АВТОМАТЫ И ПОЛУГРУППЫ. I

И. ПЕАК (Сегед)*)

В статье В. М. Глушкова [2] изложены некоторые связи между автоматами и полугруппами с абстрактной точки зрения. Целью настоящей работы является продолжение этих исследований в подобном духе.

1. Прежде всего мы перечисляем нужные для нас понятия, определения и обозначения.

Автоматом называется объект $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, состоящий из двух непустых множеств $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}$ и функции $\delta(a, x) \in \mathfrak{A}$ $(a \in \mathfrak{A}, x \in \mathfrak{X})$, определенной на этих множествах. Множества $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}$ и функция $\delta(a, x)$ называются множеством состояний, множеством входных сигналов и функцией переходов, соответственно.

В случае произвольного автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ для данного состояния a $(\in \mathfrak{A})$ и данного слова $p=x_1x_2\dots x_k$ $(\in F(\mathfrak{X}))$[1]) мы определим новое состояние автомата A, обозначенное через ap, следующим образом: сперва мы расширим естественным способом область определения функции переходов $\delta(a, x)$ автомата A с множества $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$ на множество $\mathfrak{A}\times F(\mathfrak{X})$ так, что для любого a $(\in \mathfrak{A})$ и $p=x_1x_2\dots x_k$ $(\in F(\mathfrak{X}))$ пусть $\delta(a, p)=a_1a_2\dots a_k$, где $a_1=\delta(a, x_1)$, $a_2=\delta(a_1, x_2), \dots, a_k=\delta(a_{k-1}, x_k)$, а затем мы полагаем $ap=a_k$.

В статье В. М. Глушкова [2] для каждого автомата A определена некоторая полугруппа, принадлежащая автомату A, которую мы условимся обозначать через $S(A)$. Для произвольного автомата A, полугруппа $S(A)$ определяется следующим образом: Каждый автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ индуцирует в свободной полугруппе $F(\mathfrak{X})$ без единицы некоторое отношение конгруентности $\varrho(A)$:

$$p \equiv q(\varrho(A)) \Leftrightarrow \forall_{a\in\mathfrak{A}}\, a[ap=aq] \qquad (p, q \in F(\mathfrak{X})).$$

Полугруппа $S(A)$ определяется теперь, как полугруппа, изоморфная факторполугруппе $F(\mathfrak{X})/\varrho(A)$ свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ без единицы, по отношению конгруентности $\varrho(A)$, индуцируемому автоматом A.

Пусть заданы полугруппы $S, S_1, \dots, S_n$. Через $S \cong S_1 \otimes \dots \otimes S_n$ обозначается то обстоятельство, что полугруппа S является прямым произведением полугрупп $S_1, \dots, S_n$, т. е. полугруппа S изоморфна полугруппе $S_1\times\dots\times S_n$

*) I. Peák (Szeged).

[1]) Здесь, и везде в этой статье, через $F(\mathfrak{X})$ обозначается свободная полугруппа без единицы в алфавите $\mathfrak{X}$.

всех векторов $(s_1, \ldots, s_n)$ $(s_i \in S_i)$, умножение в которой определяется с помощью уравнений

$$(s_1, \ldots, s_n)(r_1, \ldots, r_n) = (s_1 r_1, \ldots, s_n r_n) \qquad (s_i, r_i \in S_i).$$

Говорят, что полугруппа S является подпрямым произведением полугрупп $S_1, \ldots, S_n$, если S изоморфно некоторой подполугруппе S' прямого произведения $S_1 \otimes \ldots \otimes S_n$ и для всякого элемента s_i из S_i найдется элемент $(s'_1, \ldots, s'_n)$ полугруппы S', для которого $s'_i = s_i$. (См. Г. Биркгоф [1].)

Существует несколько известных композиций, при помощи которых из наперед заданных автоматов можно строить новый автомат. Такими композициями являются например: прямая сумма (прямое разложение), прямое произведение и (общее) произведение автоматов.

