

ОБ АБЕЛЕВЫХ СВОЙСТВАХ ПРИМИТИВНЫХ КЛАССОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Б. ЧАКАНЬ (Сегед)*

В предлагаемой работе приводятся доказательства некоторых утверждений, опубликованных в [7], а также сформулируется несколько замечаний, относящихся к затронутому там же кругу вопросов. Основные определения можно найти в работах [5], [6], на которые мы неоднократно будем ссылаться.

§ 1

Свойство, которым могут обладать примитивные классы алгебр, мы назовем *абелевым*, если оно характеризует среди примитивных классов групп примитивные классы абелевых групп.

Т. Ивэнс доказал абелевость каждого из следующих свойств [8]:

Н. В любой алгебре класса \mathfrak{A} каждая подалгебра является классом некоторой конгруэнции.

Е. Множество всех эндоморфизмов любой алгебры класса \mathfrak{A} замкнуто относительно основных операций данного класса (т. е., если ν — n -местная основная операция в классе \mathfrak{A} , A — алгебра в \mathfrak{A} , а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — эндоморфизмы алгебры A , то отображение A в себя $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \nu$, определенное посредством $x(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \nu) = (x\varepsilon_1) \dots (x\varepsilon_n)\nu$, $(x \in A)$, также является эндоморфизмом A).

С. Множество всех подалгебр любой алгебры класса \mathfrak{A} замкнуто относительно основных операций данного класса (т. е., если ν — операция, как выше, A_1, \dots, A_n — подалгебры алгебры A в классе \mathfrak{A} , то все элементы вида $a_1 \dots a_n \nu$ ($a_i \in A_i$; $i = 1, \dots, n$) образуют подалгебру в A . Для последней мы будем пользоваться естественным обозначением $A_1 \dots A_n \nu$).

Далее, рассмотрим свойство (см. [4])

Т. В классе \mathfrak{A} прямое и свободное произведения двух алгебр совпадают.

Оно также является абелевым, как это легко следует из абелевости свойства Н и из теоремы 2 в [6].

В [6] дано описание примитивных классов со свойством Н, а также со свойством Т, при некоторых дополнительных условиях. Сейчас мы распространим наши исследования и на классы, обладающие свойством Е,

*) В. CSÁKÁNY (Szeged)

соотв. S. Кроме приведенных мы будем рассматривать и следующие свойства примитивных классов:

O. В классе \mathfrak{A} существует опорная операция (т. е. нульместная операция, которая отмечает одноэлементную подалгебру во всех алгебрах класса \mathfrak{A}).

N. Класс \mathfrak{A} нормальный [1] (т. е. в любой алгебре класса \mathfrak{A} все конгруэнции перестановочны между собой).

QR. В любой алгебре класса \mathfrak{A} каждая конгруэнция однозначно определяется своим классом, содержащим опорный элемент (т. е. элемент, отмеченный опорной операцией).

P. В классе \mathfrak{A} существует (в общем случае главная производная) операция ψ , определяющая вид конгруэнций во всех алгебрах класса \mathfrak{A} [11]. Это значит, что каждая конгруэнция φ произвольной алгебры A класса \mathfrak{A} обладает таким классом N_φ , что $a \equiv b(\varphi)$ ($a, b \in A$) тогда и только тогда, если $ab\psi \in N_\varphi$.

§ 2

Следуя Б. И. Плоткину [3], m -местную основную операцию μ алгебры A назовем перестановочным с n -местной основной операцией ν той же алгебры, если для любых $a_{ij} \in A$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) выполняется равенство $(a_{11} \dots a_{1n}\nu) \dots (a_{m1} \dots a_{mn}\nu)\mu = (a_{11} \dots a_{m1}\mu) \dots (a_{1n} \dots a_{mn}\mu)\nu$. Если любые две основные операции алгебры A перестановочны (не исключая при этом одинаковых операций), то A называется коммутативной.

