Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $f(x)$ eine 2π-periodische, in $(0, 2\pi)$ quadratisch integrierbare Funktion mit der Fourier-Entwicklung

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

Die Untersuchung der Äquivalenz von Struktur- und Koeffizientenbedingungen wurde schon von PLESSNER [13] begonnen, indem er bewies, daß *die Koeffizientenbedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$$

und die Strukturbedingung

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} \, dt \, dx < \infty$$

äquivalent sind.

Seitdem haben MARCINKIEWICZ [11], ALEXITS [1], [2], STETSCHKIN [16] und ULJANOV [20], [21] und andere diesen Satz in verschiedenen Richtungen ausgedehnt. Neulich haben ALEXITS und KRÁLIK [3] die Frage der Ersatzbarkeit der Koeffizientenbedingungen durch eine entsprechende Strukturbedingung ganz allgemein untersucht.

Bezeichne $E_n = E_n^{(2)}(f)$ den besten Annäherungsgrad von $f(x)$ im Sinne der Metrik von $L^2(0, 2\pi)$ mit trigonometrischen Polynomen $(n-1)$-ter Ordnung; bekanntlich (s. [6]) ist

$$E_n^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2.$$

Wir haben in zwei früheren Arbeiten ([9], Satz I, und [10]) u. a. bewiesen, daß jede der Bedingungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n < \infty \tag{2}$$

und

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{t} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty \tag{3}$$

hinreichend dafür ist, daß die Entwicklung (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall konvergiert.

Später ist es uns gelungen zu beweisen, daß Bedingungen (2) und (3) äquivalent sind. Im Zusammenhang mit diesem Ergebnis hat sie die Frage gestellt, ob ein allgemeinerer Äquivalenzsatz für Bedingungen von obiger Art gilt. Ein solcher Satz wäre deswegen sehr nützlich, weil mehrere Sätze bekannt sind, welche sich aus der auf den besten Annäherungsgrad von $f(x)$ bezüglichen Bedingung ergeben und auf eine bestimmte Konvergenz der Entwicklung (1) beziehen.

In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden Hauptsatz, woraus wir mehrere neue und bekannte Konvergenzsätze herleiten können.

Hauptsatz. *Sei $\lambda(x)$ $(x \geqq 1)$ eine positive, monoton nichtabnehmende Funktion mit*[1])

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n)} \leqq K \frac{1}{\lambda(m)} \qquad (m=1,2,\ldots). \tag{4}$$

Die drei Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{5}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty \tag{6}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} E_n < \infty \tag{7}$$

sind paarweise äquivalent[2]).

Wählt man z. B. $\lambda(x) = x^{1/2}$, so ergibt sich, daß die drei Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{8}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{t^{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{n^{1/2}} < \infty \tag{10}$$

paarweise äquivalent sind.

---

[1]) Im folgenden bezeichnen $K, K_1, K_2, \ldots$ positive, absolute Konstanten.

[2]) Zum Beweis der Implikation $(5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7)$ ist die Beschränkung (4) von $\lambda(x)$ unnötig.

Hieraus und aus dem Satz von STETSCHKIN [17], laut dessen aus (10) die absolute Konvergenz von (1) folgt und bei monoton abnehmendem $\{\varrho_n^2\}$ die Bedingung (10) auch notwendig ist, ergibt sich unmittelbar der

Satz I. *Damit die Entwicklung* (1) *absolut konvergiert, ist die Bedingung* (9) *hinreichend; für monotone Koeffizientenfolgen* $\{\varrho_n\}$ *ist sie auch notwendig.*

Aus Satz I ergeben sich z. B. die folgenden bekannten Sätze:

Satz A. (SZÁSZ [18]) *Bezeichne* $\omega^{(2)}(1/n, f)$ *den quadratischen Stetigkeitsmodul von* $f(x)$. *Ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{n^{1/2}} < \infty, \tag{11}$$

so ist die Entwicklung (1) *absolut konvergent.*

Satz B. (SALEM [14]) *Ist* $f(x)$ *eine* 2π*-periodische Funktion von endlicher Variation und gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)^{1/2}}{n} < \infty, \tag{12}$$

wo $\omega(\delta, f)$ *den Stetigkeitsmodul von* $f(x)$ *bedeutet, so konvergiert die Entwicklung* (1) *absolut.*

