Über ein spezielles dreifaches schiefes Produkt

Von GÜNTER SCHAAR in Freiberg

Problemstellung. Im folgenden soll das von RÉDEI [1] erwähnte spezielle dreifache schiefe Produkt $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ der Gruppen $\mathfrak{G}=(a, b, \ldots)$; $\Gamma=(\alpha, \beta, \ldots)$; $G=(A, B, \ldots)$ mit der Multiplikationsvorschrift

$$(a, \alpha, A)(b, \beta, B)=(ab^{\alpha}, \alpha\beta^{A}, AB^{a}),$$

wobei b^{α}, β^{A}, B^{a} drei beliebige Funktionen mit Werten in $\mathfrak{G}$, Γ, G bezeichnen, untersucht werden. Es wird sich herausstellen, daß die Struktur dieses schiefen Produktes, falls es eine Gruppe bildet, sich in einfacher Weise durch direkte Produkte und eine Schreiersche Erweiterung charakterisieren läßt (**1**). Ferner ergibt sich ein interessanter Zusammenhang mit einer Klasse von faktorisierbaren Gruppen (**2**).

1. Wir fragen zunächst, unter welchen Bedingungen das Produkt $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ eine Gruppe bildet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dabei (e, ε, E) als Einselement voraussetzen, wobei e, ε, E die Einselemente von $\mathfrak{G}$, Γ, G bedeuten. Daraus ergeben sich die Anfangsbedingungen

$$(0)\qquad \begin{aligned} a^{\varepsilon}=a; \quad \alpha^{E}=\alpha; \quad A^{e}=A \\ e^{\alpha}=e; \quad \varepsilon^{A}=\varepsilon; \quad E^{a}=E \end{aligned}$$

für beliebige $a \in \mathfrak{G}$; $\alpha \in \Gamma$; $A \in G$. Dann gilt:

Satz 1. *Das schiefe Produkt $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ ist eine Gruppe genau dann, wenn für alle $a, b, c \in \mathfrak{G}$; $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$; $A, B, C \in G$ die folgenden Relationen erfüllt sind:*

$$(1)\qquad (bc)^{\alpha}=b^{\alpha}c^{\alpha}; \quad (\beta\gamma)^{A}=\beta^{A}\gamma^{A}; \quad (BC)^{a}=B^{a}C^{a};$$

$$(2)\qquad (c^{\beta})^{\alpha}=c^{\alpha\beta}; \quad (\gamma^{B})^{A}=\gamma^{AB}; \quad (C^{b})^{a}=C^{ab};$$

$$(3)\qquad c^{\beta^{A}}=c^{\beta}; \quad \gamma^{B^{a}}=\gamma^{B}; \quad C^{b^{\alpha}}=C^{b}.$$

Beweis. 1. Wenn $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ eine Gruppe ist, so folgt aus dem Assoziativgesetz $[(a, \alpha, A)(b, \beta, B)](c, \gamma, C) = (a, \alpha, A)[(b, \beta, B)(c, \gamma, C)]$

$$(ab^{\alpha}c^{\alpha\beta^{A}}, \alpha\beta^{A}\gamma^{AB^{a}}, AB^{a}C^{ab^{\alpha}})=\big(a(bc^{\beta})^{\alpha}, \alpha(\beta\gamma^{B})^{A}, A(BC^{b})^{a}\big),$$

also $\qquad b^{\alpha}c^{\alpha\beta^{A}}=(bc^{\beta})^{\alpha}; \quad \beta^{A}\gamma^{AB^{a}}=(\beta\gamma^{B})^{A}; \quad B^{a}C^{ab^{\alpha}}=(BC^{b})^{a}.$

Aus der ersten Beziehung ergeben sich nacheinander für $\beta=\varepsilon$, $\alpha=\varepsilon$, $A=E$ die Spezialisierungen:

$$b^{\alpha}c^{\alpha}=(bc)^{\alpha}; \quad c^{\beta^{A}}=c^{\beta}; \quad c^{\alpha\beta}=(c^{\beta})^{\alpha}.$$

Entsprechend erhält man $\beta^A\gamma^A=(\beta\gamma)^A$; $\gamma^{B^a}=\gamma^B$; $\gamma^{AB}=(\gamma^B)^A$ sowie $B^aC^a=(BC)^a$; $C^{b^\alpha}=C^b$; $C^{ab}=(C^b)^a$, womit alle Relationen (1), (2), (3) nachgewiesen sind.