Оказывается, что примитивный класс \mathfrak{A} тогда и только тогда обладает свойством E, если каждая алгебра в \mathfrak{A} коммутативна. При доказательстве этого утверждения, обобщающего теорему I из [8], в которой описаны примитивные классы группоидов со свойством E, без существенного видоизменения можно применить метод, использованный в [8], и поэтому мы его проводить не будем. Следует лишь отметить, что понятие коммутативной алгебры является естественным обобщением понятия энтропического группоида.

Далее, имеет место

Теорема 1. Примитивный класс \mathfrak{A} тогда и только тогда обладает свойствами O, N, E, если \mathfrak{A} эквивалентен*) классу \mathfrak{R} всех унитарных правых модулей над некоторым коммутативным кольцом с единицей R .

Доказательство. Сперва рассмотрим примитивный класс \mathfrak{A} со свойствами O, N, E. Как показано в [1], свойство N влечет за собой существование в \mathfrak{A} трехместной операции μ с тождеством

$$(1) \quad x\mu\mu = u\mu x = x.$$

Обозначим опорный элемент во всех алгебрах класса \mathfrak{A} символом 0. Для операции $x\mu\mu$ введем новое обозначение $x + u$. Ввиду (1) в \mathfrak{A} тождество

*) В [7] речь шла о рациональной эквивалентности в смысле А. И. Мальцева [2], но нетрудно проверить, что она в случае примитивных классов равносильна эквивалентности, введенной в [5].

венно имеет место

$$(2) \quad x + 0 = 0 + x = x.$$

Далее, пусть μ — произвольная m -местная операция класса \mathfrak{A} . Рассмотрим \mathfrak{A} -свободную алгебру F со свободными образующими $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$. Согласно замечанию, сделанному в начале параграфа, F — коммутативна. Перестановочность основных операций класса \mathfrak{A} распространяется и на все (главные производные) операции, в чем можно убедиться путем индукции по степени полинома, определяющего операцию, над системой основных операций. Таким образом, операции $+$ и μ — перестановочны в F . В частности, выполняется равенство

$$(3) \quad (x_1 + y_1) \dots (x_m + y_m) \mu = x_1 \dots x_m \mu + y_1 \dots y_m \mu,$$

являющееся одновременно и тождеством в \mathfrak{A} . Из тождеств (2), (3) и из наличия свойства N , как в [5], следует, что \mathfrak{A} эквивалентен классу \mathfrak{N} всех унитарных правых модулей над некоторым (вполне определенным) кольцом с единицей R . Покажем коммутативность кольца R . Если $\bar{q}, \bar{\sigma} \in R$, то пусть q, σ — соответствующие им одноместные операции класса \mathfrak{A} . Из коммутативности F вытекает $x_1 q \sigma = x_1 \sigma q$. Тогда по лемме 1 из [5] $x \bar{q} \bar{\sigma} = x \bar{\sigma} \bar{q}$ является тождеством в \mathfrak{N} , так что в самом кольце R будем иметь $1 \bar{q} \bar{\sigma} = 1 \bar{\sigma} \bar{q}$ (1 — единица в R), т. е. $\bar{q} \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \bar{q}$.

С другой стороны, предположим, что \mathfrak{A} эквивалентен классу \mathfrak{N} всех унитарных правых модулей над некоторым коммутативным кольцом с единицей R . В силу теоремы 2 из [6], \mathfrak{A} обладает свойствами O, N . Берем в \mathfrak{A} произвольную m -местную операцию μ . Тождественно выполняется

$$(4) \quad x_1 \dots x_m \mu = x_1 \mu_1 + \dots + x_m \mu_m,$$

где $+$ означает операцию, соответствующую сложению класса \mathfrak{A} , а μ_i ($i = 1, \dots, m$) суть подходящие одноместные операции (см. стр. 54, а также лемму 1 в [5]). Если теперь σ — одноместная операция в \mathfrak{A} , то, пользуясь тождествами (4), (3) (последнее выполняется в \mathfrak{A} в силу леммы 1 из [5]) и перестановочностью одноместных операций в \mathfrak{A} , что вытекает из коммутативности R , мы получим тождества

$$\begin{aligned} (x_1 \dots x_m \mu) \sigma &= (x_1 \mu_1 + \dots + x_m \mu_m) \sigma = x_1 \mu_1 \sigma + \dots + x_m \mu_m \sigma = \\ &= x_1 \sigma \mu_1 + \dots + x_m \sigma \mu_m = (x_1 \sigma) \dots (x_m \sigma) \mu. \end{aligned}$$

