О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ АВТОМАТОВ. II

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)*)

В первой части работы приведены необходимые и достаточные условия для вложимости автомата Мура в произведение автоматов. Результаты аналогичным путем доказываются и для случая автоматов Мили.

В этой статье мы дадим необходимые и достаточные условия представления автоматов Мили в виде произведения автоматов.

Рассмотрим произвольный упорядоченный автомат $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, Y, \delta, \lambda)$ и некоторое множество его допустимых разбиений, удовлетворящее следующим условиям:[1]

1. Если для разбиений π_1, π_2 имеет место $\pi_1>\pi_2$, то мощность множества $M^{\pi_2}_{\pi_1(a_1)}$ классов по разбиению π_2, содержащихся в классе $\pi_1(a_1)$, совпадает с мощностью множества $M^{\pi_2}_{\pi_1(a_2)}$ классов по разбиению π_2, содержащихся в классе $\pi_1(a_2)$, и существуют такие изоморфизмы $\psi^{1,2}_{a_i,a_j}\colon M^{\pi_2}_{\pi_1(a_i)}\to M^{\pi_2}_{\pi_1(a_j)}$, для которых:

$$(\alpha)\qquad \psi^{1,2}_{a_i,a_j}(x)=\psi^{1,2^{-1}}_{a_j,a_k}\left(\psi^{1,2^{-1}}_{a_k,a_i}(x)\right),^{2)}$$

$$(\beta)\qquad \psi^{1,2}_{a_j,a_k}(x)=\psi^{1,2^{-1}}_{a_k,a_i}\left(\psi^{1,2^{-1}}_{a_i,a_j}(x)\right),$$

$$(\gamma)\qquad \psi^{1,2}_{a_k,a_i}(x)=\psi^{1,2^{-1}}_{a_i,a_j}\left(\psi^{1,2^{-1}}_{a_j,a_k}(x)\right),$$

$$(\delta)\qquad \psi^{1,2^{-1}}_{a_i,a_j}(x)=\psi^{1,2}_{a_j,a_i}(x) \quad \text{и} \quad \psi^{1,2}_{a_i,a_j}(x)=\psi^{1,2}_{a_i',a_j'}(x), \quad \text{если} \quad a_i\equiv a_i',\, a_j\equiv a_j'\,(\pi_1).$$

Пусть $\pi_2(a)\in M^{\pi_2}_{\pi_1(a_i)}$, $\pi_2(a')\in M^{\pi_2}_{\pi_1(a_j)}$ и $\pi_1(a_i)\leqq\pi_1(a_j)$. Тогда $\pi_2(a)\leqq\pi_2(a')$ равнослльно тому, что $\psi^{1,2}_{a_i,a_j}(\pi_2(a))\leqq\pi_2(a')$.

2. Если разбиение π_1 не находится в отношении упорядоченности с разбиением π_2, то для любого фиксированного $a\in A$ все пересечения $\pi_1(a)\cap\pi_2(a')$ $(a'\in A)$ обладают одинаковой мощностью.

Множество допустимых разбиений, удовлетворящее условиям 1. и 2., мы назовем множеством со свойством K.

Теорема. *Автомат* $\mathbf{M}=\mathbf{M}(X_M, M, Y_M, \delta_M, \lambda_M)$ *изоморфен некоторому R-произведению автоматов* $\mathbf{A}_i$ $(i=1,\ldots,r)$ *тогда и только тогда,*

---

*) F. Gécseg (Szeged)

[1]) Относительно терминологии этой статьи см. [2].

[2]) Где a_i, a_j, a_k — произвольны из множества A.