Wegen $E_n \leqq K_1 \omega^{(2)}(1/n, f)$ (s. z. B. [4], S. 882) und unserer obigen Bemerkung folgt nämlich aus (11) das Erfülltsein von (9), also folgt Satz A aus unserem Satz I. — Was den Satz B anbetrifft, bemerken wir, daß (12) mit

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\, \omega(t, f)^{1/2}\, dt < \infty$$

gleichwertig ist, ferner wegen der endlichen Variation von $f(x)$ die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2\, dx \leqq K_2 t\, \omega(t, f) \tag{13}$$

gilt. Daraus folgt unmittelbar (7), also folgt auch Satz B aus unserem Satz I.

Ebenfalls lassen sich Sätze von BERNSTEIN [5] und ZYGMUND [23], wie auch weitere Sätze über die absolute Konvergenz der Fourierreihen aus unserem Satz I leicht herleiten.

Weitere Folgerungen aus dem Hauptsatz und Satz I:

Folgerung I. *Die Bedingung* (9) *zieht die absolute Konvergenz der Entwicklung von* $|f(x)|$ *nach sich.*

Diese ist nach der Ungleichung $\big(|f(x+t)| - |f(x-t)|\big)^2 \leqq \big(f(x+t) - f(x-t)\big)^2$ klar.

Die Bedingung (9) ist daher im allgemeinen für die absolute Konvergenz der Fourierreihe von $f(x)$ nicht notwendig, da es nach einem Ergebnis von KAHANE [7] eine Funktion $f(x)$ gibt, so daß die Fourierreihe von $f(x)$ absolut konvergiert, diejenige von $|f(x)|$ dagegen nicht. Wenn aber $\varrho_n \geqq \varrho_{n+1}$ ist, so hat unser Satz I die

Folgerung II. *Ist $\{\varrho_n\}$ monoton abnehmend, so impliziert die absolute Konvergenz der Fourierreihe von $f(x)$ die absolute Konvergenz der Fourierreihe von $|f(x)|$.*

Folgerung III. *Ist $|f(x)| \geqq c > 0$ fast überall, so ist auch die Fourierreihe von $1/f(x)$ unter der Bedingung (9) absolut konvergent.*

Dies folgt aus der Ungleichung $\left(\frac{1}{f(x+t)} - \frac{1}{f(x-t)}\right)^2 \leqq \frac{1}{c^4}\left(f(x+t) - f(x-t)\right)^2$.
Im Spezialfall $\varrho_n \downarrow 0$ folgt hieraus der wohlbekannte Satz von WIENER [22].

Wählt man $\lambda(x) = x$ im Satz I, so ergibt sich, daß die drei Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2\,dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{14}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2\,dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n < \infty \tag{16}$$

paarweise äquivalent sind.

Hieraus und aus einem Satz des Verfassers (Satz I in [9]), welcher u. a. behauptet, daß die Entwicklung (1) unter der Bedingung (16) fast überall unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder konvergiert, folgt unmittelbar der

Satz II. *Unter der Bedingung (15) konvergiert die Entwicklung (1) fast überall unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder.*[3])

Satz II hat z. B. die Folgerungen:

Folgerung IV. *Genügt $f(x)$ einer Lipschitzbedingung α-ter Ordnung mit $\alpha > 0$, bzw. ist $f(x)$ von endlicher Variation, so konvergiert ihre Fourier-Entwicklung unbedingt.*

Folgerung V. *Unter der Bedingung (15) konvergiert die Fourierreihe von $|f(x)|$ fast überall unbedingt, und im Fall $|f(x)| \geqq c > 0$ konvergiert auch die Fourierreihe von $1/f(x)$ fast überall unbedingt.*

Folgerung VI. *Ist (15) erfüllt, so konvergiert die konjugierte Reihe von (1) fast überall unbedingt.*

VI ergibt sich daraus, daß die Bedingungen (15) und (16) äquivalent sind.

---

[3]) Wir haben schon in [10] bewiesen, daß die Entwicklung (1) unter der Bedingung (14) unbedingt konvergiert.

SALEM und ZYGMUND [15] haben bewiesen, daß unter der Bedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{E_n}{n[\log n]^{1/2}} < \infty \tag{17}$$

die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{18}$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig konvergiert.