Этим показано, что в алгебрах класса \mathfrak{A} одноместные операции являются эндоморфизмами.

Наконец, пусть ν — n -местная операция, A — произвольная алгебра в \mathfrak{A} и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — ее эндоморфизмы. Применением только что доказанного, а также тождества (4), получается для любых $a_1, \dots, a_m \in A$:

$$\begin{aligned} (a_1 \dots a_m \mu) (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \nu) &= (a_1 \dots a_m \mu) \varepsilon_1 \dots (a_1 \dots a_m \mu) \varepsilon_n \nu = \\ &= \sum_{j=1}^n (a_1 \dots a_m \mu) \varepsilon_j \nu_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \mu_i \varepsilon_j \nu_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \varepsilon_j \nu_j \mu_i = \\ &= \sum_{i=1}^m a_i (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \nu) \mu_i = a_1 (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \nu) \dots a_m (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \nu) \mu. \end{aligned}$$

Значит, $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n v$ является эндоморфизмом в A , а этим наличие свойства E у примитивного класса \mathfrak{A} установлено.

Перейдем к рассмотрению свойства S . Необходимым и достаточным условием для того, чтобы примитивный класс \mathfrak{A} обладал свойством S , является существование для всякой пары операций класса \mathfrak{A} μ, ν , m и n -местных соответственно, m -местных операций μ_1, \dots, μ_n с тождеством

$$(5) \quad (x_{11} \dots x_{1n} \nu) \dots (x_{m1} \dots x_{mn} \nu) \mu = (x_{11} \dots x_{m1} \mu_1) \dots (x_{1n} \dots x_{mn} \mu_n) \nu.$$

Это предложение доказывается таким же путем, как теорема IV из [8].

Отсюда следует, что примитивный класс со свойством E обладает и свойством S , ибо в нем ввиду коммутативности всех алгебр выполняется более сильное тождество

$$(x_{11} \dots x_{1n} \nu) \dots (x_{m1} \dots x_{mn} \nu) \mu = (x_{11} \dots x_{m1} \mu) \dots (x_{1n} \dots x_{mn} \mu) \nu.$$

Теорема 2. Примитивный класс \mathfrak{A} тогда и только тогда обладает свойствами O, N, S , если \mathfrak{A} эквивалентен классу \mathfrak{R} всех унитарных модулей над некоторым кольцом с единицей R , все левые идеалы которого являются двусторонними.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1, получим, что в классе \mathfrak{A} со свойствами O, N, S существует двуместная операция $+$, подчиненная тождеству (2). Если μ — m -местная операция в \mathfrak{A} , то на основании (5) в \mathfrak{A} тождественно выполняется

$$(x_1 + y_1) \dots (x_m + y_m) \mu = x_1 \dots x_m \mu_1 + y_1 \dots y_m \mu_2.$$

