Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen

Von LÁSZLÓ LOSONCZI in Debrecen

J. ACZÉL [1] hat das Problem der allgemeinen Lösung der Funktionalgleichung

$$f(ax+by+c) = pf(x)+qf(y)+r \tag{1}$$

aufgeworfen, wo keine der Konstanten a, b, p, q gleich Null ist, und x, y die Menge der reellen Zahlen durchläuft.

Über die nichttrivialen stetigen bzw. meßbaren, beschränkten Lösungen von (1) hat J. ACZÉL [2] bewiesen, daß diese nur im Falle $a=p, b=q$ existieren. Im Spezialfalle

$$f(ax+y) = pf(x)+f(y)$$

zeigte Z. DARÓCZY [3], daß eine nichtkonstante Lösung genau dann existiert, wenn a und p konjugierte algebraische Zahlen[1]), oder beide transzendent über R sind [2]) (oder, was dasselbe bedeutet, $R(a)$ mit $R(p)$ isomorph ist). In einer weiteren Arbeit [4] hat Z. DARÓCZY den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Die Funktionalgleichung* (1) *hat nur dann eine nichtkonstante Lösung, wenn es eine isomorphe Abbildung von $R(a, b)$ auf $R(p, q)$ gibt*[3]), *die die Elemente a, b in die Elemente p, q überführt, und im Falle $p+q = 1$, $c=0$ auch $r=0$ ist.*

In dieser Arbeit vereinfachen wir den Beweis dieses Satzes und geben sämtliche nichttriviale Lösungen der Funktionalgleichung (1) an. Für wertvolle Ratschläge möchte ich Herrn Prof. J. ACZÉL aufrichtig danken.

Bemerkung. Die Bedingung der Isomorphie von $R(a, b)$ und $R(p, q)$ kann — wie man leicht einsieht — auch so gefaßt werden: a und p sind beide transzendent über R oder beide algebraisch und konjugiert, dagegen sind b und q entweder beide transzendent über $R(a)$ bzw. $R(p)$ oder ist b algebraisch über $R(a)$ und zugleich q algebraisch über $R(p)$, so daß das zu q geordnete irreduzible Hauptpolynom in $R(p)$ dieselbe Gestalt hat wie das zu b geordnete irreduzible Hauptpolynom in $R(a)$, d. h. die Koeffizienten gehen im Sinne der zwischen $R(a)$ und $R(p)$ bestehenden Isomorphie ineinander über.

---

[1]) Die algebraischen Zahlen a, p nennen wir konjugiert, wenn $P_a(x)=P_p(x)$ ist, wo $P_a(x)$, $P_p(x)$ die den Zahlen a, p eindeutig zugeordneten irreduziblen Hauptpolynome sind.

[2]) R bedeutet den Körper der rationalen Zahlen.

[3]) $R(a, b)$ bedeutet den Erweiterungskörper von R durch die Elemente a, b.

Hilfssatz 1. *Genügt die Funktion $f(x)$ der Gleichung* (1), *so genügt die Funktion $g(x) = f(x) - f(0)$ der Cauchyschen Grundgleichung*

$$g(u+v) = g(u) + g(v) \tag{2}$$

und den Gleichungen

$$g(a^k x) = p^k g(x), \quad g(b^k x) = q^k g(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Zum Beweis setzen wir in (1) der Reihe nach $x = \frac{u}{a}$, $y = \frac{v-c}{b}$; $x = \frac{u}{a}$, $y = -\frac{c}{b}$; $x = 0$, $y = \frac{v-c}{b}$; $x = 0$, $y = -\frac{c}{b}$ ein, und erhalten nacheinander

$$f(u+v) = pf\left(\frac{u}{a}\right) + qf\left(\frac{v-c}{b}\right) + r, \quad f(u) = pf\left(\frac{u}{a}\right) + qf\left(-\frac{c}{b}\right) + r,$$

$$f(v) = pf(0) + qf\left(\frac{v-c}{b}\right) + r, \quad f(0) = pf(0) + qf\left(-\frac{c}{b}\right) + r,$$

woraus $f(u+v) = f(u) + f(v) - f(0)$ folgt. Damit haben wir (2) bewiesen.

Durch die Substitutionen $y = -\frac{c}{b}$; $x = 0$, $y = -\frac{c}{b}$ ergeben sich aus (1)

$$f(ax) = pf(x) + qf\left(-\frac{c}{b}\right) + r, \tag{4}$$

$$f(0) = pf(0) + qf\left(-\frac{c}{b}\right) + r. \tag{5}$$

Subtrahieren wir (5) von (4), so erhalten wir die erste der Gleichungen (3) im Falle $k = 1$. Den Beweis kann man leicht fortsetzen mit vollständiger Induktion (s. [3]). Der Beweis der zweiten Gleichung (3) verläuft analog.

Hilfssatz 2. *Befriedigt die Funktion $f(x)$ die Funktionalgleichung* (1), *so besteht die Gleichung*

$$g\big(F(a, b)x\big) = F(p, q)g(x) \tag{6}$$

für beliebige, an den Stellen (a, b), (p, q) erklärte gebrochene rationale Funktionen $F(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ $\big(Q(a, b) \neq 0,\ Q(p, q) \neq 0\big)$ mit rationalen Koeffizienten.