2. Sind umgekehrt diese Relationen erfüllt, so ergibt sich

$$b^\alpha c^{\alpha\beta^A}=b^\alpha(c^{\beta^A})^\alpha=b^\alpha(c^\beta)^\alpha=(bc^\beta)^\alpha$$

und genauso

$$\beta^A\gamma^{AB^a}=(\beta\gamma^B)^A;\quad B^aC^{ab^\alpha}=(BC^b)^a,$$

womit nach dem im ersten Teil des Beweises Bemerkten das Assoziativgesetz bewiesen ist. Daß das Element (e, ε, E) Links-Eins ist, folgt aus den Anfangsbedingungen (0). Wegen

$$a=a^\varepsilon=a^{\alpha B(\alpha B)^{-1}}=(a^{(\alpha B)^{-1}})^{\alpha B}=(a^{(\alpha B)^{-1}})^\alpha$$

wird

(4) $\quad a^{\alpha^{-1}}=a^{(\alpha B)^{-1}}$ für alle $B\in G$; entsprechend: $\alpha^{A^{-1}}=\alpha^{(A^b)^{-1}}$; $\quad A^{a^{-1}}=A^{(a^\beta)^{-1}}$.

Daher gilt

$$\left((a^{\alpha^{-1}})^{-1}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}, (A^{a^{-1}})^{-1}\right)(a, \alpha, A)=$$
$$=\left((a^{\alpha^{-1}})^{-1}a^{(\alpha^{A^{-1}})^{-1}}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}\alpha^{(A^{a^{-1}})^{-1}}, (A^{a^{-1}})^{-1}A^{(a^{\alpha^{-1}})^{-1}}\right)=$$
$$=\left((a^{\alpha^{-1}})^{-1}a^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}\alpha^{A^{-1}}, (A^{a^{-1}})^{-1}A^{a^{-1}}\right)=(e, \varepsilon, E),$$

d. h. es existiert ein Linksinverses von (a, α, A), nämlich

(5) $$\left((a^{\alpha^{-1}})^{-1}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}, (A^{\alpha^{-1}})^{-1}\right).$$

Demnach ist $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ eine Gruppe.

Übrigens folgt aus $a^\beta(a^{-1})^\beta=(aa^{-1})^\beta=e^\beta=e$ die nützliche Relation

(6) $\quad (a^{-1})^\beta=(a^\beta)^{-1}$; entsprechend: $(\alpha^{-1})^B=(\alpha^B)^{-1}$; $\quad (A^{-1})^b=(A^b)^{-1}$.

Ferner ist stets

(7) $$a^{\beta^{-1}\beta^C}=(a^{\beta^C})^{\beta^{-1}}=(a^\beta)^{\beta^{-1}}=a;\quad \alpha^{B^{-1}B^c}=\alpha;\quad A^{b^{-1}b^\gamma}=A.$$

