(t)=v(e^{it})f(t)e^{-it}$ sont intégrables et leurs séries de Fourier sont de la forme

$$f_k(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty} c_{kn}e^{int} \qquad (k=1, 2).$$

Les fonctions

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{kn}z^n \qquad (k=1, 2)$$

appartiennent alors à la classe H^1 de Hardy dans le cercle unité et on a

$$F_k(e^{it})=\lim_{r\to 1-0} F_k(re^{it})=f_k(t) \quad \text{p. p.} \qquad (k=1, 2).$$

La fonction $D(z) = F_1(z)v(z)-F_2(z)u(z)$ appartient aussi à H^1 et sa valeur limite $D(e^{it})$ est évidemment égale à 0 p. p. Cela entraîne $D(z)\equiv 0$, $F_1v=F_2u$, ou encore, en posant $u/w=u_0$ et $v/w=v_0$,

(4. 1) $$F_1v_0=F_2u_0.$$

---

[10]) Pour les notions: fonction intérieure, fonction extérieure, diviseurs communs de fonctions intérieures, etc., nous renvoyons le lecteur au Mémoire [6] ou à la monographie [7].

Mettant à part le cas banal où $f(t)$ s'annule p. p., $f_1(t)$ et $f_2(t)$ ne s'annulent pas p. p. et par conséquent $F_1(z)$ et $F_2(z)$ ne s'annulent pas identiquement. Soient $F_1^i(z)$ et $F_2^i(z)$ leurs facteurs intérieurs; de (4. 1) on obtient $F_1^i v_0 = F_2^i u_0$. Comme u_0 et v_0 n'ont pas de diviseur commun intérieur non constant, il s'ensuit que u_0 divise F_1^i et par conséquent u_0 divise F_1. On a donc $G = F_1/u_0 \in H^1$. Or

$$G(e^{it}) = F_1(e^{it})/u_0(e^{it}) = u(e^{it})f(t)e^{-it}/u_0(e^{it}) = w(e^{it})f(t)e^{-it},$$

d'où
$$\int_0^{2\pi} w(e^{it})f(t)e^{int}\,dt = \int_0^{2\pi} G(e^{it})e^{i(n+1)t}\,dt = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 2. *Soit $\{u_n(z)\}$ une suite uniformément bornée de fonctions $\in H^\infty$, tendant vers 0 dans D. On a alors*

$$\int_0^{2\pi} u_n(e^{it})f(t)\,dt \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{4. 2}$$

pour toute fonction intégrable $f(t)$.

Démonstration. Les fonctions $u_n(z)z^{\nu-1}$ $(n=1, 2, \ldots; \nu$ entier quelconque) étant régulières pour $0 < |z| < 1$, on a

$$\int_0^{2\pi} u_n(e^{it})e^{i\nu t}\,dt = \lim_{r\to 1-0} \int_0^{2\pi} u_n(re^{it})r^\nu e^{i\nu t}\,dt = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{i} \int_{|z|=r} u_n(z)z^{\nu-1}\,dz =$$
$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} u_n(z)z^{\nu-1}\,dz;$$

or la dernière intégrale tend vers 0 lorsque $n\to\infty$ parce que $u_n(z)$ tend vers 0 tout en restant bornée par une constante indépendante de n et z. Ainsi, (4. 2) est vérifié par $f(t) = e^{i\nu t}$ pour ν entier quelconque et par conséquent (4. 2) est vérifié par tout polynome trigonométrique. Comme toute fonction intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ peut être approchée, dans la métrique de l'espace $L^1(0, 2\pi)$, par un polynome trigonométrique, aussi près que l'on veut, (4. 2) sera vrai pour $f(t)$ intégrable quelconque.

2. Voici des conséquences de ces lemmes, dont on fera usage tout à l'heure.

Lemme 1'. *Soient $u(z), v(z)$ deux fonctions intérieures telles que $u(T)=O$, $v(T)=O$ pour une contraction complètement non-unitaire T. Si $w(z)$ est le plus grand diviseur commun intérieur de $u(z)$ et $v(z)$, on a aussi $w(T)=O$.*

Démonstration. Soit U la dilatation unitaire minimum de T et soit $\{E_t\}$ la famille spectrale de U; en vertu de [2] E_t est fonction absolument continue de t. Fixons deux éléments quelconques h et g de l'espace $\mathfrak{H}$ où T opère; on aura

$$f(t) = d(E_t h, g)/dt \in L^1(0, 2\pi).$$

Comme $u(T)=O$, on a pour $n=0, 1, 2, \ldots$:

$$0=(T^n u(T)h, g)=(U^n u(U)h, g)=\int_0^{2\pi} e^{int}u(e^{it})\,d(E_t h, g)=\int_0^{2\pi} e^{int}u(e^{it})f(t)\,dt$$

et analoguement

$$0=(T^n v(T)h, g)=\int_0^{2\pi} e^{int}v(e^{it})f(t)\,dt.$$

En vertu du lemme 1 on a alors aussi

$$(w(T)h, g)=\int_0^{2\pi} w(e^{it})\,d(E_t h, g)=\int_0^{2\pi} w(e^{it})f(t)\,dt=0.$$

Comme h, g étaient arbitraires, cela donne $w(T)=O$.

Lemme 2'. *Soit $\{u_n(z)\}$ une suite uniformément bornée de fonctions $\in H^\infty$, convergeant vers* 0 *dans D. On a alors*

$$u_n(T)\rightharpoonup O \quad \text{(convergence faible)}$$

pour toute contraction complètement non-unitaire T.

Démonstration. En désignant toujours par U la dilatation unitaire minimum de T et par $\{E_t\}$ sa famille spectrale, on a, pour tout couple h, g d'éléments de l'espace de T,

$$(u_n(T)h, g)=(u_n(U)h, g)=\int_0^{2\pi} u_n(e^{it})\,d(E_t h, g)=\int_0^{2\pi} u_n(e^{it})f(t)\,dt$$

où $f(t)=d(E_t h, g)/dt$. En vertu du lemme 2 la dernière intégrale tend vers 0, ce qui prouve que $u_n(T)\rightharpoonup O$.