Aus dem Hauptsatz, mit $\lambda(x) = x\,[\log(x+1)]^{1/2}$, ergibt sich, daß die Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t\left[\log\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]^{1/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{19}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t\left[\log\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]^{1/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty \tag{20}$$

und (17) paarweise äquivalent sind.

Hieraus und aus dem zitierten Satz von SALEM und ZYGMUND ergibt sich der

Satz III. *Unter der Bedingung* (20) *konvergiert die Reihe* (18) *bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.*

Dieser Satz hat unmittelbar die

Folgerung IX. *Ist*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t, f)}{t\left[\log\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]^{1/2}}\, dt < \infty,$$

so ist die Reihe (18) *bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig konvergent.*

Folgerung X. *Ist $f(x)$ von endlicher Variation, so konvergiert ihre Fourierreihe bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.* (Siehe die Ungleichung (13).)

Folgerung XI. *Unter der Bedingung* (20) *konvergiert die Reihe*

$$|f(x)| \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig. Ist außerdem $|f(x)| \geqq c > 0$, *so konvergiert auch die Reihe*

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.

Wir beweisen ferner den

Satz IV. *Es sei* $\{r_n\}$ *eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge mit der Eigenschaft*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nr_n} < \infty. \tag{21}$$

Besteht

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 r_n < \infty, \tag{22}$$

so konvergiert die Reihe (18) *bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.*

Dieser Satz ist eine Verschärfung des Satzes von PALEY und ZYGMUND [12], daß unter der Bedingung $\Sigma \varrho^2 \log^{1+\varepsilon} n < \infty$ die Reihe (18) bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig konvergiert.

Bezeichne $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ das n-te (C, α)-Mittel $(\alpha > -1)$ der allgemeinen Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{23}$$

Verfasser hat in [8] u. a. folgendes bewiesen (s. noch [19]): Damit die Reihe (23) für jedes orthonormierte Funktionensystem im Grundintervall fast überall $|C, \alpha|$-summierbar[4] (absolut (C, α)-summierbar) sei, ist im Falle $\alpha > \frac{1}{2}$ die Bedingung

$$\sum_{m=2}^{\infty}{}' C_m < \infty \quad \text{mit} \quad C_m = \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} c_n^2 \right\}^{1/2}, \tag{24}$$

im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ die Bedingung

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{1/2} C_m < \infty \tag{25}$$

und im Falle $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ die Bedingung

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} C_m < \infty \tag{26}$$

hinreichend.

Für das trigonometrische System folgen (24), (25) und (26) aus den Ungleichungen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_n < \infty, \tag{27}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n < \infty \tag{28}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+\alpha}} E_n < \infty. \tag{29}$$

---

[4]) Die Orthogonalreihe (23) heißt fast überall $|C, \alpha|$-summierbar, wenn fast überall gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)| < \infty.$$

Es genügt die Implikation (27)$\Rightarrow$(24) zu bewiesen, da sich die beiden anderen auf ähnliche Weise ergeben. Setzen wir $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$, so gilt

$$\sum_{m=2}^{\infty} C_m = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{m=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} C_m \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} 1 \sum_{m=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} C_m^2 \right\} \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu/2} E_{2^{2^\mu}} =$$

$$= O(1) \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^{2^{\mu-1}}+1}^{2^{2^\mu}} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} \right) E_{2^{2^\mu}} = O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_n .$$

Die Reihe (1) ist also unter den Bedingungen (27) bzw. (28) bzw. (29) fast überall $|C, \alpha > \frac{1}{2}|$- bzw. $|C, \frac{1}{2}|$- bzw. für $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ $|C, \alpha|$-summierbar. Daraus folgt auf Grund von Satz I der

Satz V. *Die Reihe* (1) *ist unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{1}{t \left[\log \left(\frac{1}{t} + 1\right)\right]^{1/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty$$

fast überall $|C, \alpha|$*-summierbar* ($\alpha > \frac{1}{2}$), *unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty$$

fast überall $|C, \frac{1}{2}|$*-summierbar, und unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{3/2-\alpha}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty$$

fast überall $|C, \alpha|$*-summierbar* ($-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$).