Теперь сформулируем поставленную нами задачу:

Пусть автомат A составленной из некоторых автоматов $A_1, \ldots, A_n$ при помощи какой-нибудь из только-что перечисленных композиций. Спрашивается, какие связи можно установить между полугруппой $S(A)$, с одной стороны, и полугруппами $S(A_1), \ldots, S(A_n)$, — с другой.

2. Автомат $A_1 = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}_1, \delta_1)$ называется подавтоматом автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, если $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}$ имеет место и функции переходов δ_1 и δ совпадают на множестве $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{X}_1 (\subseteq \mathfrak{A} \times \mathfrak{X})$. Автомат A назовем $\mathfrak{A}$-подавтоматом автомата A', если A является подавтоматом автомата A' и при этом множество входных сигналов автомата A совпадает с множеством входных сигналов автомата A'. Аналогичным образом понимается $\mathfrak{X}$-подавтомат автомата.

Мы говорим, что автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ разлагается в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, и пишем $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, если $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ имеет место. Разложение автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ называется разложением типа $\mathscr{P}$, если для всякой последовательности слов $p_1, \ldots, p_n$ свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ существует слово $p\,(\in F(\mathfrak{X}))$, удовлетворяющее условию $\forall_{i=1,\ldots,n}\; i \;\forall_{a \in \mathfrak{A}_i}\; a[ap_i = ap]$.

Легко доказывается следующая

Лемма 1. (См. также Г. Биркгоф [1], гл. VI, § 6.) *Пусть задано некоторое множество $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ отношений конгруентности в полугруппе S. Если $\varrho = \varrho_1 \cap \ldots \cap \varrho_n$, тогда полугруппа S/ϱ является подпрямым произведением полугрупп $S/\varrho_1, \ldots, S/\varrho_n$.*

Доказательство. Так как пересечение ϱ отношений конгруентности $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ опять является отношением конгруентности, то фактор-полугруппа S/ϱ существует. Элементами полугрупп S/ϱ и $S/\varrho_1, \ldots, S/\varrho_n$ являются все классы $C_\varrho, C_{\varrho_1}, \ldots C_{\varrho_n}$ исходной полугруппы S по отношениям конгруентности ϱ и $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, соответственно. По определению ϱ для каждого C_ϱ существует последовательность классов $C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n}$, для которых имеет место

$$C_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C_{\varrho_n} = C_\varrho. \tag{1}$$

Возьмем для каждого C_ϱ последовательность классов $C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n}$, удовлетворяющую условию (1) и определим отображение

$$C_\varrho \to (C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n}) \qquad (C_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C_{\varrho_n} = C_\varrho). \tag{2}$$

Очевидно, что отображение (2) является взаимно однозначным и оно отображает полугруппу S/ϱ в полугруппу $S/\varrho_1 \otimes \ldots \otimes S/\varrho_n$. Покажем теперь, что (2) являяется гомоморфным отображением. Пусть еще для этой цели

$$C'_\varrho \to (C'_{\varrho_1}, \ldots, C'_{\varrho_n}) \quad (C'_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C'_{\varrho_n} = C'_\varrho).$$

Тогда из $C_\varrho \subseteqq C_{\varrho_i}$, $C'_\varrho \subseteqq C'_{\varrho_i}$ $(i=1, \ldots, n)$ следует $C_\varrho C'_\varrho \subseteqq C_{\varrho_i} C'_{\varrho_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, и поэтому $C_\varrho C'_\varrho \subseteqq C_{\varrho_1} C'_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C_{\varrho_n} C'_{\varrho_n}$, т. е. $C_\varrho C'_\varrho = C_{\varrho_1} C'_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C_{\varrho_n} C'_{\varrho_n}$, откуда мы получаем

$$C_\varrho C'_\varrho \to (C_{\varrho_1} C'_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n} C'_{\varrho_n}) = (C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n})(C'_{\varrho_1}, \ldots, C'_{\varrho_n}),$$

и это означает, что взаимно однозначное отображение (2) является изоморфизмом полугруппы S/ϱ в полугруппу $S/\varrho_1 \otimes \ldots \otimes S/\varrho_n$.