3. Cela étant, nous sommes à même de prouver le théorème sur l'existence de la fonction minimum:

Théorème 5. *Soit $T\in C_0$. Il existe alors une fonction $m_T(z)$, univoquement déterminée à un facteur constant de module* 1 *près, telle que*

(i) *$m_T(z)$ est une fonction intérieure,*
(ii) *$m_T(T)=O$,*
(iii) *$m_T(z)$ divise (dans H^∞) toute autre fonction $u(z)$ telle que $u(T)=O$.*

Démonstration. Comme $T\in C_0$, il existe une fonction $d(z)\in H^\infty$, $d(z)\not\equiv 0$, telle que $d(T)=O$. Soit $d(z)=d^e(z)d^i(z)$ la décomposition de $d(z)$ en produit de ses facteurs extérieur et intérieur. On a $d^e(T)d^i(T)=d(T)=O$ et comme, en vertu du théorème 2 de [4], $d^e(T)$ admet une inverse on a aussi $d^i(T)=O$. Désignons par $\mathfrak{J}$ la classe des fonctions intérieures $u(z)$ telles que $u(T)=O$; on a $d^i\in\mathfrak{J}$, donc $\mathfrak{J}$ n'est pas vide.

Fixons un point $a\in D$ où $d^i(a)\neq 0$ et posons

$$s=\sup\{|u(a)|: u\in\mathfrak{J}\};$$

on a $s \geqq |d^i(a)| > 0$. Choisissons une suite $\{u_n(z)\}$ dans $\mathfrak{J}$ telle que $|u_n(a)| \to s$; en vertu du théorème de VITALI—MONTEL on peut même supposer que cette suite converge dans tout point $z \in D$ vers une limite $v(z)$ et cela uniformément dans tout domaine $|z| \leqq \varrho < 1$. $v(z)$ appartient évidemment à H^∞, on a même $|v(z)| \leqq 1$; de plus $|v(a)| = s$. En appliquant le lemme 2′ à la suite $\{u_n - v\}$ on obtient

$$(u_n - v)(T) \rightharpoonup O, \quad \text{donc} \quad u_n(T) \rightharpoonup v(T).$$

Comme $u_n(T) = O$ pour tout n, on a aussi $v(T) = O$. Soit $v = v^e v^i$ la factorisation de v en ses facteurs extérieur et intérieur. Alors $v^i(T) = O$, donc $v^i \in \mathfrak{J}$ et par conséquent $|v^i(a)| \leqq s$. Comme $|v(z)| \leqq 1$, on a aussi $|v^e(z)| \leqq 1$ et par suite

$$s = |v(a)| = |v^e(a)|\,|v^i(a)| \leqq |v^e(a)|\, s \leqq s,$$

d'où il résulte que $|v^e(a)| = 1$; par conséquent $v^e(z)$ est une constante, de module 1. Ainsi $v(z)$ est elle même une fonction intérieure, $v \in \mathfrak{J}$, $|v(a)| = s$.

Soit $u \in H^\infty$ quelconque, $u(z) \not\equiv 0$, $u(T) = O$, et soit u^i le facteur intérieur de u; on a alors aussi $u^i \in \mathfrak{J}$. Soit w le plus grand diviseur commun intérieur de v et u^i. D'après le lemme 1′ on a aussi $w \in \mathfrak{J}$. Comme v/w est intérieure et par conséquent $|(v/w)(a)| \leqq 1$, on a

$$s = |v(a)| = \left|\frac{v}{w}(a)\right| |w(a)| \leqq \left|\frac{v}{w}(a)\right| s \leqq s,$$

ce qui n'est possible que si $|(v/w)(a)| = 1$ qui, à son tour, entraîne que v/w est une constante égale en module à 1. Cela veut dire que v est un diviseur de u^i et par conséquent aussi de u.

Ainsi, v jouit des propriétés (i)—(iii) de la *fonction minimum* m_T. L'unicité à un facteur constant près, de module 1, s'ensuit du fait évident que deux fonctions intérieures dont chacune divise l'autre, ne diffèrent qu'en un facteur constant près, égal en module à 1.

4. Un fait connu dans l'algèbre linéaire est que deux matrices finies similaires ont les mêmes polynomes minimum. Nous allons démontrer un fait analogue pour les fonctions minimum des contractions. Commençons par introduire une notion utile:

Définition. S_1 étant une transformation linéaire bornée dans l'espace $\mathfrak{H}_1$ et S_2 une autre dans l'espace $\mathfrak{H}_2$, on dit que S_2 est la *transformée quasi affine* de S_1 lorsqu'il existe une transformation linéaire bornée X de l'espace $\mathfrak{H}_2$ dans l'espace $\mathfrak{H}_1$, admettant une inverse (au sens large), à domaine dense dans $\mathfrak{H}_1$, et pour laquelle $XS_2 = S_1X$, c'est-à-dire que $S_2 = X^{-1}S_1X$.

Cela étant, démontrons la proposition suivante:

Soient T_1 et T_2 deux contractions complètement non-unitaires dont T_2 est une transformée quasi affine de T_1. Si l'une de ces contractions est de la classe C_0 il en est de même de l'autre et leurs fonctions minimum coïncident.

Démonstration. La relation $XT_2 = T_1X$ entraîne $XT_2^n = T_1^nX$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ et par conséquent $Xu(T_2) = u(T_1)X$ pour toute fonction $u(z) \in H^\infty$. Lorsque $T_1 \in C_0$, on a donc $Xm_{T_1}(T_2) = m_{T_1}(T_1)X = O$; vu que X admet une inverse cela entraîne $m_{T_1}(T_2) = O$, donc $T_2 \in C_0$ et $m_{T_2}(z)$ est un diviseur de $m_{T_1}(z)$. Inversement, $T_2 \in C_0$ entraîne $m_{T_2}(T_1)X = Xm_{T_2}(T_2) = O$ et, vu que $\overline{X\mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H}_1$, $m_{T_2}(T_1) = O$;

donc $T_1 \in C_0$ et $m_{T_1}(z)$ est un diviseur de $m_{T_2}(z)$. On voit donc que si l'une des contractions appartient à C_0, y appartiennent toutes les deux et leurs fonctions minimum se divisent mutuellement, et par conséquent ces fonctions minimum coïncident.