Aus dem Hilfssatz III ergibt sich unmittelbar der

Satz VI. *Die Bedingungen* (8), (14), (19) *sind der Reihe nach gleichwertig damit, daß es positive meßbare Funktionen* $\varrho(t)$, $\gamma(t)$, $\mu(t)$ *gibt, mit den Eigenschaften*

$$\text{(30)} \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^3 \varrho(t)} \, dt < \infty \quad \textit{und} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varrho(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 \, dx \, dt < \infty,$$

$$\text{(31)} \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^2 \gamma(t)} \, dt < \infty \quad \textit{und} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \gamma(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 \, dx \, dt < \infty,$$

$$\text{(32)} \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^2 \log \left(\frac{1}{t} + 1\right) \mu(t)} \, dt < \infty \quad \textit{und} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 \, dx \, dt < \infty.$$

Bezeichne $\Omega(\delta, f)$ eine der „quadratischen Moduln"

$$\left.\begin{matrix}\omega^{(2)}(\delta,f)\\ \omega_2^{(2)}(\delta,f)\end{matrix}\right\} = \sup_{0\le t\le\delta}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}[f(x+t)-f(x-t)]^2\\ [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\end{matrix}\,dx\right\}^{1/2},$$

$$\left.\begin{matrix}w^{(2)}(\delta,f)\\ w_2^{(2)}(\delta,f)\end{matrix}\right\} = \left\{\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}[f(x+t)-f(x-t)]^2\\ [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\end{matrix}\,dx\right)dt\right\}^{1/2}.$$

Aus den Sätzen I—III und aus dem Hilfssatz IV ergibt sich der

Satz VII. *Ist die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n^{1/2}}<\infty \quad bzw. \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n}<\infty \quad bzw. \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n(\log n)^{1/2}}<\infty$$

erfüllt, so konvergiert die Reihe (1) *absolut bzw. fast überall unbedingt bzw. konvergiert die Reihe* (18) *gleichmäßig bei fast allen Vorzeichenverteilungen.*

Die Bisherigen haben die

Folgerung XII. *Die Bedingungen* (8)—(10), (30) *und* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n^{1/2}}<\infty$ *bzw.* (14)—(16), (31) *und* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n}<\infty$ *bzw.* (17), (19), (20), (32) *und* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n(\log n)^{1/2}}<\infty$ *sind alle paarweise äquivalent.*

Wir bemerken, daß Stetschkin [16] die Äquivalenz der Bedingungen (10), $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n},f\right)<\infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n},f\right)<\infty$ schon früher bewiesen hat. Es ist klar, daß man analoge Folgerungen auch für die $|C,\alpha|$-Summierbarkeit erhalten kann.

Ich möchte dem Herrn Professor G. Alexits für seine wertwollen Ratschläge bei der Zusammenstellung dieser Arbeit meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz I. *Ist* $f(x)\in L^2(-\pi,\pi)$, *so gilt*

$$\left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n},f\right)\right]^2 \le \frac{8\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{\nu=k}^{\infty}\varrho_\nu^2. \tag{1.1}$$

Dieser Hilfssatz ist bekannt, siehe z. B. [4], S. 348, oder [1], [16].

Hilfssatz II. *Ist $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$, so gilt*

$$n \int_0^{1/n} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx \right\} dt \geqq E_n^2. \tag{1.2}$$

Beweis. Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx = 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^4 kt.$$

Daraus folgt

$$n \int_0^{1/n} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx \right\} dt \geqq 4\pi n \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 \int_0^{1/n} (1-\cos 2kt)^2 \, dt \geqq$$

$$\geqq 4\pi \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 - 8\pi n \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 \int_0^{1/n} \cos 2kt \, dt + 4\pi n \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 \int_0^{1/n} \cos^2 2kt \, dt \geqq$$

$$\geqq 2\pi n \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 \int_0^{1/n} (1+\cos 4kt) \, dt \geqq 2\pi \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 + 2\pi n \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 \frac{\sin 4k/n}{4k} \geqq$$

$$\geqq 2E_n^2 - \frac{1}{2} E_n^2 \geqq E_n^2,$$

womit der Hilfssatz II bewiesen ist.

