Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

M bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

für jedes in $[0, 1]$ orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert. (Die Menge der Punkte, wo die Reihe (1) divergiert, kann von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ abhängen.) CM bezeichnet die Klasse der Folgen $\{a_n\} \notin M$. Das Hauptresultat dieser Arbeit lautet, wie folgt:

Satz I. *$\{a_n\} \in M$ gilt dann und nur dann, wenn*

$$\|\{a_n\}\|_2 = \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(a_1, \ldots, a_N) < \infty$$

gilt, mit

$$I_2(a_1, \ldots, a_N) = \sup \int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 \, dx,$$

wobei das Supremum über alle im Intervall $[0, 1]$ *orthonormierten Funktionensysteme* $\{\varphi_n(x)\}$ *gebildet wird. M ist mit der Norm $\|\{a_n\}\|_2$ ein Banachscher Raum.*

In § 1 werden wir einige Hilfssätze beweisen, den Beweis von Satz I werden wir in § 2 vollziehen. In § 3 zeigen wir einige Eigenschaften der Norm $\|\{a_n\}\|_2$ und beschäftigen wir uns mit einigen Eigenschaften der Klassen M und CM; in § 4 werden wir Abschätzungen und Anwendungen für $\|\{a_n\}\|_2$ angeben; endlich in § 5 werden andere Normen in M betrachtet.

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz I. *Es gilt*

$$c_1^2 + \ldots + c_N^2 \leqq I_2(c_1, \ldots, c_N) \leqq (|c_1| + \ldots + |c_N|)^2. \tag{2}$$

(2) folgt aus der Ungleichung

$$|c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_N \varphi_N(x)| \leqq \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)| \leqq$$
$$\leqq |c_1 \varphi_1(x)| + \ldots + |c_N \varphi_N(x)|.$$

Zur Analogie von I_2 definieren wir allgemeiner

$$I_p(c_1, \ldots, c_N) = \sup \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|)^p \, dx \qquad (1 \leqq p \leqq 2),$$

wobei das Supremum über alle in $[0, 1]$ orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}$ gebildet wird.

Hilfssatz II. *Es gilt*

$$I_p^{1/p}(c_1 + d_1, \ldots, c_N + d_N) \leqq I_p^{1/p}(c_1, \ldots, c_N) + I_p^{1/p}(d_1, \ldots, d_N) \qquad (1 \leqq p \leqq 2). \tag{3}$$

Im Falle $I_p(c_1 + d_1, \ldots, c_N + d_N) = 0$ ist (3) trivialerweise erfüllt. Es sei nun $I_p(c_1 + d_1, \ldots, c_N + d_N) \neq 0$. Dann gilt

$$I = \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |(c_i + d_i)\varphi_i(x) + \ldots + (c_j + d_j)\varphi_j(x)|)^p \, dx > 0$$

für ein beliebiges orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$. Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} &(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |(c_i + d_i)\varphi_i(x) + \ldots + (c_j + d_j)\varphi_j(x)|)^p \leqq \\ &\leqq (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |(c_i + d_i)\varphi_i(x) + \ldots + (c_j + d_j)\varphi_j(x)|)^{p-1} \cdot \\ &\cdot (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)| + \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |d_i \varphi_i(x) + \ldots + d_j \varphi_j(x)|) \end{aligned}$$

ergibt sich, mit Anwendung der Hölderschen Ungleichung,

$$I^{1/p} \leqq I_p^{1/p}(c_1, \ldots, c_N) + I_p^{1/p}(d_1, \ldots, d_N),$$

für jedes orthonormierte System, woraus (3) folgt.

Hilfssatz III. *$I_2(c_1, \ldots, c_N)$ ist stetig.*

Auf Grund von (2) und (3) ist die Behauptung offensichtlich.

Hilfssatz IV. *Es gilt*

$$I_2(c_1, \ldots, c_N) + I_2(d_1, \ldots, d_M) \leqq I_2(c_1, \ldots, c_N, d_1, \ldots, d_M). \tag{4}$$

Es sei $\varepsilon (> 0)$ beliebig. Nach der Definition von I_2 gibt es orthonormierte Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ und $\{\psi_n\}_1^M$ mit

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|)^2 \, dx \geqq I_2(c_1, \ldots, c_N) - \varepsilon, \\ &\int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq M} |d_i \psi_i(x) + \ldots + d_j \psi_j(x)|)^2 \, dx \geqq I_2(d_1, \ldots, d_M) - \varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir setzen $\alpha_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, $\alpha_{N+j} = d_j$ $(j = 1, \ldots, M)$ und

$$\chi_i(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\varphi_i(2x) & (0 \leqq x \leqq 1/2), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \chi_{N+j}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\psi_j(2x - 1) & (1/2 < x \leqq 1), \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Diese Funktionen bilden ein orthonormiertes System $\{\chi_n\}_1^{N+M}$ in $[0, 1]$; weiterhin ergibt sich aus (5) durch einfache Rechnung

$$I_2(c_1, \dots, c_N)+I_2(d_1, \dots, d_M)-2\varepsilon \leqq$$
$$\leqq \int_0^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |c_i\varphi_i(x)+\dots+c_j\varphi_j(x)|\Big)^2\, dx+$$
$$+\int_0^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq M} |d_i\psi_i(x)+\dots+d_j\psi_j(x)|\Big)^2\, dx=$$
$$=2\int_0^{1/2} \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |c_i\varphi_i(2x)+\dots+c_j\varphi_j(2x)|\Big)^2\, dx+$$
$$+2\int_{1/2}^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq M} |d_i\psi_i(2x-1)+\dots+d_j\psi_j(2x-1)|\Big)^2\, dx=$$
$$=\int_0^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N+M} |\alpha_i\chi_i(x)+\dots+\alpha_j\chi_j(x)|\Big)^2\, dx \leqq I_2(c_1, \dots, c_N, d_1, \dots, d_M).$$

Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, ergibt sich daraus (4).