Ce résultat montre en particulier que *la fonction minimum est invariante par rapport à une quasi similitude.*

5. Contraction ayant une fonction minimum donnée

Nous avons déjà remarqué que pour toute fonction $u(z) \in H^\infty$, $u(z) \not\equiv 0$, qui n'est pas extérieure, il existe une contraction complètement non-unitaire T telle que $u(T) = O$. Or, on peut affirmer même plus:

Théorème 6. *Pour toute fonction intérieure donnée $w(z)$ il existe une contraction complètement non-unitaire $T \in C_0$ d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H} \neq \{0\}$, telle que la fonction minimum de T est égale à $w(z)$.*

Démonstration. Envisageons l'espace de Hilbert H^2 des fonctions numériques $h(e^{it}) \in L^2(0, 2\pi)$ telles que

$$h(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{ikt}.$$

Soit wH^2 la variété linéaire dans H^2 formée par les fonctions de la forme $w(e^{it})h(e^{it})$ $(h \in H^2)$; comme $|w(e^{it})| = 1$ p. p., wH^2 est fermée, donc un sous-espace de H^2. D'après un théorème de Beurling [6], wH^2 ne coïncide pas avec H^2; pour qu' une fonction $h \in H^2$ appartienne à wH^2 il faut et il suffit notamment que le facteur intérieur de h soit divisible par la fonction intérieure w. Posons

$$\mathfrak{H} = H^2 \ominus wH^2.$$

Désignons par U la multiplication dans H^2 par e^{it} et par T la transformation de $\mathfrak{H}$ définie par $T = PU|\mathfrak{H}$ où P est la projection orthogonale de H^2 sur $\mathfrak{H}$. U est isométrique dans H^2, donc T est une contraction de $\mathfrak{H}$: Comme wH^2 est invariant pour U, on voit facilement que

$$T^n = PU^n|\mathfrak{H} \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{5. 1}$$

Pour U^* on a

$$U^* \sum_0^\infty h_k e^{ikt} = \sum_0^\infty h_{k+1} e^{ikt},$$

d'où il s'ensuit que $U^{*n} \to O$ et, en vertu de la définition de T, $T^{*n} = U^{*n}|\mathfrak{H} \to O$ $(n \to \infty)$. Ainsi, U et T sont complètement non-unitaires; de plus (5. 1) entraîne

$$u(T) = Pu(U)|\mathfrak{H}$$

pour toute fonction $u \in H^\infty$ où, évidemment, $u(U)$ est l'opérateur de la multiplication par $u(e^{it})$ dans H^2.

En particulier on a donc $w(T)h = P\, w(e^{it})h(e^{it})$ $(h \in \mathfrak{H})$. Or, comme $wh \in wH^2$, il résulte $w(T)h = 0$, donc $w(T) = O$.

Soit $u \in H^\infty, u(z) \not\equiv 0$, telle que $u(T)=O$, c'est-à-dire que $P u(e^{it})h(e^{it}) = = u(T)h = 0$, $uh \in wH^2$, pour toute fonction $h \in \mathfrak{H}$. Choisissons en particulier

$$h = 1 - \overline{w}_0 w;$$

h appartient à $\mathfrak{H}$ puisqu'on a d'une part $h \in H^2$, d'autre part $h \perp wH^2$; en effet,

$$(wg, h) = (wg, 1 - \overline{w}_0 w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [w(e^{it})g(e^{it}) - w_0 g(e^{it})]\, dt =$$

$$= (wg)_0 - w_0 g_0 = w_0 g_0 - w_0 g_0 = 0$$

pour toute fonction $g \in H^2$. (Ici on a fait usage de ce que $|w(e^{it})| = 1$ p. p.) $u(T) = O$ entraîne donc en particulier que

$$u(1 - \overline{w}_0 w) \in wH^2,$$

d'où
$$u \in wH^2;$$

en vertu du théorème cité de BEURLING le facteur intérieur de u est donc divisible par la fonction intérieure w et par conséquent u est divisible (dans H^∞) par w.

De cette façon, nous avons démontré que la fonction minimum de T est égale à la fonction intérieure w donnée.

6. Relations entre la fonction minimum et le spectre

1. Un fait connu dans l'algèbre linéaire est que le polynome minimum d'une matrice a pour ses zéros exactement les racines caractéristiques de la matrice. On va établir un fait analogue pour la classe C_0.

Théorème 7. *Soient $m_T(z)$ la fonction minimum et $\sigma(T)$ le spectre de la contraction T de classe C_0. Soit S l'ensemble formé par les zéros de $m_T(z)$ dans $D = \{z : |z| < 1\}$ et par le complémentaire dans $C = \{z : |z| = 1\}$ de la réunion des arcs ouverts de C sur lesquels $m_T(z)$ est analytique (c'est-à-dire à travers desquels elle peut être prolongée analytiquement). On a alors $\sigma(T) = S$.*

Démonstration. Soit λ un point de $D \cup C$ n'appartenant pas à S. On a $m_T(\lambda) \neq 0$; en effet, si $\lambda \in D$ cela est assuré par la définition de S et si $\lambda \in C$ cela vient de ce que, $m_T(z)$ étant une fonction intérieure, on a $|m_T(e^{it})| = 1$ p. p., donc en particulier en tout point $e^{it} \in C$ où $m_T(z)$ est analytique. Soit

$$u(z) = \frac{1}{z-\lambda} [m_T(z) - m_T(\lambda)].$$

Évidemment, $u(z) \in H^\infty$ et par suite on a en vertu du calcul fonctionnel pour les contractions

$$(\lambda I - T)\, u(T) = u(T)(\lambda I - T) = -m_T(T) + m_T(\lambda) I = m_T(\lambda) I.$$