если он обладает множеством разбиений со свойством K, каждый класс пересечения π которого имеет одну и ту же мощность, можно установить изоморфизм между классами разбиения π, удовлетворящий условиям (α)—(δ), *произвольные различные максимальные цепи данных разбиений не содержат общего разбиения кроме π и $\pi_{i_1}(m_{i_1})\cap\ldots\cap\pi_{i_k}(m_{i_k})\neq\emptyset$ для всех различных разбиений $\pi_{i_1},\ldots\pi_{i_k}$, опережающих разбиение π.*

Доказательство. Для доказательства необходимости рассмотрим некоторое R-произведение автоматов $\mathbf{A}_i$ $(i=1,\ldots,r)$, изоморфное автомату $\mathbf{M}$. Обозначим этот изоморфизм через χ. Рассмотрим разбиения π_i автомата $\mathbf{M}$, индуцируемые множествами $P(\mathbf{A}_i)$ $(i=1,\ldots,r)$ (см. [2]). Разбиения π_i, получаемые таким образом — допустимы (см. [2]). Покажем, что с помощью этих разбиений можно задавать множество разбиений автомата $\mathbf{M}$, удовлетворящее условиям теоремы.

Рассмотрим пересечение π разбиений π_i $(i=1,\ldots,r)$. Если найдется две максимальной цепи множества $\{\pi_i\}$, содержащие обшее разбиение, отличное от разбиения π, то одну из них оставим без внимания. В так полученном множестве разбиений пусть π_i и π_j такие, что $\pi_i>\pi_j$. Тогда $\mathbf{M}_i>\mathbf{M}_j$. Далее, пусть m и m' такие, что $m\not\equiv m'(\pi_i)$ и $\chi(m)=(a_1,\ldots,a_i,a_{i+1},\ldots,a_j,\ldots,a_r)$, $\chi(m')=(a_1',\ldots,a_i',a_{i+1},\ldots,a_j,\ldots,a_r)$. По определению разбиений, индуцирующихся множеством $P(\mathbf{A}_i)$, мощности множества классов по разбиению π_j, содержащихся в классе $\pi_i(m)$ соотв. $\pi_i(m')$, совпадают с мощностью множества $\prod\limits_{k=i+1}^{j}A_k$. (Здесь упорядочение составляющих $A_1\times\ldots\times A_r$ такое, что множества A_i и A_j будут опережены такими и только такими множествами, которые больши их). Пусть теперь $M^{\pi_j}_{\pi_i(m_i)}$, $M^{\pi_j}_{\pi_i(m_j)}$, $M^{\pi_j}_{\pi_i(m_k)}$ — различны, а m_i, m_j и m_k такие, что

$$\chi(m_i)=(a_1,\ldots,a_i,a_{i+1},\ldots,a_j,\ldots,a_r),$$

$$\chi(m_j)=(a_1',\ldots,a_i',a_{i+1},\ldots,a_j,\ldots,a_r),$$

$$\chi(m_k)=(a_1'',\ldots,a_i'',a_{i+1},\ldots,a_j,\ldots,a_r).$$

Отображение $\psi^{i,j}_{m_i,m_j}$, $\psi^{i,j}_{m_j,m_k}$ и $\psi^{i,j}_{m_k,m_i}$ определяются следующим образом:

$$\psi^{i,j}_{m_i,m_j}(\pi_j(m_i))=\pi_j(m_j);\ \psi^{i,j}_{m_j,m_k}(\pi_j(m_j))=\pi_j(m_k);\ \psi^{i,j}_{m_k,m_i}(\pi_j(m_k))=\pi_j(m_i).$$

Пусть $\pi_i(m_i)\leqq\pi_i(m_j)$, $\pi_j(m_i^*)\leqq\pi_j(m_j^*)$ $(m_i\equiv m_i^*(\pi_i),\ m_j\equiv m_j^*(\pi_i))$. В этом случае если

$$\chi(m_i^*)=(a_1,\ldots,a_i,a_{i+1}^*,\ldots,a_j^*,a_{j+1},\ldots,a_r)$$

и

$$\chi(m_j^*)=(a_1',\ldots,a_i',a_{i+1}^{*\prime},\ldots,a_j^{*\prime},a_{j+1},\ldots,a_r)$$

