Bibliographie

Richard R. Goldberg, Fourier Transforms (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 52), VIII+76 pages, University Press, Cambridge, 1961.

This tract was designed for providing a background in those classical theorems concerning Fourier transforms on the real line which have fruitful generalizations in abstract harmonic analysis. Although a familiarity with Lebesgue and Riemann—Stieltjes integration is required from the reader, all the use of function analytic methods is avoided (at the expense of some theorems being left without proof). There is a neat introduction to the Fourier transform on L^1, including WIENER's theorem on the translates in L^1 and ending with an „algebraized" reformulation of some of the results in terms of ideals in a commutative Banach algebra. A chapter deals with the Fourier transform on L^2, giving in particular a proof of PLANCHEREL's theorem. The next chapter considers generalizations of the Wiener theorem, taking up the problem (equivalent to a famous problem of BEURLING) of whether or not the zeros of the Fourier transform of an L^1-function determine the span of the translates of the function. BOCHNER's theorem on the Fourier—Stieltjes transforms of non-decreasing bounded functions is the subject of the last chapter. There is an appendix in which it is briefly pointed out how the concepts and theorems treated can be carried over to an arbitrary locally compact abelian group.

As it can be seen from these short indications, the tract succeeds in condensing, on its 72 pages of text, a very large amount of material. This is done in a clear and readable style. To the reviewer's opinion the tract has attained the object it was designed for.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

Alexander Dinghas, Vorlesungen über Funktionentheorie (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 110), XV+403 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961.

In diesen Vorlesungen werden die Grundlagen der Cauchy—Riemann—Nevanlinnaschen Funktionentheorie dargestellt, auf Grund moderner Gesichtspunkte. Die Kapiteltitel entsprechen der traditionellen Aufbau der Theorie: I. Die komplexe Ebene, II. Topologie der komplexen Ebene. Die Cauchysche Konvergenztheorie. Stetige Abbildungen, III. Lokale Eigenschaften der eindeutigen analytischen Funktionen, IV. Die Hauptsätze der Cauchyschen Funktionentheorie, V. Erzeugung analityscher Funktionen durch Grenzprozesse. Der Riemann—Weierstraßsche Begriff der analytischen Funktion, VI. Die Eulersche Gammafunktion und die Riemannsche Zetafunktion, VII. Majorisierung und Wachstumsprobleme, VIII. Geometrische Funktionentheorie. Konforme Abbildung, IX. Eindeutige analytische Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität. Unter diesen Kapiteltiteln wird eine Fülle an klassischem und modernem Material geboten, teilweise in Paragraphen eingeteilt, teilweise als Ergänzungen und Aufgaben, mit vielen Literaturhinweisen. Zur Orientation mögen hier einige Titel aus den „Ergänzungen" stehen: Der Satz von LOOMANN—MENSCHOFF. MORDELLS Beweis der Hadamardschen Lückensatzes. KUMMERS Fourier-Entwicklung von $\log \Gamma(\sigma)$. Der Satz von MILLOUX—SCHMIDT. Der Verzerrungssatz von KOEBE und BIEBERBACH. Der transfinite Durchmesser einer Punktmenge. BEURLINGS Verallgemeinerung eines Satzes von FATOU.

An Vorkenntnissen werden nur die Elemente der reellen Analysis vorausgesetzt. Alles ist mit großer Sorgfalt angeordnet und dargestellt. Der Leser wird bis an die Grenze eines großen Teiles moderner Forschung geführt.

Zweifellos werden diese Vorlesungen Studenten sowie Lehrern der Funktionentheorie von vielem Nutzen sein und das Buch wird auch als Nachschlagewerk viel gebraucht.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

E. R. Lorch, Spectral Theory (University Texts in the Mathematical Sciences), 158 pages, Oxford University Press, New York, 1962.

This is a compact, but very readable and clear introduction to the theories of Banach and Hilbert spaces and Banach algebras. It covers a large amount of general information and goes into a considerable depth when treating the key points of the theory.