Cela montre que $\lambda I-T$ admet une inverse bornée, notamment

$$(\lambda I-T)^{-1}=\frac{u(T)}{m_T(\lambda)},$$

donc λ n'appartient pas à $\sigma(T)$. Ainsi, nous avons démontré

$$\sigma(T)\subseteqq S. \tag{6. 1}$$

Soit maintenant $\lambda\in D$ tel que $m_T(\lambda)=0$. On a alors

$$m_T(z)=\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\,n(z)$$

avec $n(z)$ intérieure. En vertu du calcul fonctionnel on a donc

$$(T-\lambda I)n(T)=(I-\bar{\lambda}T)m_T(T)=O;$$

si λ n'appartenait pas à $\sigma(T)$ cela entraînerait $n(T)=O$ et par conséquent $m_T(z)$ devrait être un diviseur de $n(z)$ ce qui, évidemment, n'est pas le cas. Donc $\lambda\in\sigma(T)$. Ainsi nous avons

$$S\cap D\subseteqq\sigma(T). \tag{6. 2}$$

Reste à prouver $S\cap C\subseteqq\sigma(T)$ ou, ce qui revient au même,

$$C-S\supseteqq\varrho(T)\cap C \tag{6. 3}$$

où $\varrho(T)$ désigne l'ensemble résolvant de T.

Partons de la factorisation canonique de $m_T(z)$ comme fonction intérieure,

$$m_T(z)=B(z)\cdot\exp\left(-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right) \tag{6. 4}$$

où $B(z)$ est un produit de Blaschke et μ est une mesure non-négative singulière (*voir* [7]). Pour établir (6. 3) il faut démontrer que si un arc ouvert α de C est contenu dans $\varrho(T)$, $m_T(z)$ est analytique sur α. Tout point de α étant à distance positive de $\sigma(T)$, il s'ensuit de (6. 2) que les zéros de $m_T(z)$ ne peuvent s'accumuler à aucun point de α. Cela assure que $B(z)$ est analytique sur α. Donc il suffit d'envisager le second facteur. Celui-ci sera analytique sur α si la mesure μ portée par α ou plutôt par l'intervalle i_α qui correspond à α par l'application $e^{it}\to t$, est égale à 0.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\mu(i_\alpha)>0$. Il existe alors un sous-arc fermé β de α tel que $\mu(i_\beta)>0$. Envisageons la factorisation suivante de $m_T(z)$:

$$m_T(z)=m_1(z)m_2(z)\quad\text{où}\quad m_1(z)=\exp\left(-\int_{i_\beta}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right); \tag{6. 5}$$

les facteurs sont évidemment des fonctions intérieures. Puisque $|m_1(0)|=$ $=\exp\left(-\mu(i_\beta)\right)<1$, $m_1(z)$ n'est pas constante. D'autre part, $m_T(z)$ ne peut être un multiple numérique de $m_1(z)$ parce que, en cas contraire, S serait compris dans β, donc en vertu de (6. 1) on aurait $\sigma(T)\subseteqq\beta\subseteqq\alpha$, en contradiction avec le choix de α. Ainsi, dans la factorisation (6. 5) aucun des facteurs n'est une fonction constante.

(6. 5) entraîne

$$m_1(T)m_2(T)=m_2(T)m_1(T)=m_T(T)=O,$$

d'où il s'ensuit qu'aucun des opérateurs $m_1(T)$, $m_2(T)$ ne peut avoir d'inverse (même pas au sens large), puisqu'en cas contraire l'autre devrait être égal à O, en contradiction avec le fait que $m_T(z)$ est la fonction minimum. Cela assure en particulier que le sous-espace

$$\mathfrak{H}_1=\{h:\ h\in\mathfrak{H},\ m_1(T)h=0\}$$

ne se réduit pas à $\{0\}$; $\mathfrak{H}_1$ est évidemment invariant pour T. Soit $T_1=T|\mathfrak{H}_1$. Comme on a $m_1(T_1)=m_1(T)|\mathfrak{H}_1=O$, la fonction minimum $m_{T_1}(z)$ (qui n'est pas constante puisque $\mathfrak{H}_1\neq\{0\}$) est un diviseur de $m_1(z)$, d'où il s'ensuit que $m_{T_1}(z)$ doit avoir la forme

$$m_{T_1}(z) = k\exp\left(-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu_1(t)\right) \qquad (|k|=1)$$

où μ_1 est une mesure singulière non négative, majorée par la mesure μ dans i_β et s'annulant ailleurs. Cela montre que l'ensemble S attaché à la fonction $m_{T_1}(z)$, que nous désignons par S_1, est inclus dans l'arc β. La relation (6. 1), appliquée à T_1, donne alors $\sigma(T_1)\subseteq\beta$.

Soit $|\lambda|>1$. En vertu des relations réciproques

$$g=(\lambda I-T)h,\quad h=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n g$$

le sous-espace invariant $\mathfrak{H}_1$ est transformé par $\lambda I-T$ sur soi-même, donc on a $(\lambda I_1-T_1)^{-1}=(\lambda I-T)^{-1}|\mathfrak{H}_1$. Lorsque λ tend vers un point λ_0 de C situé dans $\varrho(T)$, la norme de $(\lambda I_1-T_1)^{-1}$ reste donc bornée, ce qui entraîne que $\lambda_0\in\varrho(T_1)$. En particulier les points de α appartiennent donc à $\varrho(T_1)$. Comparé au résultat précédent $\sigma(T_1)\subseteq\beta$, cela veut dire que $\sigma(T_1)$ est vide, ce qui est impossible.