Пусть S' обозначает подполугруппу прямого произведения $S/\varrho_1 \otimes \ldots$ $\ldots \otimes S/\varrho_n$, изоморфную полугруппе S/ϱ при изоморфизме (2). Иначе говоря, пусть S' есть полугруппа всех векторов $(C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n})$, удовлетворяющих условию (1). Выберем теперь произвольный элемент C_{ϱ_i} из полугруппы S/ϱ_i. Тогда найдется некоторый класс C_ϱ в S так, что $C_\varrho \subseteqq C_{\varrho_i}$ и существует последовательность классов $C'_{\varrho_1}, \ldots, C'_{\varrho_n}$, для которых имеет место $C_\varrho = C'_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C'_{\varrho_n}$. Тогда из $C_\varrho \subseteqq C_{\varrho_i}$ и $C_\varrho \subseteqq C'_{\varrho_i}$ следует $C'_{\varrho_i} = C_{\varrho_i}$. И так мы получили, что для произвольного элемента C_{ϱ_i} $(\in S/\varrho_i)$ найдется элемент $(C'_{\varrho_1}, \ldots, C'_{\varrho_n})$ из S', для которого $C'_{\varrho_i} = C_{\varrho_i}$. Это именно означает, что полугруппа S/ϱ является подпрямым произведением полугрупп $S/\varrho_1, \ldots, S/\varrho_n$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Если автомат A разлагается в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_1, \ldots, A_n$, тогда полугруппа $S(A)$ является подпрямым произведением полугрупп $S(A_1), \ldots, S(A_n)$.*

Доказательство. Пусть автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ разлагается в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$. Возьмем свободную полугруппу $F = F(\mathfrak{X})$ в алфавите $\mathfrak{X}$. Каждый $\mathfrak{A}$-подавтомат A_i индуцирует в F некоторое отношение конгруентности $\varrho_i = \varrho(A_i)$, соответственная фактор-полугруппа F/ϱ_i которому изоморфна полугруппе $S(A_i)$, принадлежащей автомату A_i, т. е.

$$F/\varrho_i \cong S(A_i). \tag{3}$$

Рассмотрим теперь отношение конгруентности ϱ $(=\varrho_1 \cap \ldots \cap \varrho_n)$ в полугруппе F и возьмем фактор-полугруппу F/ϱ. По лемме 1 из (3) следует что, F/ϱ является подпрямым произведением полугрупп $S(A_1), \ldots, S(A_n)$.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1, достаточно еще показать, что отношение конгруентности ϱ совпадает с отношением конгруентности $\varrho(A)$, индуцируемым автоматом A в свободной полугруппе F. А это легко получается следующим образом: для всякой пары слов $p, q\ (\in F)$ имеет место

$$p\equiv q(\varrho(A))\Leftrightarrow \underset{a\in\mathfrak{A}}{\forall}\ a[ap=aq]\Leftrightarrow \underset{i=1,\dots,n}{\forall}\ i\ \underset{a\in\mathfrak{A}_i}{\forall}\ a[ap=aq]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{i=1,\dots,n}{\forall}\ i[p\equiv q(\varrho(A_i))]\Leftrightarrow p\equiv q\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\varrho(A_i)\Big)\Leftrightarrow p\equiv q(\varrho).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть автомат A разлагается в прямую сумму некоторых его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_1, \dots, A_n$. Если разложение $A=A_1\oplus\dots\oplus A_n$ автомата A является разложением типа $\mathscr{P}$, то $S(A)\cong S(A_1)\otimes\dots\otimes S(A_n)$.*

Доказательство. Пусть автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ разлагается в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i=1, \dots, n)$. Тогда по теореме 1 полугруппа $S(A)$ изоморфна некоторой подполугруппе прямого произведения $S(A_1)\otimes\dots\otimes S(A_n)$ и по доказательству леммы 1 некоторым изоморфизмом полугруппы $S(A)$ в $S(A_1)\otimes\dots\otimes S(A_n)$ может служить отображение