The work consists of six chapters. The first two introduce the Banach spaces and their linear transformations, and give — among other basic material — a complete treatment of the three cardinal points: the Hahn—Banach theorem, the theorem on the boundedness of the inverse transformation, and the uniform boundedness theorem. The author's mean ergodic theorem on uniformly bounded transformations in a reflexive Banach space finds here its natural place. The third chapter introduces the Hilbert space and its linear transformations, both bounded and unbounded, and leads as far as the concepts of the resolution of the identity and the spectral integral. The spectral theorem for selfadjoint transformations is delayed until the fifth chapter, where it is proved by the author's own method, first expounded in these *Acta*, **12 B** (1950), 137—144. The proof is a natural outgrow of the Riesz—Lorch—Gelfand—Dunford contour integration theory in the resolvent sets; this theory is treated, in the Banach space operators setting, including spectral radius and other related theorems, in the fourth chapter. The last — sixth — chapter deals with commutative Banach algebras, expounding all the basic facts of GELFAND's theory, including some illustrative examples. A footnote remark points out that the author's own work in connection with Banach algebras in part ran parallel with GELFAND's work, which, though published in Moscow in 1941, due to the war conditions did not immediately reach all the centers of mathematical activity.

In its original limited edition in Italian, Professor LORCH's book found a cordial reception in Italy about 10 years ago. The present, enlarged edition in English will centainly be given a similarly warm reception by everyone who shares with the reviewer his appreciation of a text-book which is "generous in its demands and complete in its details" and which, moreover, makes the reader constantly feel the deep and creative contact of the author with the subject he mastered.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

Ladislaus Rédei, Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen, 228 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1963.

Die Theorie der Halbgruppen ist in den letzten zwei bis drei Jahrzenten Gegenstand von vielen Untersuchungen geworden. Da aber die Halbgruppen ein sehr allgemeiner Begriff sind, ist es kein Wunder, daß in ihrer Theorie neben einer Reihe schöner Ergebnisse noch sehr viele Probleme ihrer Lösung harren. Ein solches Problem boten die endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen, deren Theorie hier erstmalig aufgestellt wird.

Alle Resultate der vorliegenden Monographie sind fast buchstäblich neu. Die Betrachtungen sind zwar rein algebraisch, sind jedoch auf natürliche Weise in ein geometrisches Gewand gekleidet, nämlich in den mehrdimensionalen Gitterpunktsraum eingebettet, wodurch die Ausführungen sehr erleichtert werden. Die Theorie kann so gewißermaßen als ein Kapitel der mehrdimensionalen Gitterpunkttheorie betrachtet werden.

Im folgenden wollen wir einige grundlegende Ideen des Buches hervorheben. F bezeichnet den freien Halbmodul n-ten Ranges. Da die homomorphen Bilder von F genau die durch n Elemente erzeugten kommutativen Halbgruppen mit Einselement sind, ist die Aufstellung eines vollständigen Systems untereinander nicht isomorpher endlich erzeugbarer kommutativer Halbgruppen mit Einselement im wesentlichen mit der Untersuchung aller Kongruenzen in F (kurz F-Kongruenzen) äquivalent.

Ein treffliches Mittel zur Beschreibung der F-Kongruenzen zu finden gelang Prof. RÉDEI mittels sogenannter Kernfunktionen, die wir nun in Kürze beschreiben.

Die Elemente von F werden als $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$ geschrieben, wobei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ freie Erzeugende von F sind und die a_i nichtnegative ganze Zahlen bezeichnen. Es werde F in natürlicher Weise in die Gruppe $F^\circ = \{(a_1, \ldots, a_n),\ a_i = \text{ganz}\}$ eingebettet.

Für beliebige $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ (Elemente von F°) definiere man $\alpha \cup \beta = (\max(a_1, b_1), \ldots, \max(a_n, b_n))$, $\alpha \cap \beta = (\min(a_1, b_1), \ldots, \min(a_n, b_n))$, $\alpha^+ = \alpha \cup 0$, $\alpha^- = (-\alpha) \cup 0$.