Wir bemerken noch, daß die Abbildungen $a\xrightarrow{\sigma_\alpha}a^\alpha$, $\alpha\xrightarrow{\sigma_A}\alpha^A$, $A\xrightarrow{\sigma_a}A^a$ Automorphismen von $\mathfrak{G}$, Γ, G sind. (Beispielsweise folgt für $\mathfrak{G}$ die Homomorphieeigenschaft von $a\xrightarrow{\sigma_a}a^\alpha$ aus $(1)_1$; daß es sich um einen Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}$ handelt, ergibt sich aus $(2)_1$: $(a^{\alpha^{-1}})^\alpha=a^\varepsilon=a$, und da aus $a^\alpha=e$ stets $a=(a^\alpha)^{\alpha^{-1}}=e^{\alpha^{-1}}=e$ folgt, hat die Eins nur sich selbst als Urbild.) Dann besagt $(2)_1$, daß die Abbildung $\alpha\rightarrow\sigma_\alpha$ ein Antihomomorphismus von Γ in die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist. Ebenso ist $A\rightarrow\sigma_A$ ein Antihomomorphismus von G in $\mathfrak{A}(\Gamma)$ und $a\rightarrow\sigma_a$ ein solcher von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}(G)$. Die Mengen $\Gamma_1\subset\Gamma$ bzw. $G_1\subset G$ bzw. $\mathfrak{G}_1\subset\mathfrak{G}$ derjenigen Elemente aus Γ bzw. G bzw. $\mathfrak{G}$, die bei diesen Antihomomorphismen auf den identischen Automorphismus von $\mathfrak{G}$ bzw. Γ bzw. G abgebildet werden, bilden dann je einen Normalteiler von Γ bzw. G bzw. $\mathfrak{G}$. Dabei besteht $\mathfrak{G}_1$ genau aus allen Elementen $a\in\mathfrak{G}$ mit $A^a=A$ für alle $A\in G$; ebenso ist $\Gamma_1=(\alpha|\alpha\in\Gamma\wedge a^\alpha=a\forall a\in\mathfrak{G})$ und $G_1=(A|A\in G\wedge\alpha^A=\alpha\forall\alpha\in\Gamma)$. Weil mit $A^a=A$ auch $A^{a^\alpha}=A^a=A$ ist, folgt aus $a\in\mathfrak{G}_1$ sofort $a^\alpha\in\mathfrak{G}_1$; d. h. $\mathfrak{G}_1$ ist zulässiger Normalteiler von $\mathfrak{G}$. (Zulässig in Bezug auf den „Operatorenbereich" Γ.) Genauso sind Γ_1 und G_1 zulässige Normalteiler von Γ und G. Wir behaupten nun:

Die Menge $(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1)$ *der Elemente* (a_1, α_1, A_1) *mit* $a_1 \in \mathfrak{G}_1, \alpha_1 \in \Gamma_1, A_1 \in G_1$ *bildet einen Normalteiler in der Gruppe* $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$.

Beweis. Mit $a_1, b_1 \in \mathfrak{G}_1, \alpha_1, \beta_1 \in \Gamma_1, A_1, B_1 \in G_1$ gilt:

$$(a_1, \alpha_1, A_1)(b_1, \beta_1, B_1)^{-1} = (a_1, \alpha_1, A_1)\big((b_1^{\beta_1^{-1}})^{-1}, (\beta_1^{B_1^{-1}})^{-1}, (B_1^{b_1^{-1}})^{-1}\big) =$$
$$= (a_1, \alpha_1, A_1)(b_1^{-1}, \beta_1^{-1}, B_1^{-1}) = \big(a_1 (b_1^{-1})^{\alpha_1}, \alpha_1 (\beta_1^{-1})^{A_1}, A_1 (B_1^{-1})^{a_1}\big) =$$
$$= (a_1 b_1^{-1}, \alpha_1 \beta_1^{-1}, A_1 B_1^{-1}) \in (\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1),$$

also ist $(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1)$ Untergruppe von $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$. Ferner ist