La contradiction provient de notre hypothèse que $\mu(i_\alpha)>0$. Par conséquent $\mu(i_\alpha)=0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

2. Mentionnons quelques conséquences du théorème 7.

Corollaire 1. *Soit $T\in C_0$ et soient $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ les valeurs propres de T dans D. On a alors $\sum(1-|\lambda_n|)<\infty$.*

En effet, les λ_n étant les zéros de $m_T(z)$ dans D, la convergence de la série résulte d'un théorème connu de BLASCHKE sur les zéros d'une fonction dans H^∞ (*cf.* [7], p. 64).

Corollaire 2. *Il existe $T\in C_0$ telle que $\sigma(T)=C$.*

En effet, soit μ une mesure singulière sur $(0, 2\pi)$ dont le support est l'intervalle entier (p. ex. la mesure qui assigne aux points rationnels des quantités positives, dont la somme est finie). La fonction

$$m(z)=\exp\left(-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right)$$

étant intérieure, il lui correspond une contraction $T\in C_0$ telle que $m_T(z)=m(z)$ (*voir* théorème 6). D'après théorème 7, $\sigma(T)=S$; or S coïncide dans notre cas avec C.

7. Sous-espaces invariants

1. Soit T une contraction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, appartenant à la classe C_0; soit $m_T(z)$ sa fonction minimum.

Soit $m_T(z)=m_1(z)m_2(z)$ une factorisation de $m_T(z)$ en produit de deux fonctions intérieures non-constantes, et soient $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ les sous-espaces de $\mathfrak{H}$ définies par les formules

$$\mathfrak{H}_1=\{h:\ h\in\mathfrak{H},\ m_1(T)h=0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}_2=\{h:\ h\in\mathfrak{H},\ m_2(T)h=0\}. \tag{7.1}$$

Ces sous-espaces sont évidemment invariants pour T, et même pour tout opérateur X qui commute à T. Montrons qu'ils sont des sous-espaces non banaux, c'est-à-dire différents de $\{0\}$ et de $\mathfrak{H}$. Il suffit d'envisager, à ce but, le sous-espace $\mathfrak{H}_1$. On a $\mathfrak{H}_1\neq\{0\}$, puisque, en cas contraire, $m_1(T)$ admettrait une inverse (au sens large) et la relation $m_1(T)m_2(T)=m_T(T)=O$ entraînerait $m_2(T)=O$, par conséquent $m_T(z)$ devrait être un diviseur de $m_2(z)$, donc $m_2(z)/m_T(z)$ devrait être une fonction intérieure; or cela contredirait ce que $m_T(z)/m_2(z)=m_1(z)$ est une fonction intérieure non-constante. On a aussi $\mathfrak{H}_1\neq\mathfrak{H}$, puisque, en cas contraire, on aurait $m_1(T)=O$ et par conséquent $m_T(z)$ devrait être un diviseur de $m_1(z)$, donc $m_1(z)/m_T(z)$ devrait être une fonction intérieure; or cela contredirait ce que $m_T(z)/m_1(z)=m_2(z)$ est une fonction intérieure non-constante.

Donc, s'il existe une factorisation de $m_T(z)$ de type envisagé, il existe un sous-espace non-banal de $\mathfrak{H}$ invariant pour T et pour tout opérateur qui commute à T. Or il s'ensuit de la représentation canonique des fonctions intérieures (*voir* (6.4)) que telle factorisation existe toujours sauf le cas où

$$m_T(z) = k\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z} \qquad (|k|=1,\ |\lambda|<1).$$

Dans ce cas exceptionnel on a $T=\lambda I$ et par conséquent tout sous-espace de $\mathfrak{H}$ est invariant pour T. Donc, *si* $\dim\mathfrak{H}>1$, *il existe un sous-espace non-banal de* $\mathfrak{H}$, *invariant pour* T.

2. Envisageons maintenant un sous-espace $\mathfrak{H}'$ quelconque de $\mathfrak{H}$, invariant pour T. Soit $\begin{pmatrix} T' & * \\ 0 & T'' \end{pmatrix}$ la forme matricielle de T correspondant à la décomposition $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\oplus\mathfrak{H}''$. On a $T'=T|\mathfrak{H}'$ et par conséquent $T'^n=T^n|\mathfrak{H}$ $(n=0, 1, \dots)$, d'où $u(T')=u(T)|\mathfrak{H}$ pour toute fonction $u\in H^\infty$, en particulier $m_T(T')=m_T(T)|\mathfrak{H}'=O$. D'autre part, en désignant par P'' la projection de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}''$, on a $T''=P''T|\mathfrak{H}''$ et même $T''^n=P''T^n|\mathfrak{H}''$ $(n=0, 1, \dots)$, d'où $u(T'')=P''u(T)|\mathfrak{H}''$ pour toute fonction $u\in H^\infty$, en particulier $m_T(T'')=P''m_T(T)|\mathfrak{H}''=O$. Ainsi, T' et T'' appartiennent à C_0 et leurs fonctions minimum $m_{T'}(z), m_{T''}(z)$ sont des diviseurs de $m_T(z)$.

Envisageons maintenant deux sous-espaces de $\mathfrak{H}$ invariants pour T: $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$, tels que $\mathfrak{H}'\supseteq\mathfrak{H}''$, et soient $T'=T|\mathfrak{H}', T''=T|\mathfrak{H}''$; on a $T'\in C_0$. Soit $\begin{pmatrix} T'' & * \\ O & T_0 \end{pmatrix}$

la matrice de T' correspondant à la décomposition $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'' \oplus \mathfrak{H}_0$ (où $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}''$); on a aussi $T_0 \in C_0$. Supposons que $\dim \mathfrak{H}_0 > 1$. Il existe alors un sous-espace non banal de $\mathfrak{H}_0$, soit $\mathfrak{H}_1$, invariant pour T_0. $\mathfrak{H}'' \oplus \mathfrak{H}_1$ est alors un sous-espace propre de $\mathfrak{H}'$, invariant pour T, et comprenant $\mathfrak{H}''$ comme un sous-espace propre.