Hilfssatz III. *$\Phi(t)$ und $\beta(t)$ seien meßbare Funktionen, $\Phi(t) \geqq 0$, $\beta(t) > 0$ $(a \leqq t \leqq b)$. Die Bedingung*

$$\int_a^b \frac{\Phi(t)}{\beta(t)} \, dt < \infty \tag{1.3}$$

ist gleichwertig damit, daß es eine meßbare Funktion $\eta(t) > 0$ gibt, mit den Eigenschaften

$$\int_a^b \frac{1}{\beta^2(t)\eta(t)} \, dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_a^b \eta(t)\Phi^2(t) \, dt < \infty. \tag{1.4}$$

Beweis. Die Implikation $(1.4) \Rightarrow (1.3)$ folgt durch die Schwarzsche Ungleichung:

$$\left\{ \int_a^b \frac{\Phi(t)}{\beta(t)} \, dt \right\}^2 \leqq \int_a^b \frac{1}{\beta^2(t)\eta(t)} \, dt \cdot \int_a^b \eta(t)\Phi^2(t) \, dt.$$

Zum Beweis der Implikation $(1.3) \Rightarrow (1.4)$ setzen wir $\eta(t)$ gleich $[\beta(t)\Phi(t)]^{-1}$ wenn $\Phi(t) > 0$, und gleich $[\beta^2(t)]^{-1}$ wenn $\Phi(t) = 0$. Die Ungleichungen (1.4) folgen dann aus der Definition von $\eta(t)$ und (1.3).

Hilfssatz IV. *Sei $\lambda(x)$ $(x \geqq 1)$ eine positive, monoton nichtabnehmende Funktion, welche der Bedingung* (4) *genügt. Dann sind Bedingung* (7) *und die folgenden Bedingungen*

$$(1.5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty,$$

und

$$(1.6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} w^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty$$

paarweise äquivalent.

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß Bedingung (7) die anderen nach sich zieht. Offenbar bestehen die folgenden Ungleichungen:

$$(1.7) \qquad w^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

$$(1.8) \qquad \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq 2\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq 2w^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Auf Grund dieser Ungleichungen genügt es zu zeigen, daß die erste Bedingung von (1.5) aus (7) folgt. Dies ergibt sich durch Anwendung des Hilfssatzes I.

In der Tat besteht nach (1.1)

$$(1.9) \qquad \frac{1}{4} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n)} \left(\sum_{k=1}^{n} kE_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n\lambda(n)} \sum_{\nu=1}^{m} \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} kE_k^2\right)^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n)} (E_1 + 2E_2) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Die zweite Summe Σ_2 ist nach (4) endlich, die erste kann man einfach abschätzen:

$$(1.10) \qquad \Sigma_1 \leqq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n\lambda(n)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu E_{2^\nu} \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu E_{2^\nu} \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu E_{2^\nu} \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)}.$$

Nach (4) gilt

$$(1.11) \qquad \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)} \leqq 2 \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{n\lambda(2^m)} + \frac{1}{\lambda(2^\nu)} \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{n=2^\nu+1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n)} + \frac{1}{\lambda(2^\nu)} \leqq (2K+1) \frac{1}{\lambda(2^\nu)}.$$

Aus (1.10) und (1.11) ergibt sich

$$(1.12) \qquad \Sigma_1 \leqq (4K+2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu}{\lambda(2^\nu)} E_{2^\nu} \leqq (8K+4) \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \frac{1}{\lambda(k)} E_k < \infty.$$

Nach (1. 9) und (1. 12) impliziert die Ungleichung (7) die Beziehung (1. 5). Damit haben wir bewiesen, daß aus (7) die Ungleichungen (1. 5) und (1. 6) folgen. Wir haben noch zu zeigen, daß (7) aus der zweiten Ungleichung von (1. 6) folgt. Nach (1. 2) gilt aber die Ungleichung

$$E_n \leqq w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

und diese Abschätzung macht unsere Behauptung klar.