то

$$a_1\leqq a_1'',\ldots,a_i\leqq a_i',a_{i+1}^*\leqq a_{i+1}^{*\prime},\ldots,a_j^*\leqq a_j^{*\prime}.$$

Замстим, что по определению допустимого разбиения $\pi_i(m)\geqq\pi_i(m')$ тогда и только тогда, если найдутся такие $m_1(\in\pi_i(m))$ и $m_2(\in\pi_i(m'))$, для которых выполняется неравенство $m_1\geqq m_2$. Так как в классе $\psi^{i,j}_{m_i,m_j}(\pi_j(m_i^*))$ содержится элемент $m_i^{*\prime}$, для которого $\chi(m_i^{*\prime})=(a_1', \ldots, a_i', a_{i+1}^*, \ldots a_j^*, a_{j+1}, \ldots, a_r)$, то, очевидно, имеет место $\psi_{m_i, m_j}^{i, j}(\pi_j(m_i^*) \leqq \pi_j(m_j^*))$. Аналогично получается обратное утверждение.

Пусть разбиения π_i и π_j не находятся в отношении упорядоченности. Тогда множества $P(\mathbf{A}_i)$ и $P(\mathbf{A}_j)$ не содержат общего элемента. В самом деле, если $\mathbf{A}_k \in P(\mathbf{A}_i) \cap P(\mathbf{A}_j)$, то $\mathbf{A}_k > \mathbf{A}_i$ и $\mathbf{A}_k > \mathbf{A}_j$, откуда $\pi_k > \pi_i$ и $\pi_k > \pi_j$. Это однако противоречит утверждению, что максимальные цепи разбиения не содержат общего разбиения — отичного от π. Так как $P(\mathbf{A}_i) \cap P(\mathbf{A}_j)$— пусто, то в каждом классе по разбиению π_i из любого класса по разбиению π_j содержится ΠA_k элементов, где произведение берется для всех $\mathbf{A}_k \notin P(\mathbf{A}_i) \cup \cup P(\mathbf{A}_j)$. Этим доказана необходимость условия 2.

Надо еще доказать необходимость последнего утверждения теоремы. Это однако очевидно, так как разбиение совпадает с тривиальным. Итак, необходимость условий теоремы полностью доказана.

Для доказательства достаточности рассмотрим автомат $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X_M, M, Y_M, \delta_M, \lambda_M)$ и множество $T=\{\pi_1, \ldots, \pi_{r-1}\}$ его разбиений, удовлетворяющее условиям теоремы. Обозначим через T_1 множество максимальных элементов множества T. Мы берем все максимальные цепи множества T, причем, если $\pi \in T$, то каждая максимальная цепь рассматривается без разбиения π. Мы конструируем автоматы $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(X_i, A_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ для каждого разбиения $\pi_i \in \{T, \pi\}$, подходящее R-произведение которых изоморфен автомату $\mathbf{M}$. Пусть $\pi_i \in T_1$. В этом случае автомат $\mathbf{A}_i$ определяется так: множество X_i входных сигналов совпадает с множеством входных сигналов автомата $\mathbf{M}$, множеством состояний служит множество классов автомата $\mathbf{M}$ по разбиению π_i, множеством выходных сигналов является множество $Y_i=A_i \times X_i$, функция перехода: $\delta_i(\pi_i(m), x)=\pi_i(\delta_M(m, x))$, а функция выходов: $\lambda_i(\pi_i(m), x)=(\pi_i(m), x)$.