Hilfssatz V. *Es gilt*

$$(6)\qquad I_2(c_1, \dots, c_N) \leqq I_2(d_1, \dots, d_N), \quad \textit{wenn}\ |c_i|\leqq|d_i| \qquad (i=1, \dots, N).$$

Da $I_2(d_1, \dots, d_N)$ offensichtlich nur von den von 0 verschiedenen Koeffizienten d_n abhängt, kann $d_n\neq 0$ vorausgesetzt werden. Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig angegeben. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit

$$\int_0^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |c_i\varphi_i(x)+\dots+c_j\varphi_j(x)|^2\, dx \geqq I_2(c_1, \dots, c_N)-\varepsilon.$$

Es sei gesetzt:

$$\bar\varphi_i(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\,c_i d_i^{-1}\varphi_i(2x) & (0\leqq x\leqq \frac12),\\ \sqrt{2}(1-c_i^2 d_i^{-2})^{1/2}\varphi_i(2x-1) & (\frac12<x\leqq 1),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(i=1, \dots, N)$. Offensichtlich bilden diese Funktionen ein orthonormiertes System in $[0, 1]$. Nach der Definition von $\bar\varphi_i(x)$ erhalten wir durch einfache Rechnung

$$I_2(d_1, \dots, d_N)\geqq \int_0^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |d_i\bar\varphi_i(x)+\dots+d_j\bar\varphi_j(x)|\Big)^2\, dx=$$
$$=2\int_0^{1/2} \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |c_i\varphi_i(2x)+\dots+c_j\varphi_j(2x)|\Big)^2\, dx+$$
$$+2\int_{1/2}^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |d_i(1-c_i^2d_i^{-2})^{1/2}\varphi_i(2x-1)+\dots+d_j(1-c_j^2d_j^{-2})^{1/2}\varphi_j(2x-1)|\Big)^2\, dx\geqq$$
$$\geqq\int_0^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |c_i\varphi_i(x)+\dots+c_j\varphi_j(x)|\Big)^2\, dx\geqq I_2(c_1, \dots, c_N)-\varepsilon.$$

Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, ergibt sich (6).

Hilfssatz VI. *Es sei $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl und seien c, α reelle Zahlen mit $0 \leqq \alpha < \alpha + c \leqq 1$. Dann gibt es ein im Intervall $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(p, c, \alpha; x)\}_1^p$ mit den folgenden Eigenschaften: für $x \notin [\alpha, \alpha + c]$ gilt $\varphi_n(p, c, \alpha; x) = 0$ $(n = 1, \ldots, 2p)$ und besteht*

$$\int_0^1 \left(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq 2p} |c_i \varphi_i(p, c, \alpha; x) + \ldots + c_j \varphi_j(p, c, \alpha; x)| \right)^2 dx \geqq a \min_{1 \leqq i \leqq 2p} c_i p \log^2 p$$

ür jede positive Folge $\{c_n\}_1^{2p}$ mit einer positiven absoluten Konstante a.

Im Falle $\alpha = 0, c = 1$ ist dieser Hilfssatz eine unmittelbare Umformung eines Resultats von D. E. MENCHOFF[1]). Im allgemeinen werden die geforderten Bedingungen des Hilfssatzes VI für die Funktionen $\varphi_n(p, c, \alpha; x) = \sqrt{c}\, \varphi_n(p, 1, 0; cx + \alpha)$ $(n = 1, \ldots, 2p)$ erfüllt.

Hilfssatz VII.[2]) *Für jede Folge $c_1, \ldots, c_N$ gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\psi_n(x)\}_1^N$ derart, daß*

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \psi_i(x) + \ldots + c_j \psi_j(x)| \geqq 1$$

in einer Menge E mit $\operatorname{mes}(E) \geqq \varrho \min(1, I_2(c_1, \ldots, c_N))$ gibt, wobei $\varrho(\leqq 1)$ eine positive, absolute Konstante ist.

Hilfssatz VIII. *Es gilt*

$$\varrho I_2^{1/2}(c_1, \ldots, c_N) \leqq I_p^{1/p}(c_1, \ldots, c_N) \leqq I_2^{1/2}(c_1, \ldots, c_N) \qquad (1 \leqq p \leqq 2), \tag{7}$$

wobei ϱ eine positive, absolute Konstante ist.