Hilfssatz V. *Die Bedingung* (17) *ist gleichwertig damit, daß es eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge* $\{r_n\}$ *mit den Eigenschaften* (21) *und* (22) *gibt.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß (17) aus (21) und (22) folgt. Es gilt nämlich erstens

$$(1.13)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n[\log n]^{1/2}}E_n \leqq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}}\frac{1}{n(\log n)^{1/2}}\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=2^{2^\nu}+1}^{2^{2^{\nu+1}}}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 4\sum_{m=1}^{\infty}2^{m/2}\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=2^{2^\nu}+1}^{2^{2^{\nu+1}}}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq 16\sum_{n=1}^{\infty}2^{n/2}\left(\sum_{k=2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}}\varrho_k^2\right)^{1/2}.$$

Aus (21) folgt ferner

$$(1.14)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}2^m\frac{1}{r_{2^{2^m}}} \leqq K\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2^{2^{m-1}}+1}^{2^{2^m}}\frac{1}{nr_n} \leqq K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nr_n} < \infty$$

und aus (22)

$$(1.15)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}r_{2^{2^m}}\sum_{n=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}}\varrho_k^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\varrho_n^2 r_n < \infty.$$

Mit Anwendung der Cauchyschen Ungleichung ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n/2}\left(\sum_{k=2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}}\varrho_k^2\right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n/2}}{\sqrt{r_{2^{2^n}}}}\sqrt{r_{2^{2^n}}}\left(\sum_{k=2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{r_{2^{2^n}}}\sum_{n=1}^{\infty}r_{2^{2^n}}\sum_{k=2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}}\varrho_k^2\right\}^{1/2}.$$

Daraus ist die Implikation $\{(21)$ und $(22)\} \Rightarrow (17)$ wegen (1. 13), (1. 14) und (1. 15) ersichtlich.

Nun beweisen wir, daß unter der Bedingung (17) eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge $\{r_n\}$ existiert, die (22) erfüllt. Setzen wir nämlich

$$r_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\log k)^{1/2}E_k},$$

so folgt durch eine Abelsche Umformung

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n^2 r_n = \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k} \sum_{n=k}^{\infty} \varrho_n^2 \leqq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{1/2}} E_k,$$

womit (17)$\Rightarrow$(22) bewiesen ist.

Wir übergehen nun zum Beweis der Implikation (17)$\Rightarrow$(21). Es gilt

$$\sum_{n=17}^{\infty} \frac{1}{nr_n} = \sum_{n=17}^{\infty} \left[n \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k} \right]^{-1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} \left[n \sum_{k=2^{2^{m-1}}+1}^{2^{2^m}} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k} \right]^{-1} \leqq$$

$$\leqq K_3 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} \left[n \frac{1}{E_{2^{2^{m-1}}} 2^{m/2}} 2^m \right]^{-1} \leqq K_4 \sum_{m=2}^{\infty} 2^{m/2} E_{2^{2^{m-1}}} \leqq$$

$$\leqq K_5 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^{m-2}}+1}^{2^{2^{m-1}}} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_{2^{2^{m-1}}} \leqq K_5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_n,$$

womit die Implikation (17)$\Rightarrow$(21) und damit auch der Hilfssatz V vollständig bewiesen sind.

§ 2. Beweis des Hauptsatzes

Die Implikation (5)$\Rightarrow$(6) ist trivial; wir übergehen also zum Beweis der Implikation (6)$\Rightarrow$(7). Ist $f(x)$ in $(0, 2\pi)$ fast überall konstant, oder $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} < \infty$, so ist die Behauptung klar. Wir nehmen also an, daß $f(x)$ nicht fast überall konstant ist und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} = \infty$ ist. Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$F(t) = \int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx = 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^4 kt. \tag{2. 1}$$

Nach dem Obigen ist die Funktion

$$\alpha(t) = \left(t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right) [F(t)]^{1/2} \right)^{-1}$$

fast überall endlich. Aus der Bedingung (6) und der Definition von $\alpha(t)$ ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4 \lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)}\,dt < \infty \tag{2. 2}$$

und

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \alpha(t)[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx\,dt < \infty. \tag{2. 3}$$

Aus (2. 1) und (2. 3) folgt, auf Grund des Satzes von FUBINI,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \int_0^1 \alpha(t)\sin^4 kt\,dt < \infty. \tag{2. 4}$$