Пусть π_{i_j} $(\neq \pi)$ произвольное разбиение цепи, начинающейся с разбиения π_i. Обозначим через A_{i_j} множество, мощность которого совпадает с мощностью множества $M_{\pi_{i_{j-1}}(m)}^{\pi_{i_j}}$, где $\pi_{i_{j-1}}$ — разбиение, опережающее разбиение π_{i_j}. Пусть $\xi_{i_{j-1}(m)}^{i_j}$ — взаимно однозначное отображение множества A_{i_j} на $M_{\pi_{i_{j-1}}(m)}^{\pi_{i_j}}$. Оно будет изоморфизмом, если мы упорядочим A_{i_j} следующим образом: $\alpha < \alpha' (\alpha, \alpha' \in A_{i_j})$ тогда и только тогда, если $\xi_{i_{j-1}(m)}^{i_j}(\alpha) < \xi_{i_{j-1}(m)}^{i_j}(\alpha')$. Берем изоморфные отображения $\xi_{i_{j-1}(m')}^{i_j}(x)=\psi_{m, m'}^{i_{j-1}, i_j}(\xi_{i_{j-1}(m)}^{i_j}(x))$ множества A_{i_j} на множества $M_{\pi_{i_{j-1}}(m')}^{\pi_{i_j}}$.

Теперь для каждого j мы сконструируем автомат $\mathbf{A}_{i_j} = \mathbf{A}_{i_j}(X_{i_j}, A_{i_j}, Y_{i_j}, \delta_{i_j}, \lambda_{i_j})$ множество входных сигналов которого совпадает с множеством выходных сигналов автомата $\mathbf{A}_{i_{j-1}}$. Множеством состояний служит множество A_{i_j}, а множеством выходных сигналов — множество $Y_{i_j}=A_{i_j} \times X_{i_j}$. Функция перехода $\delta_{i_j}(\alpha_{i_j}, x_{i_j})=\alpha_{i_j}^*$, где элемент $\alpha_{i_j}^*$ определяется так: если $x_{i_j}=(\alpha_{i_{j-1}}, (\ldots, (\alpha_{i_1}, (\pi_i(m), x)) \ldots))$ и $\xi_{i(m)}^{i_1}(\alpha_{i_1})=\pi_{i_1}(m_1)$, $\xi_{i_1(m_1)}^{i_2}(\alpha_{i_2})=\pi_{i_2}(m_2)$, $\ldots$, $\xi_{i_{j-2}(m_{j-2})}^{i_{j-1}}(\alpha_{i_{j-1}})=\pi_{i_{j-1}}(m_{j-1})$, $\xi_{i_{j-1}(m_{j-1})}^{i_j}(\alpha_{i_j}) = \pi_{i_j}(m_j)$, то $\alpha_{i_j}^*= \xi_{i_{j-1}(\delta_M(m_j, x))}^{i_j-1}(\pi_{i_j}(\delta_M(m_j, x)))$.

При этом, если $\pi_i \in T_1$, то упорядочение множества состояний совпадает с упорядочением множества классов по разбиению π_i, а в множестве выходных сигналов $(\pi_i(m), x) \geqq (\pi_i(m'), x')$ тогда и только тогда, если $\pi_i(m) \geqq \geqq \pi_i(m'), x \geqq x'$.

Упорядочение множества входных сигналов автомата $\mathbf{A}_{i_j}$ — следующее: $x_{i_j}(=(a_{i_{j-1}}, (\ldots, (\alpha_{i_1}, (\pi_i(m), x)) \ldots))) \geqq x'_{i_j}(=(\alpha'_{i_{j-1}}, (\ldots, (\alpha'_{i_1}, (\pi_i(m'), x')) \ldots)))$ тогда и только тогда, если $\alpha_{i_{j-1}} \geqq \alpha'_{i_{j-1}}, \ldots, \alpha_{i_1} \geqq \alpha'_{i_1}, \ldots, \pi_i(m) \geqq \pi_i(m')$ и $x \geqq x'$. Далее, для его выходных сигналов $(\alpha_{i_j}, x_{i_j}) \geqq (\alpha'_{i_j}, x'_{i_j})$ тогда и только тогда, если $\alpha_{i_j} \geqq \alpha'_{i_j}, x_{i_j} \geqq x'_{i_j}$.