Die zweite der Ungleichung (7) folgt aus der Hölderschen Ungleichung. Zum Beweis der ersten Ungleichung kann man $I_2(c_1, \ldots, c_N) = 1$ annehmen. Mit Anwendung des Hilfssatzes VII ergibt sich ein orthonormiertes System $\{\psi_n(x)_1^N$, für welches

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \psi_i(x) + \ldots + c_j \psi_j(x)| \geqq 1$$

in einer Menge E mit $\operatorname{mes}(E) \geqq \varrho$. Dann ist

$$\left\{ \int_0^1 \left(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \psi_i(x) + \ldots + c_j \psi_j(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p} \geqq \varrho^{1/p} \geqq \varrho,$$

woraus die erste Ungleichung (7) folgt.

---

[1]) D. E. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, 4 (1923), 82–105. Siehe noch: S. KACZMARZ, Notes on orthogonal series. II, *Studia Math.*, 5 (1934), 103–104.

[2]) Siehe: K. TANDORI, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 139–151.

§ 2. Beweis des Satzes I

In einer vorigen Arbeit[3]) wurde u. a. die folgende Behauptung bewiesen:

A) *Es sei* $\{a_n\}$ *eine gegebene Folge von reellen Zahlen. Gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) < \infty \tag{8}$$

für jede Indexfolge $(0=)n_0<\ldots<n_k<\ldots$, *so konvergiert die Reihe* (1) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall. Gilt aber* (8) *für eine Indexfolge* $\{n_k\}$ *nicht, so gibt es ein orthonormiertes System* $\{\varphi_n(x)\}$, *für welches die Reihe* (1) *sogar fast überall divergiert.*

In der Menge M definieren wir die vektoriellen Operationen auf die übliche Weise: $\alpha\{a_n\}=\{\alpha a_n\}$, $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$. M ist offensichtlich ein linearer Raum.

Es sei

$$\|\{a_n\}\|_2 = \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(a_1, \ldots, a_N) < \infty. \tag{9}$$

(Der Limes existiert, da wegen der Definition von I_2 $I_2(a_1, \ldots, a_N) \leqq I_2(a_1, \ldots, a_{N+1})$ $(N=1, 2, \ldots)$ ist.) Dann gilt (8) wegen (4) für jede Indexfolge $\{n_k\}$ und auf Grund der Behauptung A) ist $\{a_n\}\in M$.

Wir nehmen an, daß (9) nicht erfüllt ist. Aus (3) folgt $I_2^{\frac{1}{2}}(a_1, \ldots, a_{n+N}) - I_2^{\frac{1}{2}}(a_1, \ldots, a_n) \leqq I_2^{\frac{1}{2}}(a_{n+1}, \ldots, a_{n+N})$ und so gilt $\lim\limits_{N\to\infty} I_2(a_{n+1}, \ldots, a_{n+N})=\infty$. Auf Grund dieser Relation kann eine Indexfolge $(0=)n_0<\ldots<n_k<\ldots$ definiert werden derart, daß $I_2(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}})\geqq 1$ für jedes k besteht. Für diese Indexfolge wird (8) nicht erfüllt, woraus, auf Grund der Behauptung A) $\{a_n\}\notin M$ sich ergibt.

$\|\{a_n\}\|_2$ ist eine Norm in M: a) $\|\{a_n\}\|_2=0$ dann und nur dann, wenn $a_n=0$ $(n=1, 2, \ldots)$ ist; b) $\|\alpha\{a_n\}\|_2=|\alpha|\,\|\{a_n\}\|_2$ für jede reelle Zahl α; c) $\|\{a_n\}+\{b_n\}\|_2 \leqq \|\{a_n\}\|_2+\|\{b_n\}\|_2$. a) folgt aus (2), b) ist offensichtlich und c) folgt aus (3).

Zum Beweis des Satzes I soll nun die Vollständigkeit von der Norm $\|\{a_n\}\|_2$ bewiesen werden. Es sei $\{a_n(m)\}\in M$ $(m=1, 2, \ldots)$ mit $\|\{a_n(m')\}-\{a_n(m'')\}\|_2\to 0$ $(m', m''\to\infty)$. Nach (2) ergibt sich $a_n(m)\to a_n$ $(m\to\infty; n=1, 2, \ldots)$. Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig. Nach der Definition der Norm gilt $I_2(a_1(m')-a_1(m''), \ldots, a_N(m')-a_N(m''))<\varepsilon^2$ $(m', m''>\nu(\varepsilon))$ für jedes N. Da I_2 stetig ist, erhalten wir daraus für $m'\to\infty$, daß $I_2(a_1-a_1(m''), \ldots, a_N-a_N(m''))\leqq\varepsilon^2$ $(m''>\nu(\varepsilon))$ für jedes N besteht. Woraus $\|\{a_n\}-\{a_n(m'')\}\|_2\leqq\varepsilon$ $(m''>\nu(\varepsilon))$ sich ergibt. Auf Grund von c) erhalten wir $\{a_n\}\in M$ und gilt $\|\{a_n\}-\{a_n(m)\}\|_2\to 0$ $(m\to\infty)$.

Damit haben wir Satz I bewiesen.

Es sei $(0=)m_0<\ldots<m_k<\ldots$ eine gegebene Indexfolge und

$$A_{k+1} = \{a_{m_k+1}^2+\ldots+a_{m_{k+1}}^2\}^{1/2} \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Wir haben auch die folgende Behauptung bewiesen[4]).

[3]) Loc. cit.[2]).

[4]) Siehe loc. cit. [2]).