$$C_\varrho\to(C_{\varrho_1}, \dots, C_{\varrho_n}), \tag{4}$$

где C_ϱ — произвольный класс эквивалентности в $F(\mathfrak{X})$ по отношению конгруентности $\varrho=\varrho(A)$ и C_{ϱ_i} $(i=1, \dots, n)$ — все классы эквивалентности в $F(\mathfrak{X})$ по отношениям конгруентности $\varrho_i=\varrho(A_i)$, пересечение $C_{\varrho_1}\cap\dots\cap C_{\varrho_n}$ которых является непустым, а именно $C_{\varrho_1}\cap\dots\cap C_{\varrho_n}=C_\varrho$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно еще показать, что отображение (4) отображает полугруппу $S(A)$ *на* полугруппу $S(A_1)\otimes\dots\otimes S(A_n)$ тогда и только тогда, если разложение $A=A_1\oplus\dots\oplus A_n$ автомата A является разложением типа $\mathscr{P}$.

То, что (4) отображает полугруппу $S(A)$ *на* $S(A_1)\otimes\dots\otimes S(A_n)$ означает, что для всякой последовательности классов $C_{\varrho_1}, \dots, C_{\varrho_n}$ пересечение $C_{\varrho_1}\cap\dots\cap C_{\varrho_n}$ является непустым, т. е. для всякой последовательности слов $p_1, \dots, p_n$ $(\in F(\mathfrak{X}))$ найдется слово p $(\in F(\mathfrak{X}))$, удовлетворяющее условиям $p_i=p(\varrho_i)$ $(i=1, \dots, n)$, иначе говоря, что для всякой последовательности слов $p_1, \dots, p_n$ $(\in F(\mathfrak{X}))$ найдется слово p $(\in F(\mathfrak{X}))$ таково, что $\underset{a\in\mathfrak{A}_i}{\forall}\ a[ap_i=ap]$ имеет место для каждого $i\ (=1, \dots, n)$. А это именно означает, что разложение $A=A_1\oplus\dots\oplus A_n$ автомата A является разложением типа $\mathscr{P}$. С этим завершается доказательство теоремы 2.

3. Прямым произведением нескольких автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \dots, n)$ называется автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, у которого

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_n,\quad \mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\times\dots\times\mathfrak{X}_n$$

и функция переходов δ определяется следующим образом:

$$\delta((a_1, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_n))=(\delta_1(a_1, x_1), \dots, \delta_n(a_n, x_n))\qquad (a_i\in\mathfrak{A}_i,\ x_i\in\mathfrak{X}_i).$$

Теорема 3. *Если автомат A является прямым произведением автоматов $A_1, \dots, A_n$, тогда полугруппа $S(A)$ является подпрямым произведением полугрупп $S(A)_1, \dots, S(A_n)$.*

Доказательство. Пусть автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ является прямым произведением автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$.

Каждое слово p $(\in F(\mathfrak{X}))$ создается в виде

$$p=(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})\ldots(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \tag{5}$$

приписывания букв $(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ $(j=1, \ldots, k)$, входящих в алфавит $\mathfrak{X}$. Мы конструируем следующее отображение: каждому слову p $(\in F(\mathfrak{X}))$ вида (5) мы сопоставляем элемент

$$(x_1^{(1)}x_1^{(2)}\ldots x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(1)}x_n^{(2)}\ldots x_n^{(k)})$$

полугруппы $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$. Заметим, что при этом отображении длины слов $x_i^{(1)}x_i^{(2)}\ldots x_i^{(k)}$ $(\in F(\mathfrak{X}_i))$ равняются между собой для всех i $(=1, \ldots, n)$. С этим задано некоторое однозначное отображение

$$p\to(p_1, \ldots, p_n) \qquad (p\in F(\mathfrak{X});\ p_i\in F(\mathfrak{X}_i)) \tag{6}$$

свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ на подмножество прямого произведения $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$, состоящее из векторов $(p_1, \ldots, p_n)$ $(p_i\in F(\mathfrak{X}_i))$, обладающих свойством $|p_1|=\ldots=|p_n|$.[2]

Легко видеть, что отображение (6) является изоморфизмом свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ в $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$, и если при отображении (6)

$$p\to(p_1, \ldots, p_n),\ q\to(q_1, \ldots, q_n) \qquad (p, q\in F(\mathfrak{X});\ p_i, q_i\in F(\mathfrak{X}_i)),$$