Рассмотрим множество A_r, мощность которого совпадает с мощностью некоторого класса $M_{\pi_{i_j}(m_{i_j}), \ldots, \pi_{k_l}(m_{k_l})} (=\pi_{i_j}(m_{i_j}) \cap \ldots \cap \pi_{k_l}(m_{k_l}))$ по разбиению π (где $\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{k_l}$ все опережают π) и взаимно однозначное отображение $\xi^{i_j, \ldots, k_l}_{m_{i_j}, \ldots, m_{k_l}}$ множества A_r на $M_{\pi_{i_j}(m_{i_j}), \ldots, \pi_{k_l}(m_{k_l})}$. Мы упорядочим A_r так, чтобы $\xi^{i_j, \ldots, k_l}_{m_{i_j}, \ldots, m_{k_l}}$ было изоморфизмом.

Мы сконструируем автомат $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_r(X_r, A_r, Y_r, \delta_r, \lambda_r)$, принадлежащий к разбиению π. Множеством его входных сигналов является множество X_r таких элементов множества $Y_{i_j} \times \ldots \times Y_{k_l}$, во всех компонентах которых фигурирует одно и то же $x (\in X_M)$, где $\pi_{i_j}, \ldots, \pi_{k_l}$ опережеют разбиение π. Множество выходных сигналов $Y_r = A_r \times X_r$. Функция перехода: $\delta_i(\alpha_r, x_r) = \alpha^*_r$, где элемент α^*_r определяется так: если

$$x_r = ((\alpha_{i_j}, (\ldots, (\alpha_{i_1}, (\pi_i(m_i), x))\ldots)), \ldots, (\alpha_{k_l}, (\ldots, (\alpha_{k_1}, (\pi_k(m_k), x) \ldots)))$$

и

$$\xi^{i_1}_{i(m_i)}(\alpha_{i_1}) = \pi_{i_1}(m_{i_1}), \ \ldots, \ \xi^{i_j}_{i_{j-1}(m_{i_{j-1}})}(\alpha_{i_j}) = \pi_{i_j}(m_{i_j}), \ \ldots, \ \xi^{k_1}_{k(m_k)}(\alpha_{k_1}) = \pi_{k_1}(m_{k_1}), \ \ldots$$

$$\ldots, \ \xi^{k_l}_{k_{l-1}(m_{l-1})}(\alpha_{k_l}) = \pi_{k_l}(m_{k_l}), \ \xi^{i_j, \ldots, k_l}_{m_{i_j}, \ldots, m_{k_l}}(\alpha_r) = m_r,$$

то $\xi^{i_j, \ldots, k_l^{-1}}_{\delta_M(m_{i_j}, x), \ldots, \delta_M(m_{k_l}, x)}(\delta_M(m_r, x))$. Функция выходов: $\lambda_r(\alpha_r, x_r) = (\alpha_r, x_r)$.

Упорядочение входных сигналов — следующее:

$$x_r(=((\alpha_{i_j}, (\ldots(\alpha_{i_1}, (\pi_i(m_i), x)) \ldots)), \ldots, (\alpha_{k_l}, (\ldots, (\alpha_{k_1}, (\pi_k(m_k), x)) \ldots)))) \geqq$$

$$\geqq x'_r(=((\alpha'_{i_j}, (\ldots, (\alpha'_{i_1}, (\pi_i(m'_i), x'))\ldots)), \ldots, (\alpha'_{k_l}, (\ldots, (\alpha'_{k_1}, (\pi_k(m'_k), x')) \ldots))))$$

тогда и только тогда, если $\alpha_{i_j} \geqq \alpha'_{i_j}, \ldots, \alpha_{i_1} \geqq \alpha'_{i_1}, \pi_i(m_i) \geqq \pi_i(m'_i), \ldots, \alpha_{k_l} \geqq \alpha'_{k_l} \ldots \alpha_{k_1} \geqq \alpha'_{k_1}, \pi_k(m_k) \geqq \pi_k(m'_k)$ и $x \geqq x'$.