B) *Gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(A_{n_k+1}, \ldots, A_{n_{k+1}}) < \infty \tag{10}$$

für jede Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$, *so konvergiert die Folge der* m_k*-ten Partialsummen der Reihe* (1) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall. Gilt aber* (10) *für eine Indexfolge* $\{n_k\}$ *nicht, so gibt es ein orthonormiertes System* $\{\varphi_n(x)\}$, *für welches die Folge der* m_k*-ten Partialsummen der Reihe* (1) *sogar fast überall divergiert.*

M^* bezeichnet die Klasse der Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert. (Die Menge der Divergenzpunkte kann von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ abhängen.) Auf Grund der Behauptung B), mit derselben Methode ergibt sich:

Satz II. $\{a_n\} \in M^*$ *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\|\{a_n\}\|_2^* = \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(A_1, \ldots, A_N) < \infty$$

besteht. M^* *ist mit dieser Norm ein Banachscher Raum.*

§ 3. Über die Norm $\|\{a_n\}\|_2$

Aus (2) folgt

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right\}^{1/2} \leqq \|\{a_n\}\|_2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Daraus folgt $M \subseteqq l^2$ (l^2 bezeichnet die Klasse der Folgen mit $\Sigma a_n^2 < \infty$). Aus (6) folgt

Satz III. *Es sei* $|a_n| \leqq |b_n|$ $(n=1, 2, \ldots)$. *Ist* $\{b_n\} \in M$, *so gelten* $\{a_n\} \in M$ *und* $\|\{a_n\}\|_2 \leqq \|\{b_n\}\|_2$. *Ist* $\{a_n\} \in CM$, *so gilt* $\{b_n\} \in CM$.

Satz IV. *Es seien* $\{a_n(m)\}_1^\infty$ $(m=1, 2, \ldots)$ *Zahlenfolgen mit* $a_n(m) \searrow 0$ $(m \to \infty;$ $n=1, 2, \ldots)$. *Ist* $\{a_n(1)\} \in M$, *dann gilt* $\|\{a_n(m)\}\|_2 \to 0$ $(m \to \infty)$.

Beweis des Satzes IV. Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig angegeben. Es sei weiterhin $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges in $[0, 1]$ orthonormiertes System. Die n-te Partialsumme der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(m)\varphi_n(x)$$

bezeichnen wir mit $s_n^{(m)}(x)$. Auf Grund der Voraussetzungen ist $\{a_n(m)\} \in l^2$. Nach dem Satz von Riesz—Fischer gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $f_m(x)$, nach der die Folge $\{s_n^{(m)}(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ im quadratischen Mittel konvergiert. Es sei endlich die Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ so gewählt, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2(1) < \infty.$$

Dann ist

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |s_j^{(m)}(x) - s_{i-1}^{(m)}(x)| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq N} |s_i^{(m)}(x)| \leq$$

$$\leq 2\left(|f_m(x)| + \left\{\sum_{k=0}^{\infty} (f_m(x) - s_{n_k}^{(m)}(x))^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum_{k=0}^{\infty} (\max_{n_k < i \leq j \leq n_{k+1}} |s_j^{(m)}(x) - s_{i-1}^{(m)}(x)|)^2\right\}^{1/2}\right),$$

woraus

$$\int_0^1 (\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |s_j^{(m)}(x) - s_{i-1}^{(m)}(x)|)^2 \, dx \leq \tag{11}$$

$$\leq 12\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(m) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2(m) + \sum_{k=0}^{\infty} I_2(a_{n_k+1}(m), \ldots, a_{n_{k+1}}(m))\right)$$

sich für jedes m und N ergibt. Es sei nun k_0 und s so groß, daß

$$\sum_{n=k_0+1}^{\infty} a_n^2(1) < \varepsilon^2, \quad \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2(1) < \varepsilon^2,$$

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} I_2(a_{n_k+1}(1), \ldots, a_{n_{k+1}}(1)) < \varepsilon^2, \quad \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{n=s+1}^{\infty} a_n^2(1) < \varepsilon^2$$

erfüllt sind. Wegen $a_n(m) \searrow 0$ $(m \to \infty;\ n = 1, 2, \ldots)$ aus (11) erhalten wir

$$\int_0^1 (\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |s_j^{(m)}(x) - s_{i-1}^{(m)}(x)|)^2 \, dx \leq$$

$$\leq 12\left(\sum_{n=1}^{k_0} a_n^2(m) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{n=n_k+1}^{s} a_n^2(m) + \sum_{k=0}^{k_0} I_2(a_{n_k+1}(m), \ldots, a_{n_{k+1}}(m))\right) + 48\varepsilon^2.$$

Daraus, wegen der Stetigkeit von I_2 folgt

$$\int_0^1 (\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |s_j^{(m)}(x) - s_{i-1}^{(m)}(x)|)^2 \, dx < 49\varepsilon^2 \qquad (m > \mu(\varepsilon)).$$

Da $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges orthonormiertes System ist, erhalten wir $I_2(a_1(m), \ldots, a_N(m)) \leq 49\varepsilon^2$ $(m > \mu(\varepsilon))$ für jedes N, woraus $\|\{a_n(m)\}\| \leq 7\varepsilon$ $(m > \mu(\varepsilon))$ sich ergibt.