Es sei $\mathcal{C}$ eine F-Kongruenz. Dann ist $M = M(\mathcal{C}) = \{\alpha - \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{C}\}$ ein Untermodul von F°. Zu jedem $\mu \in M$ ordner wir folgendes Ideal von F zu:

$$(*) \qquad f(\mu) = \{\xi \in F \mid (\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \mathcal{C}\}.$$

Diese Funktion (deren Wertevorrat also die Menge der Ideale von F ist) wird die der Kongruenz $\mathcal{C}$ zugeordnete Kernfunktion genannt.

Umgekehrt: Eine Funktion f, die an einem Untermodul von F° definiert ist und deren Funktionswerte $f(\mu)$ Ideale von F sind, nennt man eine Kernfunktion, falls $\mathrm{A}_1)$ $f(0) = F$; $\mathrm{A}_2)$ $f(\mu) = f(-\mu)$; $\mathrm{A}_3)$ $(\mu^+ + f(\mu)) \cap (\nu^+ + f(\nu)) \subseteq \mu \cup \nu + f(\mu - \nu)$.

Ist an einem Untermodul $M \subseteq F^\circ$ eine Kernfunktion gegeben, so kann man mittels ihrer eine F-Kongruenz (die der Kernfunktion f zugeordnete Kongruenz) konstruieren durch folgende Feststellung:

$$(**) \qquad \mathcal{C} = \{(\alpha, \beta) \in F \times F \mid \alpha - \beta \in M,\ \alpha \cap \beta \in f(\alpha - \beta)\}$$

Das vorliegende Buch ist in fünf Kapitel geteilt.

Kapitel I (Seite 12—26) ist, außer den Vorbemerkungen und der Definition der Kernfunktion, dem Fundamentalsatz gewidmet. Es existert eine ein-eindeutige Abbildung der Menge aller F-Kongruenzen auf die Menge aller Kernfunktionen derart, daß für jedes zusammengehörende Paar $(\mathcal{C}, f)$:

1) Der $\mathcal{C}$ zugeordnete Modul M mit dem Erklärungsmodul von f übereinstimmt. 2) f ist durch $\mathcal{C}$ mittels der Relation $(*)$ gegeben. 3) $\mathcal{C}$ ist durch f mittels $(**)$ festgelegt.

Das ermöglicht das Studium von F-Kongruenzen in das Studium der Kernfunktionen zu überführen.

Kapitel II (Seite 26—51) hat die Überschrift „Elementare Eigenschaften der Kernfunktionen". Es werden hier mehrere äquivalente Formen von Axion A_3 gegeben. Ein interessanter Satz (den der Verfasser als ersten Reziprozitätssatz bezeichnet) löst die folgende Frage. Es seinen $\mu, \nu, \in F^{\circ}$ und $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zwei Ideale von F. Es ist die notwendige und hinreichende Bedingung zu finden, damit es eine Kernfunktion gibt so, daß $f(\mu)=\mathfrak{m}$, $f(\nu)=\mathfrak{n}$.

Kapitel III (Seite 51—94) behandelt die Idealtheorie des freien Halbmoduls endlichen Ranges. Dieses Kapitel hat naturgemäß auch ein selbstständiges Interesse.

Unter anderem wird für Ideale $\mathfrak{a}$ von F der Begriff einer Kongruenz (mod $\mathfrak{a}$) in F eingeführt. Man setze $\varrho \equiv \sigma (\text{mod } \mathfrak{a})$ dann und nur dann, wenn $F \cap (-\varrho + \mathfrak{a}) = F \cap (-\sigma + \mathfrak{a})$. Für jedes $\mathfrak{a}$ gibt es nur endlich viele Klassen mod $\mathfrak{a}$ .Verschiedene Sätze über solche Klassen werden bewiesen. Der sogenannte zweite Reziprozitätssatz beschreibt die Beziehung zwischen Klassen mod $\mathfrak{a}$ und Klassen mod μ, wo $\mu \in F^{\circ}$ ist (die Kongruenz mod μ ist in natürlicher Weise definiert).