Wir bezeichnen mit I_k die Menge derjenigen Punkte t von $[0, 1]$, für die $\sin^4 kt \geqq \frac{1}{4}$ ist und wir setzen

$$I(k) = \int_{I_k} \alpha(t)\,dt.$$

Nach (2. 4) besteht

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 I(k) < \infty. \tag{2. 5}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda(1) \geqq 1$ angenommen werden. Es sei $\{p_m\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, für die

$$2^m \leqq \sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} \frac{1}{\lambda(n)} \leqq 2^{m+1} \qquad (m=0, 1, \ldots) \tag{2. 6}$$

gilt. Die Existenz einer solchen Folge $\{p_m\}$ ist auf Grund der bezüglich $\lambda(x)$ getroffenen Bedingungen offenbar. Wir definieren nun die Folge $\{k_m\}$ folgenderweise: es sei k_m die kleinste unter den natürlichen Zahlen n, für die $p_m < n \leqq p_{m+1}$ ist und

$$I(n) = \min_{p_m < k \leqq p_{m+1}} \{I(k)\}$$

gilt. Wir zeigen, daß

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m}}{I(k_m)} < \infty \tag{2. 7}$$

ist. Zuerst beweisen wir, daß die Beziehung

$$I(k_m) \geqq \frac{1}{2^{14}} 2^{2m} \left(\int_{1/p_{m-2}}^{1/p_{m-3}} \left[t^4 \lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)\right]^{-1} dt \right)^{-1} \tag{2. 8}$$

gilt. Es sei $\Delta_m = \left[\frac{1}{p_{m-2}}, \frac{1}{p_{m-3}}\right]$. Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhält man

$$(2.9)\quad \left(\int\limits_{(\Delta_{m-1}\cup\Delta_m)\cap I_{k_m}} \left[t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{-1} dt\right)^2 \leqq \int\limits_{I_{k_m}} \alpha(t)\,dt \cdot \int\limits_{\Delta_{m-1}\cup\Delta_m} \left[t^4\lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)\right]^{-1} dt \leqq$$

$$\leqq l(k_m) \int\limits_{\Delta_{m-1}\cup\Delta_m} \left[t^4\lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)\right]^{-1} dt.$$

Das Integral links kann man wegen der Monotonität von $\lambda(x)$ folgenderweise abschätzen:

$$(2.10)\quad \int\limits_{(\Delta_{m-1}\cup\Delta_m)\cap I_{k_m}} \left[t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{-1} dt \geqq \frac{1}{2^4}\int\limits_{\Delta_m}\left[t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{-1} dt = \frac{1}{2^4}\int\limits_{\bar\Delta_m}\frac{1}{\lambda(x)}\,dx,$$

wobei $\bar\Delta_m$ das Intervall $[p_{m-3}, p_{m-2}]$ bezeichnet. Nach (2.6) ist

$$\int\limits_{\bar\Delta_m}\frac{1}{\lambda(x)}\,dx \geqq \sum_{n=p_{m-3}+1}^{p_{m-2}}\frac{1}{\lambda(n)} \geqq 2^{m-3},$$

somit ergibt sich aus (2. 9) und (2. 10) die Ungleichung (2. 8). Aus (2.2) und (2. 8) folgt die Ungleichung (2. 7) unmittelbar. Um den Beweis der Implikation (6)⇒(7) zu führen, haben wir nur noch zu zeigen, daß die Ungleichung (7) aus (2. 5) und (2. 7) folgt. Mit einfacher Rechnung ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=p_0+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}}\frac{1}{\lambda(n)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}}\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 2\sum_{m=0}^{\infty}2^m\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq 4\sum_{m=0}^{\infty}2^m\left(\sum_{k=p_m+1}^{p_{m+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2}.$$

Daraus erhalten wir weiter durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sum_{n=p_0+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n \leqq \sum_{m=0}^{\infty}[l(k_m)]^{1/2}\left(\sum_{k=p_m+1}^{p_{m+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2}\cdot\frac{2^m}{[l(k_m)]^{1/2}} \leqq$$

$$\leqq \left\{\sum_{m=0}^{\infty} l(k_m)\sum_{k=p_m+1}^{p_{m+1}}\varrho_k^2\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2m}}{l(k_m)}\right\}^{1/2},$$

woraus das Erfülltsein der Bedingung (7) auf Grund der Definition von $l(k_m)$ und der Ungleichungen (2. 5) und (2. 7) folgt, womit die Implikation (6)⇒(7) bewiesen ist.