Satz V. *M ist separabel.*

Es sei $\{a_n\} \in M$. Nach Satz IV gilt $\|\{a_n\}_1^N - \{a_n\}_1^\infty\|_2 \to 0$ $(N \to \infty)$. Die Klasse der endlichen Folgen ist also in M überall dicht. Wegen (2) kann jede endliche Folge mit endlichen Folgen von rationalen Zahlen in der Norm approximiert werden. Die Menge der endlichen Folgen von rationalen Zahlen ist aber abzählbar.

Satz VI. *Ist $\{a_n\} \in M$, dann gibt es eine positive, monoton ins Unendliche strebende Folge $\{\lambda_n\}$ mit $\{\lambda_n a_n\} \in M$. Ist aber $\{a_n\} \in CM$, dann gibt es eine positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{\lambda_n\}$ mit $\{\lambda_n a_n\} \in CM$.*

Beweis des Satzes VI. Ist $\{a_n\} \in M$, dann gilt $\{a_n\} \in l^2$. So gibt es eine Indexfolge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 < \infty. \tag{12}$$

Weiterhin, auf Grund von (4) gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) < \infty. \tag{13}$$

Wegen (12) und (13) gibt es eine positive, monoton ins Unendliche strebende Folge $\{\Lambda_k\}$, derart, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k (k+1) \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k I_2(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) < \infty \tag{14}$$

bestehen. (Man kann z. B.

$$\Lambda_k = \min\left(\left(\sum_{l=k+1}^{\infty} (l+1) \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2\right)^{-2}, \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} I_2(a_{n_l+1}, \ldots, a_{n_{l+1}})\right)^{-2}\right) \quad (k=0, 1, \ldots)$$

setzen.) Es sei $\lambda_n = \sqrt{\Lambda_k}$ $(n_k < n \leqq n_{k+1};\ k=0, 1, \ldots)$. Dann gelten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} \lambda_n^2 a_n^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} I_2(\lambda_{n_k+1} a_{n_k+1}, \ldots, \lambda_{n_{k+1}} a_{n_{k+1}}) < \infty. \tag{15}$$

Es sei nun $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges, in $[0, 1]$ orthonormiertes System. Aus (15) folgt $\{\lambda_n a_n\} \in l^2$. Nach dem Satz von Riesz—Fischer konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \varphi_n(x) \tag{16}$$

in quadratischen Mittel zu einer Funktion $f(x) \in L^2(0, 1)$. Die n-te Partialsumme der Reihe (16) bezeichnen wir mit $s_n(x)$. Wegen (15) gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (f(t) - s_{n_k}(t))^2\, dt < \infty,$$

woraus $\lim_{k\to\infty} s_{n_k}(x) = f(x)$ fast überall folgt. Wegen (15) besteht auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \Big(\max_{n_k < i \leqq j \leqq n_{k+1}} |\lambda_i a_i \varphi_i(x) + \ldots + \lambda_j a_j \varphi_j(x)|\Big)^2\, dx < \infty,$$

woraus $s_n(x) - s_{n_k}(x) \to 0$ $(n \to \infty;\ n_k < n \leqq n_{k+1})$ sich fast überall ergibt. Die Reihe (16) ist also für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergent, d. h. $\{\lambda_n a_n\} \in M$.

Es sei $\{a_n\} \in CM$. Auf Grund von $\|\{a_n\}\| = \infty$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) = \infty$$

für eine Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$. Nach einem bekannten Satz[5]) gibt es eine positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{\Lambda_k\}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k I_2(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) = \infty.$$

Es sei $\lambda_n = \sqrt{\Lambda_k}$ $(n_k < n \leqq n_{k+1};\ k=0, 1, \ldots)$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(\lambda_{n_k+1} a_{n_k+1}, \ldots, \lambda_{n_{k+1}} a_{n_{k+1}}) = \infty,$$

woraus, auf Grund von (4) sich ergibt, daß die Norm von $\{\lambda_n a_n\}$ nicht endlich ist, also $\{\lambda_n a_n\} \in CM$. Damit haben wir Satz VI bewiesen.

§ 4. Abschätzungen für die Norm

$C_1, C_2, \ldots$ bezeichnen positive, absolute Konstanten.

Satz VII. *Es gilt*

$$\|\{a_n\}\|_2 \leqq C_1 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Im Falle $|a_n| \geqq |a_{n+1}|$ $(n=1, 2, \ldots)$ *besteht*

$$\|\{a_n\}\|_2 \geqq C_2 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Beweis des Satzes VII. Nach einem bekannten Satz gilt

$$\int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|\big)^2\, dx \leqq C_3 \log^2 N \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \qquad (N > 1) \tag{19}$$

für jedes in $[0, 1]$ orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ [6]). Die n-te Partialsumme der Reihe (1) bezeichnen wir mit $s_n(x)$. Dann gilt

$$|s_n(x)| \leqq |s_{2^N}(x)| + \left\{\sum_{n=1}^{N} \big(s_{2^N}(x) - s_{2^{n-1}}(x)\big)^2\right\}^{1/2} +$$
$$+ \left\{\sum_{n=2}^{N} \big(\max_{2^{n-1} < i \leqq j < 2^n} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)|\big)^2\right\}^{1/2}$$

[5]) Siehe z. B. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, *Inequalities* (Cambridge, 1934), S. 120—121.