Подставляя $y_1 = \dots = y_m = 0$, получим: $x_1 \dots x_m \mu_1 = x_1 \dots x_m \mu$; аналогичным же путем следует $y_1 \dots y_m \mu_2 = y_1 \dots y_m \mu$. Это показывает, что в \mathfrak{A} имеет место и тождество (3), так что \mathfrak{A} эквивалентен классу всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей R . Ради простоты, мы отождествим одноместные операции класса \mathfrak{A} с элементами R , ссылаясь при этом на лемму 1 из [5]. Пусть теперь F — \mathfrak{A} -свободная алгебра со свободным образующим x . Тогда $F = xR$, и ввиду S , для $\sigma \in R$, $xR\sigma$ является подалгеброй в F , значит, для произвольной $\tau \in R$ имеет место включение $xR\sigma\tau \subseteq xR\sigma$, т. е., для любых $\rho, \sigma, \tau \in R$ существует такое $\tau' \in R$, что

$$(6) \quad x\rho\sigma\tau = x\tau'\sigma.$$

Поскольку (6) — тождество в \mathfrak{A} , в R имеем: $\rho\sigma\tau = \tau'\sigma$, а это равносильно тому, что в R всякий главный левый идеал является главным идеалом. В силу этого факта, если P — левый идеал в R , то

$$RPR = \bigcup_{p \in P} RpR = \bigcup_{p \in P} Rp = P,$$

т. е. P — идеал кольца R . Этим необходимость условия теоремы доказана.

Для доказательства достаточности предположим, что примитивный класс \mathfrak{A} эквивалентен описанному в теореме классу модулей \mathfrak{R} . Берем в \mathfrak{A} m -местную операцию μ , алгебру A и ее подалгебры A_1, \dots, A_m . Требуется доказать, что $M = A_1 \dots A_m \mu$ — подалгебра в A .

Пусть v — n -местная операция в \mathfrak{A} . Рассмотрим элементы $a_{ij} \in A_i$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$). Достаточно показать, что $m = (a_{11} \dots a_{m1} \mu) \dots (a_{1n} \dots a_{mn} \mu) v \in M$. Двукратным применением тождества (4), выполняющегося и в \mathfrak{A} , получим:

$$m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_i v_j,$$

где суммирование производится операцией, соответствующей в \mathfrak{A} сложению класса \mathfrak{A} , а μ_i, v_j — подходящие одноместные операции. Этим последним в R соответствуют элементы $\bar{\mu}_i, \bar{v}_j$. Предположение относительно R влечет за собой существование в R элементов \bar{v}_{ij} , для которых имеют место равенства $\bar{\mu}_i \bar{v}_j = \bar{v}_{ij} \bar{\mu}_i$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$). По лемме 1 из [5] тогда и в \mathfrak{A} существуют одноместные операции, при которых справедливы тождества $x \mu_i v_j = x v_{ij} \mu_i$. Отсюда

$$m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} v_{ij} \mu_i,$$

а так как здесь

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_{ij} \in A_i,$$

то в самом деле $m \in M$, что и требовалось доказать.

Теоремы 1 и 2 дают нам возможность определить все минимальные (в другой терминологии: эквационально полные, см. [10]) примитивные классы со свойствами O, N, E, а также со свойствами O, N, S. Ф. Гечег заметил [9], что простые кольца отличаются тем, что классы всех унитарных правых модулей над ними являются минимальными. С другой стороны, Т. Селе указал на возможность охарактеризовать тела, как кольца с нетривиальным умножением и без истинных левых идеалов [12]. При помощи этих замечаний получается следующее предложение:

Минимальный примитивный класс со свойствами O, N, E (O, N, S) эквивалентен классу всех векторных пространств над некоторым полем (телом).

§ 3

Теперь мы будем рассматривать примитивный класс \mathfrak{A} со свойствами O, P. Покажем, что \mathfrak{A} обладает и свойством QR. Пусть A — алгебра из \mathfrak{A} , а φ — конгруэнция в A . Тогда $0 = 0\theta\psi \in N_\varphi$, так что мы должны показать, что N_φ однозначно определяет конгруэнцию φ . В самом деле, если θ — отличная от φ конгруэнция в A , то существуют такие элементы $a, b \in A$, что например $a \equiv b(\varphi)$, $a \not\equiv b(\theta)$, откуда $ab\psi \in N_\varphi$, $ab\psi \notin N_\theta$, так что $N_\varphi \neq N_\theta$.