Kapitel IV (Seite 95—212) mit der Überschrift „Weitere Eigenschaften der Kernfunktionen" enthält die wichtigsten Ergebnisse.

Zuerst wird bewiesen: Es sei $\mathcal{C}$ eine F-Kongruenz mit dem zugeordneten Modul M. Dann gibt es mindestens ein Hauptideal $\xi + F (\xi \in F)$, sodaß für die Elemente $\alpha, \beta \in \xi + F$ die Inklusion $\alpha \equiv \beta (\text{mod } M) \Rightarrow \alpha \equiv \beta (\text{mod } \mathcal{C})$ gilt. (Die umgekehrte Inklusion ist trivial). Die Vereinigung aller solchen Hauptideale heißt der Kern $\mathfrak{k}$ der F-Kongruenz. Der Kern einer Kernfunktion f wird als der Kern der f zugeordneten F-Kongruenz definiert. Es gilt $\mathfrak{k} = \bigcap_{\mu \in M} f(\mu)$, d. h. $\mathfrak{k}$ ist der Durchschnitt aller Werte von f und $\mathfrak{k}$ ist nicht leer (das ist nicht trivial!). (An einem Beispiel wird gezeigt, daß $\mathfrak{k}$ nicht zu dem Wertevorrat von f gehören muß.)

Ein sehr wichtiges Ergebnis besagt: Jede Kernfunktion hat einen endlichen Wertevorrat.

Es liegt an der Hand, daß die Menge der Kernfunktionen sich auf natürliche Weise verschiedenartig klassifizieren läßt. Der Verfasser führt einige Begriffe ein, wie z. B. Dimension, Rang, Ordnung und Grad einer Kernfunktion und studiert eingehend spezielle Klassen von Kernfunktionen.

Ein schwerwiegendes Resultat, das für abelsche Gruppen wohlbekannt ist, aber für Halbgruppen nicht bekannt war, ist in § 33 bewiesen und lautet: Jede endlich erzeugbare kommutative Halbgruppe ist endlich (nämlich durch endlich viele Gleichungen) definierbar.

Daß die Kernfunktionen ein treffliches Mittel zur Beschreibung der F-Kongruenzen sind, wird auch durch die Tatsache bestätigt, daß jede F-Kongruenz $\mathcal{C}$ eine gemeinsame Verfeinerung aller Kongruenzen nach denjenigen Idealen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ ist, die zum Wertevorrat der zugehörigen Kernfunktion gehören.

Kapitel V (Seite 213—224) ist dem Isomorphieproblem der Theorie gewidmet. Zwei Kernfunktionen heißen äquivalent, wenn die Faktorhalbmoduln nach den zugeordneten F-Kongruenzen isomorph sind. Das Problem ist in dem Sinne gelöst, daß ein Verfahren angegeben wird, nach dem man aus einer Kernfunktion die sämtlichen mit ihr äquivalenten Kernfunktion gewinnt.

In einem kurzen Anhang wird der Fall der Halbgruppen ohne Einselement erledigt.

Bei der Lektüre treten mehrere ungelöste Probleme auf, einige solche werden explizit angegeben.

Die Idee der Kernfunktionen wird wahrscheinlich auch in anderen Fragen der Theorie der Halbgruppen Anwendungen finden.

Der Stil ist meisterhaft. Eine Reihe von Vorbemerkungen macht die einzelnen Absätze sehr gut lesbar. Die Hauptideen und Hauptresultate werden an passend gewählten Stellen klar hervorgehoben.

Wie schon bemerkt, fast alles in dieser Arbeit ist neu. Professor Rédei gab mit diesem Buch eine erstklassige Leistung. Die vorliegende Monographie bedeutet eine wesentliche Bereicherung der Theorie der Halbgruppen.

Štefan Schwarz (Bratislava)