[6]) Siehe D. E. Menchoff, loc. cit.[1]) und H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, 87 (1922), 112—138.

für jedes n $(1 \leqq n \leqq 2^N)$. Auf Grund von (19) ergibt sich

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq 2^N} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx \leqq$$

$$\leqq C_4 \left(\sum_{i=1}^{2^N} a_i^2 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^N} a_i^2 + \sum_{n=2}^{N} n^2 \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i^2 \right) \leqq C_1 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{2^N} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2},$$

woraus (17) sich ergibt.

Nach der Definition der Norm gilt $\|\{\pm a_n\}\|_2 = \|\{a_n\}\|_2$ offensichtlich. Zum Beweis der Ungleichung (18), ohne Beschränkung der Allgemeinheit können $a_n > 0$ und $a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < 1$ vorausgesetzt werden. Dann gilt

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_4^2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^{n+1}}^2 n^2 \leqq 1. \tag{20}$$

Es seien $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = a_1^2$, $\alpha_2 = \alpha_1 + a_2^2$, $\alpha_3 = \alpha_2 + 2a_4^2$, $\alpha_n = \alpha_3 + \sum_{k=2}^{n-2} 2^k a_{2^{k+1}}^2 k^2$ $(n \geqq 4)$ und $c_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ $(n \geqq 0)$. Es sei weiterhin $N(\geqq 4)$ eine natürliche Zahl und wir setzen

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} a_1^{-1} & (\alpha_0 \leqq x < \alpha_1), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} a_2^{-1} & (\alpha_1 \leqq x < \alpha_2), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} (2a_4)^{-1} & (\alpha_2 \leqq x < \alpha_3), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \varphi_4(x) = \begin{cases} (2a_4)^{-1} & (\alpha_2 \leqq x < (\alpha_2 + \alpha_3)/2), \\ -(2a_4)^{-1} & ((\alpha_2 + \alpha_3)/2 \leqq x < \alpha_3), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\varphi_{2^{n-2}+k}(x) = \varphi_k(2^{n-2}, \alpha_n, c_n; x) \qquad (k = 1, \dots, 2^{n-2};\ n = 4, \dots, N+1),$$

wobei $\varphi_k(p, c, \alpha; x)$ die im Hilfssatz VI erwähnten Funktionen bedeuten. Wegen (20), auf Grund der Definition der Funktionen ist $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ ein orthonormiertes System in $[0, 1]$ und gilt

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq 2^N} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (a_1 \varphi_1(x))^2 dx + \int_0^1 (a_2 \varphi_2(x))^2 dx + \int_0^1 \Big(\max_{3 \leqq i \leqq j \leqq 4} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx +$$

$$+ \sum_{k=2}^{N-1} \int_0^1 \Big(\max_{2^k < i \leqq j \leqq 2^{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \dots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx.$$

Nach Hilfssatz VI folgt daraus

$$\int_0^1 \Big(\max_{1\le i\le j\le 2^N} |a_i\varphi_i(x)+\dots+a_j\varphi_j(x)|\Big)^2\,dx \geqq$$

$$\geqq C_5\left(a_1^2+a_2^2+a_4^2+\sum_{n=2}^{N-1} 2^{k-1} a_{2^k+1}^2(k-1)^2\right)\geqq C_2\left(a_1^2+\sum_{n=2}^{2^N} a_n^2\log^2 n\right),$$

woraus $I_2(a_1,\dots,a_{2^N})\geqq C_2\left(a_1^2+\sum_{n=2}^{2^N} a_n^2\log^2 n\right)$ sich für jedes N ergibt. (18) erhalten wir mit der Grenzübergang $N\to\infty$.

Aus Satz VII erhalten wir:

$$\|\{a_n\}\|_2^*\leqq C_1\left(A_1^2+\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2\log^2 n\right)^{1/2}$$

und im Falle $A_n\geqq A_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$

$$\|\{a_n\}\|_2^*\geqq C_2\left(A_1^2+\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2\log^2 n\right)^{1/2}. \tag{21}$$

Im Falle $m_k=2^{k-1}$ $(k=1,2,\dots;\ m_0=0)$ gilt also

$$\|\{a_n\}\|_2^*\leqq C_8\left(a_1^2+a_2^2+\sum_{n=3}^{\infty} a_n^2(\log\log n)^2\right)^{1/2}. \tag{22}$$

Ist $|a_n|=1/\sqrt{n}\,\lambda_n$ $(0<\lambda_n\leqq\lambda_{n+1};\ n=1,2,\dots)$, dann gibt es eine monoton abnehmende Folge $\{d_n\}$ mit $d_n\leqq A_n\leqq 2d_n$ $(n=1,2,\dots)$. Aus (21), auf Grund von (6) erhalten wir

$$\|\{a_n\}\|_2^*\geqq C_9\left(a_1^2+a_2^2+\sum_{n=3}^{\infty} a_n^2(\log\log n)^2\right)^{1/2}. \tag{23}$$

M_u bezeichnet die Klasse der Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall unbedingt (d. h. in jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall) konvergiert. (Die Menge der Divergenzpunkte kann von der Umordnung und von dem System abhängen.)