$$\big((a^{\alpha^{-1}})^{-1}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}, (A^{a^{-1}})^{-1}\big)(a_1, \alpha_1, A_1)(a, \alpha, A) =$$
$$= \big((a^{\alpha^{-1}})^{-1}, (\alpha^{A^{-1}})^{-1}, (A^{a^{-1}})^{-1}\big)(a_1 a^{\alpha_1}, \alpha_1 \alpha^{A_1}, A_1 A^{a_1}) =$$
$$= \big((a^{-1})^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{-1})^{A^{-1}}, (A^{-1})^{a^{-1}}\big)(a_1 a, \alpha_1 \alpha, A_1 A) =$$
$$= \big((a^{-1})^{\alpha^{-1}} (a_1 a)^{(\alpha^{-1})^{A^{-1}}}, (\alpha^{-1})^{A^{-1}} (\alpha_1 \alpha)^{(A^{-1})^{a^{-1}}}, (A^{-1})^{a^{-1}} (A_1 A)^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}}\big) =$$
$$= \big((a^{-1})^{\alpha^{-1}} (a_1 a)^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{-1})^{A^{-1}} (\alpha_1 \alpha)^{A^{-1}}, (A^{-1})^{a^{-1}} (A_1 A)^{a^{-1}}\big) =$$
$$= \big((a^{-1} a_1 a)^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{-1} \alpha_1 \alpha)^{A^{-1}}, (A^{-1} A_1 A)^{a^{-1}}\big) \in (\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1),$$

d. h. $(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1)$ ist Normalteiler in $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$.

Wegen

$$(a_1, \alpha_1, A_1)(b_1, \beta_1, B_1) = (a_1 b_1^{\alpha_1}, \alpha_1 \beta_1^{A_1}, A_1 B_1^{a_1}) = (a_1 b_1, \alpha_1 \beta_1, A_1 B_1)$$

ergibt sich außerdem

$$(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1) \cong \mathfrak{G}_1 \times \Gamma_1 \times G_1. \tag{8}$$

Die Elemente der Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1, \Gamma/\Gamma_1, G/G_1$ sind die Nebenklassen $a\mathfrak{G}_1$, $\alpha\Gamma_1, AG_1$ mit $a \in \mathfrak{G}, \alpha \in \Gamma, A \in G$; dabei gilt $a\mathfrak{G}_1 = b\mathfrak{G}_1$ genau dann, wenn $b^{-1}a \in \mathfrak{G}_1$ ist, und entsprechend in den anderen Fällen. Dann können wir das direkte Produkt $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1 \times \Gamma/\Gamma_1 \times G/G_1$ als schiefes Produkt mit den Elementen $[a\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1, AG_1]$ und der Multiplikationsregel

$$[a\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1, AG_1][b\mathfrak{G}_1, \beta\Gamma_1, BG_1] = [a\mathfrak{G}_1 \cdot b\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1 \cdot \beta\Gamma_1, AG_1 \cdot BG_1] =$$
$$= [ab\mathfrak{G}_1, \alpha\beta\Gamma_1, ABG_1]$$

auffassen, wobei $[\mathfrak{G}_1, \Gamma_1, G_1]$ das Einselement bedeutet. Die Abbildung

$$(a, \alpha, A) \to [a\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1, AG_1]$$

ist eine Abbildung von $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1 \times \Gamma/\Gamma_1 \times G/G_1$; sie ist homomorph, denn es gilt:

$$(a, \alpha, A)(b, \beta, B) = (ab^\alpha, \alpha\beta^A, AB^a) \to [ab^\alpha\mathfrak{G}_1, \alpha\beta^A\Gamma_1, AB^aG_1] =$$
$$= [abb^{-1}b^\alpha\mathfrak{G}_1, \alpha\beta\beta^{-1}\beta^A\Gamma_1, ABB^{-1}B^aG_1] =$$
$$= [ab\mathfrak{G}_1, \alpha\beta\Gamma_1, ABG_1] =$$
$$= [a\mathfrak{G}_1, \alpha\Gamma_1, AG_1][b\mathfrak{G}_1, \beta\Gamma_1, BG_1],$$

weil wegen (7) stets $b^{-1}b^{\alpha}\in\mathfrak{G}_1$, $\beta^{-1}\beta^{A}\in\Gamma_1$, $B^{-1}B^{a}\in G_1$ ist. Ferner wird

$$(a,\alpha,A)\to[\mathfrak{G}_1,\Gamma_1,G_1]$$

genau dann, wenn $a\in\mathfrak{G}_1$, $\alpha\in\Gamma_1$, $A\in G_1$, also $(a,\alpha,A)\in(\mathfrak{G}_1,\Gamma_1,G_1)$ gilt. Damit ist gezeigt:

Satz 2. *Es ist*

$$\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G/(\mathfrak{G}_1,\Gamma_1,G_1)\cong\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1\times\Gamma/\Gamma_1\times G/G_1$$

mit
$$(\mathfrak{G}_1,\Gamma_1,G_1)\cong\mathfrak{G}_1\times\Gamma_1\times G_1,$$

d. h. $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ *ist isomorph einer Schreierschen Erweiterung von* $\mathfrak{G}_1\times\Gamma_1\times G_1$ *durch* $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1\times\Gamma/\Gamma_1\times G/G_1$.

2. Ähnlich wie das bekannte Zappa—Szép-Produkt lassen sich die von uns betrachteten Gruppen $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ als in bestimmter, sogleich noch näher zu beschreibender Weise faktorisierbare Gruppen deuten. Wir können für das Weitere voraussetzen, daß keine der Gruppen $\mathfrak{G}$, Γ, G nur aus dem Einselement besteht. (Andernfalls wäre $\mathfrak{G}\circ\Gamma\circ G$ bereits einem zweifachen schiefen Produkt bekannter Struktur isomorph.)

Wir nennen eine Gruppe $\mathfrak{S}$ dreifach faktorisierbar, wenn es drei eigentliche Untergruppen $\mathfrak{G},\Gamma,G\subset\mathfrak{S}$ gibt, so daß

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{G}\Gamma G \tag{9}$$

gilt. ($\mathfrak{G}\Gamma G$ bezeichnet das Komplexprodukt.) Die Untergruppen $\mathfrak{G}$, Γ, G sind die Faktoren der Faktorisation (9). Die Faktorisation (9) soll streng heißen, wenn jedes Element $\in\mathfrak{S}$ sich eindeutig in der Form

$$a\cdot\alpha\cdot A$$

mit $a\in\mathfrak{G}$, $\alpha\in\Gamma$, $A\in G$ darstellen läßt. (Das bedeutet $G\cap\Gamma\mathfrak{G}\Gamma=\Gamma\cap\mathfrak{G}=1=\text{Eins}\in\mathfrak{S}$.)

Den Kommutator der Elemente $x,y\in\mathfrak{S}$ bezeichnen wir mit

$$[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}.$$

Sind H und K zwei Untergruppen $\subset\mathfrak{S}$, so soll $[H,K]$ die von allen Kommutatoren $[x,y]$ mit $x\in H$, $y\in K$ erzeugte Untergruppe $\subset\mathfrak{S}$ bedeuten. Mit $N(H)$ werde der Normalisator, mit $Z(H)$ der Zentralisator von H in $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

Wir betrachten nun Faktorisationen der Form (9) von $\mathfrak{S}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\Gamma\subset N(\mathfrak{G});\quad G\subset N(\Gamma);\quad \mathfrak{G}\subset N(G); \tag{a}$$

$$[\mathfrak{G},\Gamma]\subset Z(G);\quad [\Gamma,G]\subset Z(\mathfrak{G});\quad [G,\mathfrak{G}]\subset Z(\Gamma). \tag{b}$$

Damit gleichbedeutend sind die Bedingungen

$$[\mathfrak{G},\Gamma]\subset\mathfrak{G};\quad [\Gamma,G]\subset\Gamma;\quad [G,\mathfrak{G}]\subset G; \tag{a'}$$

$$[[\mathfrak{G},\Gamma],G]=[[\Gamma,G],\mathfrak{G}]=[[G,\mathfrak{G}],\Gamma]=\{1\}. \tag{b'}$$