тогда

$$p\equiv q(\varrho(A))\Leftrightarrow \underset{i=1,\ldots,n}{\forall} i\left[p_i\equiv q_i(\varrho(A_i))\right]. \tag{7}$$

При помощи отображения (6) мы задаем некоторый изоморфизм полугруппы $S(A)$ в прямое произведение $S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$. Элементами полугруппы $S(A)$ являются все классы эквивалентности C_ϱ в $F(\mathfrak{X})$ по отношению конгруентности $\varrho=\varrho(A)$, а элементами полугруппы $S(A_i)$ являются все классы эквивалентности C_{ϱ_i} в $F(\mathfrak{X}_i)$ по отношению конгруентности $\varrho_i=\varrho(A_i)$ $(i=1, \ldots, n)$. Чтобы задать искомый изоморфизм полугруппы $S(A)$ в $S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$, мы используем следующее обозначение: если в произвольной полугруппе S задано некоторое отношение конгруентности τ, тогда пусть $C_\tau[s]$ обозначает класс эквивалентности по τ в полугруппе S, содержащий элемент s $(\in S)$. С помощью такого обозначения мы сформулируем отображение

$$C_\varrho[p]\to(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n]) \qquad (p\in F(\mathfrak{X});\ p_i\in F(\mathfrak{X}_i)), \tag{8}$$

где вектор $(p_1, \ldots, p_n)$ является элементом прямого произведения $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$, сопоставленным слову p $(\in F(\mathfrak{X}))$ при отображении (6).

Из того, что (7) имеет место и отображение (6) является изоморфным отображением $F(\mathfrak{X})$ в $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$ легко получается, что отображение (8) служит изоморфизмом полугруппы $S(A)$ в прямое произведение $S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$.

---

[2]) Для произвольного слова q через $|q|$ обозначается длина этого же слова (т. е. число букв, входящих в слово q).

Чтобы закончить доказательство теоремы 3, осталось еще показать, что в случае каждого фиксированного $i(=1, \ldots, n)$, для всякого элемента C_{ϱ_i} $(\in S(A_i))$ найдется элемент C_ϱ $(\in S(A))$, образ при (8) которого имеет i-тую компоненту, совпадающую с заданным C_{ϱ_i}. К нахождению такого C_ϱ мы возьмем какое-нибудь слово p_i $(\in F(\mathfrak{X}_i))$ из класса эквивалентности C_{ϱ_i} и выберем слова $p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ из свободных полугрупп $F(\mathfrak{X}_1), \ldots, F(\mathfrak{X}_{i-1}), F(\mathfrak{X}_{i+1}), \ldots, F(\mathfrak{X}_n)$, соответственно, длины которых равны длине слова p_i. Выберем теперь слово p $(\in F(\mathfrak{X}))$ так, что для слов p и $p_1, \ldots, p_n$ имело место (6). Тогда вектор $(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n])$ является образом элемента $C_\varrho[p]$ $(\in S(A))$ при изоморфизме (8) и имеет i-тую компоненту C_{ϱ_i} $(=C_{\varrho_i}[p_i])$. С этим мы получили, что полугруппа $S(A)$ является подпрямым произведением полугрупп $S(A_1), \ldots, S(A_n)$. Теорема 3 доказана.

Спрашивается теперь, при каких условиях будет отображение (8) изоморфизмом полугруппы $S(A)$ *на* прямое произведение $S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$. Пусть $(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n])$ произвольный элемент из $S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$. Из построения отображения (6) сразу видно, что элемент $(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n])$ может являться образом некоторого элемента $C_\varrho[p]$ из $S(A)$ при отображении (8) в том и только в том случае, если найдутся слова $p_1', \ldots, p_n'$ $(p_i' \in F(\mathfrak{X}_i))$ равной длины так, что $C_{\varrho_i}[p_i] = C_{\varrho_i}[p_i']$ имеет место для каждого i $(=1, \ldots, n)$. Отсюда получается следующая