Für eine Nullfolge $\{a_n\}_1^\infty$, bezeichnet $\{a_n^*\}$ eine Umordnung von $\{a_n\}$ mit $|a_n^*|\geqq|a_{n+1}^*|$ $(n=1,2,\dots)$. (Eine solche Umordnung existiert.) Es sei

$$\|\{a_n\}\|_2^{(u)}=\lim_{N\to\infty}\big(\max_P I_2^{1/2}(a_{n_1}^*,\dots,a_{n_N}^*)\big),$$

wobei das Maximum über alle Umordnungen $n_1,\dots,n_N$ der Zahlen $1,\dots,N$ gebildet wird. (Der Limes existiert ($\leqq\infty$) und hängt nicht davon ab, was für eine Umordnung $\{a_n^*\}$ gewählt wird.) Gilt $a_n\not\to 0$, dann setzen wir $\|\{a_n\}\|_2^{(u)}=\infty$. Es sei weiterhin

$$A=\begin{cases} |a_1^*|+|a_2^*|+\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^*\log^2 n\right\}^{1/2} & \text{für eine Nullfolge } \{a_n\},\\ \infty & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei $\nu_k = 2^{2^k}$. Es gilt $A \leqq \infty$ und A hängt nicht davon ab, was für eine Umordnung $\{a_n^*\}$ gewählt wird.

Wir beweisen den folgenden Satz.

Satz VIII. *$\{a_n\} \in M$ gilt dann und nur dann, wenn $\|\{a_n\}\|_2^{(u)} < \infty$. M_u ist mit der Norm $\|\{a_n\}\|_2^{(u)}$ ein Banachscher Raum. Weiterhin gelten die Abschätzungen*

$$C_{10} A \leqq \|\{a_n\}\|_2^{(u)} \leqq C_{11} A. \tag{24}$$

Beweis des Satzes VIII. Gilt $a_n \not\to 0$, dann ist (24) definitionsgemäß erfüllt. Es sei nun $\{a_n\}$ eine Nullfolge. Es sei N eine natürliche Zahl, $\{\varphi_n(x)\}_1^{\nu_N}$ ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System und $n_1, \ldots, n_{\nu_N}$ eine Umordnung der Zahlen $1, \ldots, \nu_N$. Für eine natürliche Zahl k besteht $\nu_k < n_l \leqq \nu_{k+1}$ für $\nu_{k+1} - \nu_k$ verschiedene Indizes l; diese seien in Reihe nach $l(1, k) < l(2, k) < \ldots < l(\nu_{k+1} - \nu_k; k)$. Offensichtlich gilt

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq \nu_N} |a_{n_i}^* \varphi_{n_i}(x) + \ldots + a_{n_j}^* \varphi_{n_j}(x)| \leqq$$

$$\leqq |a_1^* \varphi_1(x)| + |a_2^* \varphi_2(x)| + \sum_{k=0}^{N-1} \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq \nu_{k+1} - \nu_k} |a_{n_{l(i,k)}}^* \varphi_{n_{l(i,k)}}(x) + \ldots + a_{n_{l(j,k)}}^* \varphi_{n_{l(j,k)}}(x)|.$$

Daraus, auf Grund von (19) ergibt sich

$$\left\{\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq \nu_N} |a_{n_i}^* \varphi_{n_i}(x) + \ldots + a_{n_j}^* \varphi_{n_j}(x)|\Big)^2 dx\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq C_{11} \left(|a_1| + |a_2| + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^{*2} \log^2 n\right\}^{1/2}\right) = C_{11} A_N.$$

Da $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges orthonormiertes System in $[0, 1]$ ist, erhalten wir $\max_P I_2^{\frac{1}{2}}(a_{n_1}^*, \ldots, a_{n_{\nu_N}}^*) \leqq C_{11} A_N$, voraus die Zweite der Ungleichungen (24) folgt. Mit der in einer vorigen Arbeit [7]) angewandten Methode kann auch $\max_P I_2^{\frac{1}{2}}(a_{n_1}^*, \ldots, a_{n_{\nu_N}}^*) \geqq C_{10} A_N$ bewiesen werden, woraus die erste Ungleichung folgt.

Wegen $M_u \subseteqq M$ folgt $a_n \to 0$ aus $\{a_n\} \in M_u$; im Falle $\{a_n\} \not\to 0$ besteht $\{a_n\} \notin M_u$. Die Behauptung $\{a_n\} \in M_u \Leftrightarrow \|\{a_n\}\|_2^{(u)} < \infty$ folgt also aus (24) und aus der bekannten Behauptung [8]):

C) *$A < \infty$ und $\{a_n\} \in M_u$ sind gleichwertig.*

Die weiteren Behauptungen des Satzes VIII sind offensichtlich. Damit haben wir Satz VIII bewiesen.

Die Orthogonalreihe (1) nennen wir sehr stark summierbar, wenn die Mittel

$$(s_{m_1}(x) + \ldots + s_{m_k}(x))/k \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \left(s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\right)$$

[7]) K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math.*, 23 (1962), 185—221.