Dann gilt:

Satz 3. *Jede dreifach streng-faktorisierbare Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit den Faktoren* $\mathcal{G}$, Γ, G *und den Eigenschaften* (a), (b) *ist einem schiefen Produkt* $\mathcal{G}\circ\Gamma\circ G$ *des Satzes* 1 *isomorph und umgekehrt.*

Beweis. 1. Es sei $\mathfrak{G}=\mathcal{G}\Gamma G$ eine strenge Faktorisation mit den Eigenschaften (a), (b). Dann definieren wir

$$a^{\alpha}=\alpha a\alpha^{-1}\in\mathcal{G} \qquad \text{(wegen (a))}$$

und entsprechend

$$\alpha^{A}=A\alpha A^{-1}\in\Gamma; \quad A^{a}=aAa^{-1}\in G.$$

Durch diese Funktionen a^{α}, α^{A}, A^{α}, die den Anfangsbedingungen (0) genügen, ist das schiefe Produkt $\mathcal{G}\circ\Gamma\circ G$ eindeutig bestimmt. Nun behaupten wir, daß die Abbildung

$$a\cdot\alpha\cdot A\rightarrow(a,\alpha,A^{a}) \tag{10}$$

von $\mathfrak{G}$ in $\mathcal{G}\circ\Gamma\circ G$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathcal{G}\circ\Gamma\circ G$ ist. Wegen

$$a\cdot\alpha\cdot A^{a^{-1}}\rightarrow\left(a,\alpha,(A^{a^{-1}})^{a}\right)=\left(a,\alpha,(a^{-1}Aa)^{a}\right)=(a,\alpha,aa^{-1}Aaa^{-1})=(a,\alpha,A)$$

ist (10) eine Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathcal{G}\circ\Gamma\circ G$. Da aus $(a,\alpha,A^{a})=(b,\beta,B^{b})$ sofort $a=b$, $\alpha=\beta$, $A^{a}=B^{b}=B^{a}$, also $A=B$ folgt, ist die Abbildung (10) eineindeutig. Ferner gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}\beta^{A^{a}}&=A^{a}\beta(A^{a})^{-1}=aAa^{-1}\beta aA^{-1}a^{-1}=A[A^{-1},a]\beta[A^{-1},a]^{-1}A^{-1}=\\&=A\beta A^{-1}\quad\text{(wegen (b))}=\beta^{A};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{a}(B^{b})^{a}&=aAa^{-1}aB^{b}a^{-1}=aAbBb^{-1}a^{-1}=abb^{-1}AbBb^{-1}a^{-1}=abA^{b^{-1}}Bb^{-1}a^{-1}=\\&=ab[b^{-1},\alpha]A^{b^{-1}}B[b^{-1},\alpha]^{-1}b^{-1}a^{-1}\qquad\text{(wegen (b))}\\&=a\alpha b\alpha^{-1}A^{b^{-1}}B\alpha b^{-1}\alpha^{-1}a^{-1}=ab^{\alpha}A^{b^{-1}}B(ab^{\alpha})^{-1}=(A^{b^{-1}}B)^{ab^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(a,\alpha,A^{a})(b,\beta,B^{b})=\left(ab^{\alpha},\alpha\beta^{A^{a}},A^{a}(B^{b})^{a}\right)=\left(ab^{\alpha},\alpha\beta^{A},(A^{b^{-1}}B)^{ab^{\alpha}}\right).$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}(a\cdot\alpha\cdot A)\cdot(b\cdot\beta\cdot B)&=a\alpha Ab\beta B=a\alpha bA[A^{-1},b^{-1}]\beta B=\\&=a\alpha b\alpha^{-1}\alpha A[A^{-1},b^{-1}]\beta B=a\alpha b\alpha^{-1}\alpha A\beta[A^{-1},b^{-1}]B\qquad\text{(wegen (b))}\\&=ab^{\alpha}\alpha A\beta A^{-1}b^{-1}AbB=ab^{\alpha}\cdot\alpha\beta^{A}\cdot A^{b^{-1}}B.\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$(a\cdot\alpha\cdot A)\cdot(b\cdot\beta\cdot B)=ab^{\alpha}\cdot\alpha\beta^{A}\cdot A^{b^{-1}}B\rightarrow\left(ab^{\alpha},\alpha\beta^{A},(A^{b^{-1}}B)^{ab^{\alpha}}\right)=(a,\alpha,A^{a})(b,\beta,B^{b}),$$