Теорема 4. *Для автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, являющегося прямым произведением автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, имеет место $S(A)\cong S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$, если для всякой последовательности слов $p_1, \ldots, p_n$ $(p_i\in F(\mathfrak{X}_i))$ найдутся слова $p_1', \ldots, p_n'$ $(p_i'\in F(\mathfrak{X}_i))$ равной длины, удовлетворяющие условию $\underset{i=1,\ldots,n}{\forall} i \underset{a\in\mathfrak{A}_i}{\forall} a\,[ap_i = ap_i']$.*

Из теоремы 4 легко вытекает нижеследующее простое

Следствие. *Если автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, являющийся прямым произведением автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ имеет входный сигнал $x(\in\mathfrak{X})$, удовлетворяющий условию $\underset{a\in\mathfrak{A}}{\forall} a[\delta(a, x)=a]$, то $S(A)\cong S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$.*

Действительно, при таких условиях и для каждого автомата A_i тоже найдется входный сигнал $x_i(\in\mathfrak{X}_i)$, для которого имеет место $\underset{a\in\mathfrak{A}_i}{\forall} a[\delta_i(a, x_i)=a]$. Возьмем теперь произвольную последовательность слов $p_1, \ldots, p_n$ $(p_i\in F(\mathfrak{X}_i);$ $|p_i| = l_i$ $(i=1, \ldots, n))$. Если для некоторого $k(1\leq k\leq n)$ имеет место $l_k \geq l_i$ $(i=1, \ldots, n)$, тогда после приписывания (скажем справа) символа x_i к слову p_i $(l_k - l_i)$-раз, мы получим последовательность слов $p_1', \ldots, p_n'$ $(p_i\in F(\mathfrak{X}_i))$ равной длины $(|p_1'| = \ldots = |p_n'| = l_k)$, удовлетворяющих условую $\underset{i=1,\ldots,n}{\forall} i \underset{a\in\mathfrak{A}_i}{\forall} a[ap_i = ap_i']$. Следовательно, по теореме 4 имеет место $S(A)\cong S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$.

4. Пусть задано множество автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, и возьмем произвольное множество $\mathfrak{X}$ и некоторое однозначное отображение φ множества $\mathfrak{A}_1\times\ldots\times\mathfrak{A}_n\times\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{X}_1\times\ldots\times\mathfrak{X}_n$. Исходя из автоматов $A_1, \ldots, A_n$ с помощью заданных $\mathfrak{X}$ и φ мы строим новый автомат A, называемый (общим) произведением автоматов $A_1, \ldots, A_n$ (при заданных $\mathfrak{X}$ и φ): Произведение автоматов $A_1, \ldots, A_n$ при заданных $\mathfrak{X}$ и φ представляет собой автомат A, у которого множество состояний совпадает с произведением $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$ множеств состояний автоматов $A_1, \ldots, A_n$, множеством входных сигналов является множество $\mathfrak{X}$ и функция переходов δ определяется следующим образом: для всякой пары $(a_1, \ldots, a_n)$ $(\in \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n)$, $x(\in \mathfrak{X})$ мы полагаем

$$\delta((a_1, \ldots, a_n), x) = (\delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_n(a_n, x_n)),$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$ является образом элемента $(a_1, \ldots, a_n, x)$ при отображении φ, т. е. $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)$. Мы подчеркиваем, что произведение наперед заданных автоматов не определяется однозначным образом этими автоматами, потому что оно зависит еще от некоторого множества $\mathfrak{X}$, играющего роль множества входных сигналов нового автомата и от некоторой функции φ, называемой функцией обратной связи этого же автомата.

Мы говорим, что автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ изоморфен автомату $A' = (\mathfrak{A}', \mathfrak{X}', \delta')$, если найдутся взаимно однозначные отображения χ_A и χ_x, удовлетворяющие условиям: χ_A отображает множество $\mathfrak{A}$ на множество $\mathfrak{A}'$, χ_x отображает множество $\mathfrak{X}$ на множество $\mathfrak{X}'$ и для всякой пары a $(\in \mathfrak{A})$, x $(\in \mathfrak{X})$ имеет место

$$\chi_A(\delta(a, x)) = \delta'(\chi_A(a), \chi_x(x)). \tag{9}$$

В статье В. М. Глушкова [2] доказывается, что для произвольных, изоморфных между собой автоматов A и A' имеет место $S(A) \cong S(A')$. Нам хочется обобщить это утверждение для случая, когда автомат A изоморфен некоторому подавтомату автомата A'. Вообще говоря, из того, что автомат A изоморфен некоторому подавтомату автомата A', не следует, что полугруппа $S(A)$ изоморфно вложима в полугруппу $S(A')$[3]. В общем случае имеет место только следующая