Упорядочение множества Y_r выходных сигналов: $(\alpha_r, x_r) \geqq (\alpha'_r, x'_r)$ тогда и только тогда, если $\alpha_r \geqq \alpha'_r, x_r \geqq x'_r$

Покажем, что описанным выше способом получаются упорядоченные автоматы. Пусть $\alpha_{i_j} \leqq \alpha'_{i_j}$ и $x_{i_j} = (\alpha_{i_{j-1}}, (\ldots(\alpha_{i_1}, (\pi_i(m), x)) \ldots))$. Тогда имеет место $\alpha^*_{ij} = \delta_{i_j}(\alpha_{i_j}, x_{i_j}) \leqq \delta_{i_j}(\alpha'_{i_j}, x_{i_j}) = \alpha^{*\prime}_{ij}$.

Действительно $\alpha^*_{ij} = \xi^{i_j^{-1}}_{i_{j-1}(\delta_M(m_j, x))}(\pi_{i_j}(\delta_M(m_j, \ x)))$,

$$\alpha^{*\prime}_{ij} = \xi^{i^{-1}}_{i_{j-1}(\delta_M)m_{j-1}, x))}(\pi_{i_j}(\delta_M(m'_{i_j}, x))).$$

Так как $\pi_{i_j}(m_j) \leqq \pi_i(m'_j)$, то $\pi_{i_j}(\delta_M(m_j, x)) \leqq \pi_{i_j}(\delta_M(m'_j, x))$.

Остается показать, что из $x_{i_j} \leqq x'_{i_j}$ вытекает $\alpha^*_{ij} = \delta_{i_j}(\alpha_{i_j}, x_{i_j}) \leqq \delta_{i_j}(\alpha_{i_j}, x'_{i_j}) = \alpha^{*\prime}_{ij}$. Мы определим элемент $\alpha^{*\prime}_{ij}$ следующим образом. Если $\xi^{i_1}_{i(m')}(\alpha'_{i_1}) = \pi_{i_1}(m'_1)$, $\xi^{i_2}_{i_1(m'_1)}(\alpha'_{i_2}) = \pi_{i_2}(m'_2), \ \ldots, \ \xi^{i_{j-1}}_{i_{j-2}(m'_{j-2})}(\alpha'_{i_{j-1}}) = \pi_{i_{j-1}}(m'_{j-1}), \ \xi^{i_j}_{i_{j-1}(m'_{j-1})}(\alpha_{i_j}) = \pi_{i_j}(m'_j)$, то

$\alpha_{l_j}^{*\prime} = \xi^{l_j-1}_{l_{j-1}(\delta_M(m'_j, x))}(\pi_{l_j}(\delta_M(m'_j, x)))$. Так как $\pi_l(m) \leqq \pi_l(m')$, $\alpha_{l_1} \leqq \alpha'_{l_1}$, имеет место $\pi_{l_1}(m_1) \leqq \pi_{l_1}(m'_1)$. Заметим, что $\xi^{l_2}_{l_1(m'_1)}(\alpha'_{l_2}) = \psi^{l_1, l_2}_{m_1, m'_1}(\xi^{l_2}_{l_1(m_1)}(\alpha'_{l_2}))$. Ввиду неравенства $\alpha_{l_2} \leqq \alpha'_{l_2}$ получим $\xi^{l_2}_{l_1(m_1)}(\alpha_{l_2}) \leqq \xi^{l_2}_{l_1(m_1)}(\alpha'_{l_2})$. Так по условию 1. имеем: $\psi^{l_1, l_2}_{m_1, m'_1}(\xi^{l_2}_{l_1(m_1)}(\alpha'_{l_2})) = \pi_{l_2}(m'_2) \geqq \pi_{l_2}(m_2)$. Продолжая этот метод, получим, что $\pi_{l_j}(m'_{l_j}) \geqq \pi_{l_j}(m_{l_j})$, так $\pi_{l_j}(\delta_M(m'_{l_j}, x')) \geqq \pi_{l_j}(\delta_M(m_{l_j}, x))$. В силу условию 1. получается:

$$\alpha_{l_j}^{*\prime} = \xi^{l_j-1}_{l_{-1}(\delta_M(m'_j, x'))}(\pi_{l_j}(\delta_M(m'_j, x'))) \geqq \xi^{i_j-1}_{l_{-1}(\delta_M(m_j, x))}(\pi_{l_j} = \delta_M(m_j, x))) = \alpha^*_{l_i}.$$