Cela veut dire que *si $\mathfrak{H}', \mathfrak{H}''$ sont deux sous-espaces invariants pour T, tels que $\mathfrak{H}' \supseteqq \mathfrak{H}''$ et $\dim(\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}'') > 1$, il existe un sous-espace invariant pour T, intercalé à $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$, et différent de $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$.*

3. Soient maintenant $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$ deux sous-espaces invariants pour T, sans aucune restriction additionnelle. Posons

$$\mathfrak{H}^+ = \overline{\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}''};$$

$\mathfrak{H}^+$ est évidemment invariant pour T. Désignons par T', T'', T^+ les restrictions de T aux sous-espaces invariants correspondants. Puisque $T' = T^+|\mathfrak{H}'$, $T'' = T^+|\mathfrak{H}''$, $m_{T^+}(z)$ est divisible (dans H^∞) par $m_{T'}(z)$ et $m_{T''}(z)$, et par conséquent aussi par le plus petit multiple commun de $m_{T'}(z)$ et $m_{T''}(z)$, que nous désignons par $m(z)$. D'autre part, pour $h = h' + h''$ ($h' \in \mathfrak{H}'$, $h'' \in \mathfrak{H}''$) on a

$$m(T^+)h = m(T)h = m(T)h' + m(T)h'' = m(T')h' + m(T'')h'' = 0,$$

d'où il s'ensuit par continuité $m(T^+) = O$; par conséquent $m_{T^+}(z)$ est un diviseur (dans H^∞) de $m(z)$. Chacune des deux fonctions intérieures $m_{T^+}(z)$ et $m(z)$ étant donc un diviseur de l'autre, elles coïncident (à un facteur constant près). Ainsi, *$m_{T^+}(z)$ est le plus petit multiple commun de $m_{T'}(z)$ et $m_{T''}(z)$.*

4. Revenons aux sous-espaces invariants $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ associés à une factorisation de $m_T(z)$ en produit de deux fonctions intérieures non-constantes, $m_1(z)$ et $m_2(z)$; *voir* (7. 1). Supposons, cette fois-ci, que $m_1(z)$ et $m_2(z)$ n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant. Montrons qu'on a alors

$$\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 = \{0\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H}. \tag{7. 2}$$

En effet, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ est invariant pour T; supposons que $\mathfrak{H}_0$ est différent de $\{0\}$ et posons $T_0 = T|\mathfrak{H}_0$. On a alors $m_1(T_0) = m_1(T)|\mathfrak{H}_0 \subseteqq m_1(T)|\mathfrak{H}_1 = 0$, $m_2(T_0) = m_2(T)|\mathfrak{H}_0 \subseteqq m_2(T)|\mathfrak{H}_2 = O$, donc $m_1(T_0) = O, m_2(T_0) = O$, ce qui entraîne que $m_{T_0}(z)$ est un diviseur intérieur commun de $m_1(z)$ et $m_2(z)$, or cela contredit notre hypothèse. Donc la première des assertions (7. 2) est prouvée.

Pour démontrer la seconde, supposons que $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H} \ominus (\overline{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}) \neq \{0\}$ et envisageons la forme matricielle $\begin{pmatrix} T' & * \\ O & T^0 \end{pmatrix}$ de T par rapport à la décomposition $\mathfrak{H} = (\overline{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}) \oplus \mathfrak{H}^0$. Si P^0 désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}^0$, on a $u(T^0) = P^0 u(T)|\mathfrak{H}^0$ pour toute fonction $u \in H^\infty$ (*voir* n° 2). Or, de la relation $m_1(T)m_2(T) = m_2(T)m_1(T) = m_T(T) = O$ on déduit que

$$m_1(T)\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{H}_2, \quad m_2(T)\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{H}_1,$$

d'où
$$m_1(T^0) = P^0 m_1(T)|\mathfrak{H}^0 = O, \quad m_2(T^0) = P^0 m_2(T)|\mathfrak{H}^0 = O.$$

Cela entraîne que $m_{T^0}(z)$ est un diviseur commun intérieur de $m_1(z)$ et $m_2(z)$, ce qui contredit notre hypothèse. Donc $\mathfrak{H}^0$ ne peut être différent de $\{0\}$ et cela prouve la seconde assertion (7. 2).

Posons $T_1 = T|\mathfrak{H}_1$, $T_2 = T|\mathfrak{H}_2$. Par la définition de $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ on a évidemment $m_1(T_1) = m_1(T)|\mathfrak{H}_1 = O$, $m_2(T_2) = m_2(T)|\mathfrak{H}_2 = O$. Il s'ensuit que $m_{T_1}(z)$ est un diviseur de $m_1(z)$ et $m_{T_2}(z)$ est un diviseur de $m_2(z)$. D'autre part, en vertu de la seconde relation (7. 2) et de ce qu'on a démontré au n° 3, $m_T(z) = m_1(z)m_2(z)$ est le plus petit multiple commun intérieur de $m_{T_1}(z)$ et $m_{T_2}(z)$. On conclut que $m_{T_1}(z)$ doit coïncider avec $m_1(z)$ et $m_{T_2}(z)$ avec $m_2(z)$ (à des facteurs constants près, de module 1).