Благодаря только что доказанному, легко получается

Теорема 3. *Примитивный класс \mathfrak{A} тогда и только тогда обладает свойствами O, P, H (или T), если \mathfrak{A} эквивалентен классу \mathfrak{A} всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей R .*

Доказательство. Если класс \mathfrak{A} обладает свойствами O, P, H (T), то он является классом со свойствами O, QR, H (T), но тогда в силу теоремы 2

из [6] условие теоремы выполняется. С другой стороны, той же теоремой обеспечено наличие свойств O, H, T у всякого примитивного класса, эквивалентного классу \mathfrak{K} . Наконец, такие примитивные классы обладают и свойством P : в качестве операции ψ можно взять операцию, соответствующую модульному вычитанию.

§ 4

Примитивный класс \mathfrak{K} тогда и только обладает свойством O , если в любой алгебре A из \mathfrak{K} среди классов каждой конгруэнции существует единственный класс, являющийся подалгеброй в A . Необходимость этого условия очевидна, а для доказательства достаточности рассмотрим \mathfrak{K} -свободную алгебру F со свободными образующими x, y . В алгебре F , а также в ее подалгебрах $\{x\}, \{y\}$ существуют однозначно определенные элементы (классы тривиальной конгруэнции) $x\sigma, x\tau, y\omega$ соотв., являющиеся подалгебрами. Здесь, понятно, σ, τ и ω означают подходящие операции. По условию

$$(7) \quad x\tau = y\omega (= x\sigma),$$

а поскольку (7) — тождество в \mathfrak{K} , мы получим: $x\tau = x\omega$, т. е. операции τ и ω — тождественны, но тогда, как показывает (7), в \mathfrak{K} имеет место и тождество

$$(8) \quad x\omega = y\omega.$$

Принимая во внимание, что $x\omega$ — подалгебра в F , для произвольной операции ρ класса \mathfrak{K} получим:

$$(9) \quad (x\omega)\dots(x\omega)\rho = x\omega.$$

Тождества (8) и (9) вместе означают, что ω — опорная операция. Из доказанного и из теоремы 2 в [6] вытекает

Теорема 4. *Если в каждой алгебре примитивного класса \mathfrak{K} можно взаимно однозначно сопоставлять подалгебры и конгруэнции (т. е. каждая подалгебра является классом единственной конгруэнции, и среди классов каждой конгруэнции найдется единственная подалгебра), то \mathfrak{K} эквивалентен классу всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей.*

Литература

- [1] А. И. Мальцев, К общей теории алгебраических систем, *Матем. Сборник*, **35** (77) (1954), 3—20.
- [2] А. И. Мальцев, Структурная характеристика некоторых классов алгебр, *Доклады АН СССР*, **120** (1958), 29—32.
- [3] Б. И. Плоткин, Ω -полугруппы, Ω -кольца и представления, *Доклады АН СССР*, **149** (1963), 1037—1040.
- [4] А. А. Терехов, Об алгебрах с совпадающими прямыми и свободными произведениями, *Ученые зап. Ивановского Гос. Пед. Ин-та*, **18** (1958), 61—66.
- [5] V. Csákány (Б. Чакань), Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 46—57.

- [6] ——— Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полумодулей и модулей, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 157—164.
- [7] ——— Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр, *Успехи Матем. Наук*, **17:6 (108)** (1962), 217.
- [8] T. EVANS, Properties of algebras almost equivalent to identities, *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 53—59.
- [9] F. GÉCSEG (Ф. Гечег), О примитивных классах полумодулей и модулей, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 165—172.
- [10] J. KALICKI—D. SCOTT, Equational completeness of abstract algebras, *Indag. Math.*, **17** (1955), 650—659.
- [11] J. SŁOMIŃSKI, On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable constant element, *Fund. Math.*, **48** (1960), 325—341.
- [12] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Ştiinţific Bucureşti*, **1** (1950), 783—789.

(Поступило 29/VII, 1963 г.)