Лемма 2. *Если автомат A изоморфен некоторому подавтомату автомата A', тогда полугруппа $S(A)$ является гомоморфным образом некоторой подполугруппы полугруппы $S(A')$.*

Доказательство. То, что автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ изоморфен некоторому подавтомату автомата $A' = (\mathfrak{A}', \mathfrak{X}', \delta')$ означает существование взаимно однозначных отображений χ_A и χ_x следующего вида: χ_A отображает мно-

---

[3]) Действительно, рассмотрим автомат

A':

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	1	0	3	2	5	8	7	10	9	4	11	6
y	2	3	0	1	6	11	8	5	10	7	4	9

и возьмем его подавтомат

A:

	0	1	2	3
x	1	0	3	2
y	2	3	0	1

Легко убедиться, что полугруппами $S(A')$ и $S(A)$ будут группа кватернионов и четверная группа Кэли, соответственно. Далее, первая из этих групп не содержит подгруппы, изоморфной второй.

жество $\mathfrak{A}$ в множество $\mathfrak{A}'$, χ_x отображает множество $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{X}'$ и для этих χ_A и χ_x имеет место (9). Расширим теперь область определения отображения χ_x с множества $\mathfrak{X}$ на множество $F(\mathfrak{X})$ следующим образом: для всякого слова $p=x_1x_2\ldots x_k\ (\in F(\mathfrak{X}))$ мы полагаем

$$\chi_x(p)=\chi_x(x_1)\chi_x(x_2)\ldots\chi_x(x_k). \tag{10}$$

Легко получается тогда, что для всякого $a(\in\mathfrak{A})$ и $p\ (\in F(\mathfrak{X}))$ имеет место

$$\chi_A(ap)=\chi_A(a)\chi_x(p)$$

Из этого следует, что для произвольных $p, q(\in F(\mathfrak{X}))$ имеет место следующее заключение:

$$\chi_x(p)\equiv\chi_x(q)\,(\varrho(A'))\Rightarrow p\equiv q(\varrho(A)). \tag{11}$$

Элементами полугруппы $S(A')$ являются все классы эквивалентности $C_{\varrho'}$ в свободной полугруппе $F(\mathfrak{X}')$ по отношению конгруентности $\varrho'=\varrho(A')$. Через $C_{\varrho'}[p'](p'\in F(\mathfrak{X}'))$ обозначается элемент полугруппы $S(A')$, являющийся классом эквивалентности в $F(\mathfrak{X}')$, содержащим слово $p'(\in F(\mathfrak{X}'))$.

Возьмем теперь отображение

$$p\to\chi_x(p) \qquad (p\in F(\mathfrak{X})) \tag{12}$$

и обозначим через S' множество классов эквивалентности $C_{\varrho'}$ в $F(\mathfrak{X}')$ по отношению конгруентности ϱ', содержащих слово $p'(\in F(\mathfrak{X}'))$, являющее образом некоторого слова $p\,(\in F(\mathfrak{X}))$ при отображении (12). Легко видно, что из $C_{\varrho'}, C'_{\varrho'}\in S'$ следует $C_{\varrho'}C'_{\varrho'}\in S'$, т. е. S' является подполугруппой полугруппы $S(A')$. Представим теперь каждый элемент $C_{\varrho'}$ полугруппы S' в виде $C_{\varrho'}=C_{\varrho'}[\chi_x(p)]$ при некотором $p\,(\in F(\mathfrak{X}))$ и возьмем отображение

$$C_{\varrho'}[\chi_x(p)]\to C_{\varrho}[p]. \tag{13}$$

Используя (10) и (11) легко убедиться, что (в общем случае не обезательно взаимно однозначное) отображение (13) является гомоморфным отображением подполугруппы S' полугруппы $S(A')$ на полугруппу $S(A)$. Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2 получается