5. En résumant, nous avons le

Théorème 8. *Soit T une contraction de l'espace $\mathfrak{H}$, de classe C_0 et ayant la fonction minimum $m_T(z)$.*

(i) *Si* $\dim \mathfrak{H} > 1$, *il existe dans $\mathfrak{H}$ un sous-espace non-banal, invariant pour T. De plus, si $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$ sont deux sous-espaces invariants pour T tels que $\mathfrak{H}' \supsetneqq \mathfrak{H}''$ et* $\dim (\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}'') > 1$, *il existe un sous-espace invariant pour T, proprement intercalé à $\mathfrak{H}'$ et $\mathfrak{H}''$.*

(ii) *La restriction T' de T à un sous-espace invariant $\mathfrak{H}' \neq \{0\}$ appartient aussi à C_0 et $m_{T'}(z)$ est un diviseur (dans H^∞) de $m_T(z)$.*

(iii) *Pour une factorisation quelconque de $m_T(z)$ en produit $m_1(z)m_2(z)$ de deux fonctions intérieures non-constantes,*

$$\mathfrak{H}_1 = \{h: h \in \mathfrak{H}, m_1(T)h = 0\}, \quad \mathfrak{H}_2 = \{h: h \in \mathfrak{H}, m_2(T)h = 0\}$$

sont des sous-espaces non banaux de $\mathfrak{H}$, invariants pour T. Lorsque $m_1(z)$ et $m_2(z)$ n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant, on a de plus

$$\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 = \{0\}; \quad \overline{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H},$$

et les restrictions de T aux sous-espaces invariants $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ ont leurs fonctions minimum égales à $m_1(z)$ et $m_2(z)$, selon les cas.

L'énoncé (iii) peut être précisé dans le cas où la factorisation envisagée $m_T(z) = m_1(z)m_2(z)$ en produit de deux fonctions intérieures est telle qu'il existe des fonctions $u_1(z), u_2(z) \in H^\infty$ de sorte que

$$m_1(z)u_1(z) + m_2(z)u_2(z) = 1. \text{ [11]} \tag{7. 3}$$

Notamment on a alors même

$$\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}. \tag{7. 4}$$

En effet, (7. 3) entraîne $m_1(T)u_1(T) + m_2(T)u_2(T) = I$, d'où

$$h = m_1(T)u_1(T)h + m_2(T)u_2(T)h \quad \text{pour tout } h \in \mathfrak{H};$$

or $h_1 = m_2(T)u_2(T)h \in \mathfrak{H}_1$ puisque $m_1(T)h_1 = m_1(T)m_2(T)u_2(T)h = m_T(T)u_2(T)h = 0$ et analoguement $h_2 = m_1(T)u_1(T)h \in \mathfrak{H}_2$.

6. Soit λ un zéro de $m_T(z)$ dans $D = \{z: |z| < 1\}$, de multiplicité k. On a alors la factorisation

$$m_T(z) = \left(\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right)^k m(z) \qquad (m(\lambda) \neq 0) \tag{7. 5}$$

[11]) Cette relation entraîne évidemment que $m_1(z)$ et $m_2(z)$ n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant.

en produit de deux fonctions intérieures (dont la seconde est peut-être constante), pour laquelle la condition (7. 3) est vérifiée.

En effet, faisant usage d'une homographie de D on peut réduire cette assertion au cas $\lambda=0$. On a alors $m(0)\neq 0$, donc $1/m(z)$ admet un développement en série entière autour du point 0; soit $p(z)$ la somme d'ordre $k-1$ de cette série entière. On a alors

$$1 = m(z)\frac{1}{m(z)} = m(z)p(z)+z^k q(z)$$

où $q(z)$ est une fonction régulière dans un entourage de $z=0$, dont la définition s'étend, moyennant la relation $z^k q(z) = 1-m(z)p(z)$, à tout D. De cette façon, $q(z)$ est holomorphe dans D et telle que $z^k q(z)\in H^\infty$. Cela entraîne évidemment que $q(z)\in H^\infty$. Par conséquent on a

$$m(z)p(z)+z^k q(z) = 1 \quad (|z|<1)$$

avec $p(z)$, $q(z)\in H^\infty$.

Soient $\mathfrak{H}_\lambda, \mathfrak{H}'_\lambda$ les sous-espaces invariants correspondant à la factorisation (7. 5), donc

$$\mathfrak{H}_\lambda=\{h\colon h\in\mathfrak{H},\ b_\lambda^k(T)h=0\},\quad \mathfrak{H}'_\lambda = \{h\colon h\in\mathfrak{H},\ m(T)h=0\}$$

où l'on a posé

$$b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}.$$

On a
$$\mathfrak{H}_\lambda\cap\mathfrak{H}'_\lambda = \{0\},\quad \mathfrak{H}_\lambda+\mathfrak{H}'_\lambda = \mathfrak{H}.$$

Posons $T_\lambda=T|\mathfrak{H}_\lambda$, $T'_\lambda=T|\mathfrak{H}'_\lambda$. On a $m_{T_\lambda}(z)=b_\lambda^k(z)$ ce qui entraîne que $(T-\lambda I)^k h=0$ pour tout $h\in\mathfrak{H}_\lambda$, tandis qu'il existe du moins un $h\in\mathfrak{H}_\lambda$ tel que $(T-\lambda I)^{k-1}h\neq 0$. Si $m(z)$ n'est pas constante, $\mathfrak{H}'_\lambda$ est différent de $\{0\}$ et on a $m_{T'_\lambda}(z)=m(z)$, donc $m_{T'_\lambda}(\lambda)\neq 0$ et par conséquent λ n'appartient pas au spectre de T'_λ.

Appelons *vecteur caractéristique* de T associé à la valeur λ tout vecteur h tel que $(T-\lambda I)^n h=0$ pour n assez élevés. Montrons que le sous-espace $\mathfrak{H}_\lambda$ est constitué précisément des vecteurs caractéristiques associés à la valeur λ, c'est-à-dire que $(T-\lambda I)^n h=0$ (pour un $n\geqq 1$) entraîne $h\in\mathfrak{H}_\lambda$. Cela est manifeste si $\mathfrak{H}'_\lambda=\{0\}$. Dans le cas $\mathfrak{H}'_\lambda\neq\{0\}$ soit $h = h_\lambda+h'_\lambda$ la décomposition de h suivant les sous-espaces $\mathfrak{H}_\lambda$ et $\mathfrak{H}'_\lambda$. Comme $(T-\lambda I)^n h=0$ et $(T-\lambda I)^k h_\lambda=0$, on a $(T-\lambda I)^{n+k}(h-h_\lambda)=0$, donc $(T-\lambda I)^{n+k}h'_\lambda = 0$. Comme λ n'appartient pas au spectre de T'_λ cela entraîne $h'_\lambda=0$, donc $h=h_\lambda\in\mathfrak{H}_\lambda$.