Аналогично доказывается упорядоченность автомата $\mathbf{A}_r$.

Рассмотрим теперь R-произведение $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X; A, Y, \delta, \lambda)$ автоматов $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, множество входных сигналов которого совпадает с множеством входных сигналов автомата $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X_M, M, Y_M, \delta_M, \lambda_M)$, множеством состояний является $A_1 \times \ldots \times A_r$, а множеством выходных сигналов — множество выходных сигналов автомата $\mathbf{M}$. Упорядочение множества $\{\mathbf{A}_i\}$ $(i = 1, \ldots, r)$ — следующее: $\mathbf{A}_i > \mathbf{A}_j$ тогда и только тогда, если $\pi_i > \pi_j$.

Функцию φ обратной связи мы определим так:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\, x) = (x_1, \ldots, x_r), \quad x_i = \varphi_i(\alpha_i, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}, x) \quad (i = 1, \ldots, r),$$

где компоненты $\alpha_i, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ элемента $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ — элементы автомата $\mathbf{A}_i$ и всех опережающих его автоматов. Если $\pi_i \in T_1$, то $x_i = \varphi_i(\alpha_1, x) = x$. Таким образом, если $x_{i_1} = \varphi_{i_1}(\alpha_{i_1}, \ldots, x), \ldots, x_{i_k} = \varphi_{i_k}(\alpha_{i_k}, \ldots, x)$ и $\lambda_{i_1}(\alpha_{i_1}, x_{i_1}) = (\alpha_{i_1}, x_{i_1}), \ldots, \lambda_{i_k}(\alpha_{i_k}, x_{i_k}) = (\alpha_{i_k}, x_{i_k})$, то $x_i = ((\alpha_{i_1}, x_{i_1}), \ldots, (\alpha_{i_k}, x_{i_k}))$.

Определение функции δ перехода:

$$\delta((\alpha_1, \ldots, \alpha_r), x) = (\delta_1(\alpha_1, x_1), \ldots, \delta_r(\alpha_r, x_r)).$$

Рассмотрим отображение η множества $A_1 \times \ldots \times A_r$ на M: $\eta((\alpha_1, \ldots, \alpha_r)) = m$, где $m = \pi_1(m_1) \cap \ldots \cap \pi_r(m_r)$; здесь $\pi_i(m_i) = \alpha_i$, если $\pi_i \in T_1$, а $\pi_{i_j}(m_{i_j}) = \xi^{i_j}_{i_{j-1}(m_{j-1})}(\alpha_{i_j})$ если $\pi_{i_j}(\notin T_1) \neq \pi_r$ и $\xi^{i_j, \ldots, k_l}_{m_{i_j}, \ldots, m_{k_l}}(\alpha_r) = \pi_r(m_r)$. Легко убедиться, что отображение η — изоморфно.

Наконец мы определим функцию λ выходов: $\lambda((a_1, \ldots, \alpha_r), x) = \lambda_M(m, x)$.

Обозначим через ϱ, соотв. σ тождественные отображения множества X, соотв. Y. Тогда $\varepsilon = \varepsilon(\varrho, \eta, \sigma)$ является изоморфным отображением автомата $\mathbf{A}$ на $\mathbf{M}$.

Литература

[1] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи Мат. Наук*, **5** (1961), 3—63.

[2] Ф. Гечег, О произведениях упорядоченных автоматов. I, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 244—250.

(Поступило 5/II/1963 г.)