Wir beweisen nun die Implikation (7)$\Rightarrow$(5). Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\,dx = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2 kt,$$

somit besteht

$$(2.11)\qquad A(\lambda,f) = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \int_0^1 \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\,dx\right)^{1/2} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2 kt\right)^{1/2} dt =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2 t^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \varrho_k^2\right)^{1/2}\right] dt \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2\right)^{1/2} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{t\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}\,dt + \sum_{n=2}^{\infty} E_{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}\,dt.$$

Die letzten zwei Integrale sind höchstens gleich $\frac{2}{\lambda(n-1)\cdot n}$ bzw. $\frac{1}{\lambda(n-1)}$, also ist nach (2.11)

$$(2.12)\qquad A(\lambda,f) \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2\right)^{1/2} \frac{2}{\lambda(n-1)\cdot n} + \sum_{n=2}^{\infty} E_{n+1} \frac{1}{\lambda(n-1)}.$$

Die zweite Summe ist endlich. Die erste ist ebenfalls endlich, was man aus folgender Abschätzung ersehen kann:

$$(2.13)\qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2\right)^{1/2} \leqq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n-1)} (\varrho_1^2 + 4\varrho_2^2)^{1/2} +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n\lambda(n-1)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2\right)^{1/2}.$$

Hier ist nämlich wegen (4) ist die erste Summe endlich, und für die zweite gilt

$$(2.14)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n\lambda(n-1)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2\right)^{1/2} \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)}.$$

Nach (1. 11) und (2. 14) kann die Abschätzung (2. 13) folgenderweise fortgesetzt werden:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2 \right)^{1/2} \leqq K_6 + K_7 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu}{\lambda(2^\nu)} \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2 \right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K_6 + 2K_7 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \frac{1}{\lambda(2^\nu)} \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2 \right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K_6 + 2K_7 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \frac{1}{\lambda(n)} E_n \leqq K_6 + 2K_7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} E_n < \infty.$$

Daraus und aus (2. 12) folgt die Ungleichung

$$A(\lambda, f) \leqq K_8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} E_n < \infty,$$

was zu beweisen war.

Damit haben wir den Hauptsatz vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] G. Alexits, Über den Einfluß der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 95—101.

[2] G. Alexits, Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomentwicklungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 1—4.

[3] G. Alexits und D. Králik, Über die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 131—139.

[4] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды* (Москва, 1961).

[5] С. Н. Бернштейн, Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов, *Сообщ. Харьковск. Матем. об-ва*, (2) **14** (1914), 139-144.

[6] J. P. Gram, Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen Mittels der Methode der kleinsten Quadrate, *J. reine angew. Math.*, **94** (1883), 41—73.

[7] J. P. Kahane, Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes, *J. math pures et appl.*, **35** (1956), 249—259.

[8] L. Leindler, Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 243—268.

[9] L. Leindler, Über unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen mit strukturellen Bedingungen, *Studia Math.*, **23** (1963), 113—117.

[10] Л. Лейндлер, О безусловной сходимости тригонометрических рядов, *Успехи мат. наук*, **19** **1** (115) (1964), 167—168.

[11] J. Marcinkiewicz, Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **8** (1939), 239—240.

[12] R. Paley—A. Zygmund, On some series of functions, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **26** (1930), 337—357, 458—474 und **28** (1932), 190—205.

[13] A. Plessner, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal f. reine u. angew. Math.*, **155** (1926), 15—25.

[14] R. Salem, On a theorem of Zygmund, *Duke Math. J.*, **10** (143), 23—31.

[15] R. Salem—A. Zygmund, Some properties of trigonometric series, whose terms have random sings, *Acta Math.*, **91** (1954), 245—301.

[16] С. Б. Стечкин, О теореме Колмогорова-Селиверстова, *Известия Акад. Наук СССР*, **17** (1953), 499-512.

[17] ——— Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, *Успехи мат. наук*, **2** (1947), 177-178.

[18] O. Szász, On the absolute covergence of trigonometric series, *Annals of Math.*, **47** (1946), 213–220.
[19] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. IX (Absolute Summation), *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292–299.
[20] П. Л. Ульянов, Обобщение теоремы Марцинкевича, *Известия Акад. Наук СССР*, **17** (1953), 513-524.
[21] ——— О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, *Успехи мат. наук*, **8:6 (58)** (1953), 133–141.
[22] N. Wiener, Tauberian theorems, *Annals of Math.*, **33** (1932), 1–100.
[23] A. Zygmund, Sur la convergence absolue des séries de Fourier, *J. London Math. Soc.*, **3** (1928), 194–196.

(Eingegangen am 28. September 1963)