Ainsi, *la multiplicité k d'un zéro λ de $m_T(z)$ dans D est égale à l'indice de λ comme valeur caractéristique de T*, c'est-à-dire que pour tous les vecteurs caractéristiques h associés à la valeur λ on a $(T-\lambda I)^k h=0$, mais il existe un vecteur caractéristique h tel que $(T-\lambda I)^{k-1}h\neq 0$. [12])

7. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 9. *Soit $T\in C_0$. Pour que les vecteurs caractéristiques de T associés aux points du spectre dans D sous-tendent l'espace entier $\mathfrak{H}$ il faut et il suffit que $m_T(z)$ soit un produit de Blaschke.*

---

[12]) Ainsi, la fonction minimum permet d'éviter le calcul des résidus appliqué à la résolvante, introduit par F. Riesz.

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{H}=\bigvee_{\lambda}\mathfrak{H}_{\lambda}$ où λ parcourt les points du spectre de T dans D, $\mathfrak{H}_{\lambda}$ étant le sous-espace formé par les vecteurs caractéristiques associés à λ. Soit $B(z)$ le produit de Blaschke dans la factorisation canonique de la fonction intérieure $m_T(z)$. Si λ, comme valeur caractéristique, a l'indice $k=k(\lambda)$, $B(z)$ est divisible par $b_{\lambda}^{k}(z)$, donc on a pour $h\in\mathfrak{H}_{\lambda}$

$$B(T)h=\left(\frac{B}{b_{\lambda}^{k}}\right)(T)\cdot b_{\lambda}^{k}(T)h=0;$$

comme $\mathfrak{H}=\bigvee_{\lambda}\mathfrak{H}_{\lambda}$ il s'ensuit que $B(T)=O$. Vu que $m_T(z)$ est la fonction minimum, cela entraîne $m_T(z)=B(z)$.

Passons à la démonstration de l'implication inverse. Supposons donc que $m_T(z)$ est un produit de Blaschke et posons

$$\mathfrak{H}^1=\bigvee_{\lambda}\mathfrak{H}_{\lambda}$$

où λ parcourt les points du spectre de T dans D, $\mathfrak{H}_{\lambda}$ étant le sous-espace formé par les vecteurs caractéristiques de T associés à λ.

Supposons que $\mathfrak{H}^1\neq\mathfrak{H}$ et soit $\mathfrak{H}^2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}^1$. T prend par rapport à la décomposition $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^1\oplus\mathfrak{H}^2$ la forme matricielle $\begin{pmatrix}T^1 & * \\ O & T^2\end{pmatrix}$; on sait que $m_{T^2}(z)$ est un diviseur de $m_T(z)$, nécessairement non-constant. Par conséquent, $m_T(z)$ étant un produit de Blaschke, il existe du moins un zéro λ de $m_T(z)$ dans D qui est un zéro aussi pour $m_{T^2}(z)$. Ce zéro est une valeur propre de T^2, donc il existe un $h^2\neq0$ dans $\mathfrak{H}^2$ tel que $(T^2-\lambda I^2)h^2=0$. Il s'ensuit que $(T-\lambda I)h^2$ appartient à $\mathfrak{H}^1$. Soit $\mathfrak{H}^1=\mathfrak{H}_{\lambda}^1+\mathfrak{H}_{\lambda}^{1'}$ la décomposition (non nécessairement orthogonale) de $\mathfrak{H}^1$ où $\mathfrak{H}_{\lambda}^1$ est constitué des vecteurs caractéristiques de T^1 associés à la valeur λ et compris dans $\mathfrak{H}^1$, et $\mathfrak{H}_{\lambda}^{1'}$ est un sous-espace invariant pour T^1 tel que, si $T^{1'}$ est la restriction de T^1 à ce sous-espace, λ n'appartient pas à $\sigma(T^{1'})$; comme $\mathfrak{H}_{\lambda}\subseteqq\mathfrak{H}^1$ on a nécessairement $\mathfrak{H}_{\lambda}^1=\mathfrak{H}_{\lambda}$. Soit $(T-\lambda I)h^2=h_{\lambda}^1+h_{\lambda}^{1'}$ la décomposition du vecteur $(T-\lambda I)h^2\in\mathfrak{H}^1$ suivant ces sous-espaces. On a alors, en posant

$$l_{\lambda}^{1'}=(T^{1'}-\lambda I^{1'})^{-1}h_{\lambda}^{1'}\qquad(\in H_{\lambda}^{1'}),$$

$$(T-\lambda I)^{k+1}h^2=(T-\lambda I)^k h_{\lambda}^1+(T-\lambda I)^{k+1}l_{\lambda}^{1'};$$

si k est l'indice de la valeur caractéristique λ cela donne $(T-\lambda I)^{k+1}(h^2-l_{\lambda}^{1'})=0$, d'où $h^2-l_{\lambda}^{1'}\in\mathfrak{H}_{\lambda}\subseteqq\mathfrak{H}^1$ et par conséquent $h^2\in\mathfrak{H}^1$. Vu que $h^2\in\mathfrak{H}^2$ et $h^2\neq0$, l'hypothèse $\mathfrak{H}^1\neq\mathfrak{H}$ nous a conduit à une contradiction. Donc $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^1$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Ouvrages cités

B. Sz.-Nagy et C. Foiaş

[1] Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3413—3415.

[2] Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251—259.

[3] Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales, *ibidem*, **23** (1962), 106—129.

[4] Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *ibidem*, **23** (1962), 130—167.

B. Sz.-Nagy

[5] The "outer functions" and their role in functional calculus, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1962, Stockholm*, pp. 421—425.

A. Beurling

[6] On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, **81** (1949), 239—255.

K. Hoffman

[7] *Banach spaces of analytic functions* (Englewood Cliffs, N. J., 1962).

(Reçu le 10 avril 1963)