Лемма 3. *Если имеются автоматы A и A' с общим множеством состояний и автомат A изоморфен некоторому $\mathfrak{X}$-подавтомату автомата A', тогда полугруппа $S(A)$ изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы $S(A')$.*

Доказательство. Будучи автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ изоморфен некоторому $\mathfrak{X}$-подавтомату автомата $A'=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}', \delta')$, существуют взаимно однозначные отображения χ_A и χ_x следующего вида: χ_A отображает множество $\mathfrak{A}$ на себя, χ_x отображает множество $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{X}'$ и для этих χ_A и χ_x имеет место (9). Пользуясь обозначениями доказательства леммы 2 легко видеть, что при условиях леммы 3, вместе с заключением (11) имеет место и обратное заключение

$$p\equiv q(\varrho(A))\Rightarrow\chi_x(p)\equiv\chi_x(q)(\varrho(A')) \qquad (p, q\in F(\mathfrak{X})). \tag{14}$$

Из (14) следует, что отображение (13) является взаимно однозначным отображением, т. е. оно является изоморфизмом подполугруппы S' полугруппы $S(A')$ на полугруппу $S(A)$. С этим самым и лемма 3 доказана.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 5. *Если автомат A является произведением автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i=1, \dots, n)$ с общим множеством входных сигналов $\mathfrak{X}$ при множестве $\mathfrak{X}$ и при функции обратной связи*

$$\varphi(a_1, \dots, a_n, x)=(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \qquad (a_i\in\mathfrak{A}_i;\ x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\in\mathfrak{X}),$$

удовлетворяющей условию

$$x^{(i)}\equiv x(\varrho(A_i)) \qquad (i=1, \dots, n),$$

тогда полугруппа $S(A)$ изоморфна некоторой подполугруппе прямого произведения $S(A_1)\otimes\dots\otimes S(A_n)$.

Доказательство. Пусть $A_1\otimes\dots\otimes A_n$ обозначает прямое произведение автоматов $A_1, \dots, A_n$. Прежде всего заметим, что автоматы A и $A_1\otimes\dots\otimes A_n$ имеют общее множество состояний: $\mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_n$. Мы покажем, что автомат A изоморфен некоторому $\mathfrak{X}$-подавтомату автомата $A_1\otimes\dots\otimes A_n$. Для этой цели мы определим следующее отображение: через χ_A обозначим тождественное отображение множества $\mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_n$ на себя и через χ_A обозначается отображение $x\to(x, \dots, x)$ $(x\in\mathfrak{X})$ множества $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{X}\times\dots\times\mathfrak{X}$ (где $\mathfrak{X}$ взято n раз). Обозначим еще через δ и δ' функцию переходов автомата A и $A_1\otimes\dots\otimes A_n$, соответственно. Тогда для $(a_1, \dots, a_n)$ $(\in\mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_n)$ и $x\ (\in\mathfrak{X})$ из

$$\chi_A(\delta((a_1, \dots, a_n), x))=\delta((a_1, \dots, a_n), x)=(\delta_1(a_1, x^{(1)}), \dots, \delta_n(a_n, x^{(n)}))=$$
$$=(\delta_1(a_1, x), \dots, \delta_n(a_n, x))=\delta'((a_1, \dots, a_n), (x, \dots, x))=\delta'(\chi_A((a_1, \dots, a_n)), \chi_x(x))$$

получается, что отображение, заданное выше, действительно может служить изоморфизмом автомата A на некоторый $\mathfrak{X}$-подавтомат автомата $A_1\otimes\dots\otimes A_n$.

Отсюда, используя лемму 3 и теорему 3 следует, что полугруппа $S(A)$ изоморфна некоторой подполугруппе прямого произведения $S(A_1)\otimes\dots$ $\dots\otimes S(A_n)$, что и требовалось доказать.

Литература

[1] Г. Биркгоф, *Теория структур* (Москва, 1952).

[2] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи мат. наук*, **16**:5 (**101**) (1961), 3—62.

(Поступило 8/VI 1963)