also ist (10) ein Homomorphismus und somit nach dem Vorigen ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathcal{G}\circ\Gamma\circ G$.

2. In der Gruppe $\mathcal{G}\circ\Gamma\circ G$ bilden die Elemente (a,ε,E) mit $a\in\mathcal{G}$ offenbar eine Untergruppe $(\mathcal{G})\cong\mathcal{G}$; entsprechendes gilt für die Elemente (e,α,E) und (e,ε,A).

Wir können nun durch den Isomorphismus $(\mathfrak{C}) \ni (a, \varepsilon, E) \to a \in \mathfrak{G}$ die Untergruppe $\mathfrak{G}$ — und entsprechend Γ und G — in $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ einbetten. Dann ist jedes Element $(a, \alpha, A) \in \mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ eindeutig in der Form

$$(a, \alpha, A) = (a, \varepsilon, E)(e, \alpha, E)(e, \varepsilon, A^{a^{-1}}) = a \cdot \alpha \cdot A^{a^{-1}}$$

mit $a \in \mathfrak{G}$, $\alpha \in \Gamma$, $A^{a^{-1}} \in G$ darstellbar, d. h. $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G$ ist dreifach streng-faktorisierbar mit den Faktoren $\mathfrak{G}$, Γ, G.

Aus

$$\begin{aligned}[\alpha, a] = \alpha a \alpha^{-1} a^{-1} &= (e, \alpha, E)(a, \varepsilon, E)(e, \alpha^{-1}, E)(a^{-1}, \varepsilon, E) = \\ &= (a^{\alpha}, \alpha, E)\big((a^{-1})^{\alpha^{-1}}, \alpha^{-1}, E\big) = (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, E) = a^{\alpha} a^{-1} \in \mathfrak{G}\end{aligned}$$

folgt die erste Bedingung von (a'); entsprechend ergeben sich die beiden anderen.

Mit

$$\begin{aligned}\big[[\alpha, a], A\big] = [a^{\alpha} a^{-1}, A] &= (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, E)(e, \varepsilon, A)(a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, E)^{-1}(e, \varepsilon, A)^{-1} = \\ &= (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, A^{a^{\alpha} a^{-1}})\big(a(a^{\alpha})^{-1}, \varepsilon, E\big)(e, \varepsilon, A^{-1}) = \\ &= (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, A)\big(a(a^{-1})^{\alpha}, \varepsilon, (A^{-1})^{a(a^{-1})^{\alpha}}\big) = \\ &= (a^{\alpha} a^{-1}, \varepsilon, A)\big(a(a^{-1})^{\alpha}, \varepsilon, A^{-1}\big) = \\ &= \big(e, \varepsilon, A(A^{-1})^{a^{\alpha} a^{-1}}\big) = (e, \varepsilon, AA^{-1}) = (e, \varepsilon, E)\end{aligned}$$

ist die erste Beziehung (b′) erfüllt; genauso folgen die beiden anderen. Also besitzt die Faktorisation $\mathfrak{G} \circ \Gamma \circ G = \mathfrak{G} \Gamma G$ die Eigenschaften (a), (b), q. e. d.

Literatur

[1] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201–227.

(Eingegangen am 13. November 1962)