[8]) Siehe: loc. cit. [7]). Die Behauptung C) ist mit den Sätzen I—II von loc. cit. [7]) äquivalent, da im Falle $a_n \not\to 0$ gilt $\{a_n\} \notin l^2$ und die Rademachersche Reihe $\Sigma a_n r_n(x)$ divergiert fast überall. (A. N. Kolmogoroff, Über die Summen durch den Zufall bestimmten unabhängigen Größen, *Math. Annalen*, 99 (1928), 309—319.; Also $\{a_n\} \notin M_u$.)

für jede Indexfolge $m_1 < \ldots < m_k < \ldots$ fast überall konvergieren. (Die Menge der Divergenzpunkte kann von der Indexfolge und von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ abhängen.) M_s bezeichnet die Klasse der Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ sehr stark summeirbar ist. In der unter [2]) zitierten Arbeit haben wir bewiesen:

D) *Gilt*

$$\sum_{l=0}^{\infty} I_2(\bar{A}_{n_l+1}(\{m_k\}), \ldots, \bar{A}_{n_{l+1}}(\{m_k\})) < \infty \tag{25}$$

für jede Indexfolgen $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ *und* $(0=)m_0 < \ldots < m_k < \ldots$, *dann ist* $\{a_n\} \in M_s$. *Ist aber* (25) *für gewisse Indexfolgen* $\{n_k\}$ *und* $\{m_k\}$ *nicht erfüllt, dann gilt* $\{a_n\} \notin M_s$, *wobei*

$$\bar{A}_1(\{m_k\}) = (a_1^2 + \ldots + a_{m_2}^2)^{1/2}, \; \bar{A}_{l+1}(\{m_k\}) = (A_{2^l+1}^2 + \ldots + A_{2^{l+1}}^2)^{1/2} =$$
$$= (a_{m_{2^l+1}+1}^2 + \ldots + a_{m_{2^{l+1}}}^2)^{1/2} \qquad (l = 0, 1, \ldots).$$

Wir setzen

$$\|\{a_n\}\|_2^{(s)} = \sup \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(A_1(\{m_k\}), \ldots, A_N(\{m_k\})),$$

wobei das Supremum über alle Indexfolgen $(0=)m_0 < \ldots < m_k < \ldots$ gebildet wird. Auf Grund der Behauptung D), mit Anwendung des Satzes VII, mit Rücksicht auf (22) und (23) kann leicht bewiesen werden:

Satz IX. $\{a_n\} \in M_s$ *gilt dann und nur dann, wenn* $\|\{a_n\}\|_2^{(s)} < \infty$ *besteht.* M_s *ist in der Norm* $\|\{a_n\}\|_2^{(s)}$ *ein Banachscher Raum. Es gilt*

$$\|\{a_n\}\|_2^{(s)} \leqq C_8 \left(a_1^2 + a_2^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2\right)^{1/2}$$

und im Falle $|a_n| = 1/\sqrt{n}\lambda_n$ $(0 < \lambda_n \leqq \lambda_{n+1};\, n = 1, 2, \ldots)$ *besteht auch*

$$\|\{a_n\}\|_2^{(s)} \geqq C_9 \left(a_1^2 + a_2^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2\right)^{1/2}.$$

§ 5. Andere Normen in M

Auf Grund von Hilfssatz VIII und Satz I erhält man leicht:

Satz X. $\{a_n\} \in M$ *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\|\{a_n\}\|_p = \lim_{N\to\infty} I_p^{1/p}(a_1, \ldots, a_N) < \infty \qquad (1 \leqq p \leqq 2).$$

M ist in bezug auf diese Norm ein Banachraum.

Der Limes existiert, da nach der Definition von I_p $I_p(a_1, \ldots, a_N) \leqq I_p(a_1, \ldots, a_{N+1})$ $(N = 1, 2, \ldots)$ gilt.

Wir erwähnen noch, daß der betrachtete Banachraum für keinen Wert von p Hilbertsch ist. Wäre nämlich M für ein p Hilbertsch, so sollte die Identität

$$\|\{a_n\}+\{b_n\}\|_p^2+\|\{a_n\}-\{b_n\}\|_p^2 = 2\|\{a_n\}\|_p^2+2\|\{a_n\}\|_p^2$$

gelten. Wir wählen insbesondere $\{a_n\}=\{0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots\}$ (mit N komponenten 1) und $\{b_n\}=\{1, 0, \ldots\}$. Bezeichnet man das System $\overbrace{1, \ldots, 1}^{k}$ kurz mit 1_k, so ist dann $\|\{a_n\}\|_p = I_p^{1/p}(1_N)$, $\|\{b_n\}\|_p = I_p^{1/p}(1_1) = 1$, $\|\{a_n\}+\{b_n\}\|_p = \|\{a_n\}-\{b_n\}\|_p = I_p^{1/p}(1_{N+1})$, also $I_p^{2/p}(1_{N+1})=I_p^{2/p}(1_N)+1$. Da N beliebig ist, ergibt sich hieraus durch Induktion und mit Rücksicht auf (7)

$$N=NI_p^{2/p}(1)=I_p^{2/p}(1_N)\geqq\sigma I_2(1_N)$$

mit einer positiven, absolute Konstante σ. Also $I_2(1_N)\leqq\sigma^{-1}N$. Das ist aber unmöglich, da nach dem Hilfssatz VI

$$I_2(1_N)\geqq bN\log^2 N$$

mit einer positiven, absoluten Konstante b besteht.

(Eingegangen am 20. September 1963)