Wir zeigen erstens, daß

$$g\big(P(a, b)x\big) = P(p, q)g(x) \tag{7}$$

gilt, wo $P(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} x^i y^j$ ein beliebiges Polynom mit rationalen Koeffizienten ist. Es ist nämlich wegen (2), (3) [4])

$$g(P(a,b)x) = g\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}a^i b^j x\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(r_{ij}a^i b^j x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}p^i q^j g(x) = P(p,q)g(x).$$

Daraus folgt schon (6), weil

$$P(p,q)g(x) = g(P(a,b)x) = g\left(Q(a,b)\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}x\right) = Q(p,q)g\left(\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}x\right),$$

d. h.

$$g\left(\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}x\right) = \frac{P(p,q)}{Q(p,q)}g(x)$$

ist, was zu beweisen war.

Bemerkung. Wenn $f(x)$ nichtkonstant ist, so ist es hinreichend im Hilfssatz 2 zu verlangen, daß $Q(a,b)\neq 0$ (oder $Q(p,q)\neq 0$).

Es ist nämlich nach (7)

$$g(Q(a,b)x) = Q(p,q)g(x)$$

und aus $Q(a,b)=0$ (bzw. $Q(p,q)=0$) folgt $Q(p,q)=0$ (bzw. $Q(a,b)=0$), da $g(x)$ nichtkonstant ist. Deshalb folgt aus $Q(a,b)\neq 0$ (bzw. $Q(p,q)\neq 0$) $Q(p,q)\neq 0$ (bzw. $Q(a,b\neq 0)$, w. z. b. w.

Beweis des Satzes 1. Wir setzen voraus, daß die Funktionalgleichung (1) eine nichtkonstante Lösung hat. Die Abbildung

$$\varphi(F(a,b)) = F(p,q) \tag{8}$$

bildet (wegen $R(a,b)=\{F(a,b)\}$, $R(p,q)=\{F(p,q)\}$) $R(a,b)$ auf $R(p,q)$ ab. Wir zeigen, daß die Abbildung φ ein Isomorphismus von $R(a,b)$ auf $R(p,q)$ ist.

Die Abbildung (8) erhält die Addition und die Multiplikation. Aus

$$\varphi(F_1(a,b)) = F_1(p,q); \quad \varphi(F_2(a,\mathrm{b})) = F_2(p,q), \quad F_1(x,y)\circ F_2(x,y) = F(x,y)$$

folgt nämlich

$$\varphi(F_1(a,b)\circ F_2(a,b)) = \varphi(F(a,b)) = F(p,q) = F_1(p,q)\circ F_2(p,q) = \varphi(F_1(a,b))\circ$$
$$\circ\, \varphi(F_2(a,b)),$$

wobei die Operation $\circ$ die Addition bzw. die Multiplikation bedeutet.

Die Abbildung φ ist eineindeutig. Dazu genügt es zu zeigen, daß $F_1(p,q) = F_2(p,q)$ dann und nur dann, wenn $F_1(a,b)=F_2(a,b)$. Ist $F_1(a,b)=F_2(a,b)$, so gilt nach (6)

$$F_1(p,q)g(x) = g(F_1(a,b)x) = g(F_2(a,b)x) = F_2(p,q)g(x).$$

[4]) Wenn die Funktion $g(x)$ der Gleichung (2) genügt, so gilt

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i g(x_i) \quad \text{mit} \quad r_i\in R.$$

d. h.

$$(F_1(p,q)-F_2(p,q))g(x) = 0.$$

Weil $g(x)$ nicht identisch Null ist, folgt hieraus $F_1(p,q)=F_2(p,q)$. Andererseits, wenn $F_1(p,q)=F_2(p,q)$ ist, dann gilt wieder nach (6)

$$g(F_1(a,b)x)=F_1(p,q)g(x)=F_2(p,q)g(x)=g(F_2(a,b)x),$$

d. h.

$$g[(F_1(a,b)-F_2(a,b))x] = 0.$$

Da $g(x)$ nichtkonstant ist, muß $F_1(a,b)-F_2(a,b) = 0$, d. h. $F_1(a,b)=F_2(a,b)$ gelten. Die Abbildung (8) ist also ein Isomorphismus von $R(a,b)$ auf $R(p,q)$. Man sieht, daß $\varphi(a)=p$ und $\varphi(b)=q$. Ist $p+q = 1, c=0$, so folgt mit $x=y=0$ aus (1), daß $r=0$ sein muß. Damit haben wir den Satz 1 vollständig bewiesen.

Satz 2. *Wenn es eine isomorphe Abbildung φ von $R(a,b)$ auf $R(p,q)$ gibt, die die Elemente a, b in die Elemente p, q überführt, und im Falle $p+q = 1, c=0$ auch $r=0$ gilt, dann hat die Funktionagleichung (1) nichttriviale Lösungen und sämtliche nichtkonstante Lösungen haben die Gestalt*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(R_\nu)(f(h_\nu)-f(0))+f(0), \tag{9}$$

wobei $H=\{h_\nu\}$ eine Basis der reellen Zahlen über $R(a,b)$ und

$$x = \sum_{\nu=1}^{s} R_\nu h_\nu \quad R_\nu \in R(a,b), h_\nu \in H \tag{10}$$

ist, ferner $f(h_\nu), f(0)$ beliebige reelle Zahlen mit der Beschränkung

$$f(c) = (p+q)f(0)+r \tag{11}$$

bedeuten.

Beweis. Erstens zeigen wir, daß alle Lösungen von (1) die Gestalt (9) haben. Wegen [5]) $\varphi(r)=r$ $(r\in R)$, $\varphi(a)=p$, $\varphi(b)=q$ ist

$$\varphi(F(a,b))=F(p,q),$$

da der Isomorphismus φ die Addition und die Multiplikation erhält. So läßt sich (7) im Hilfssatz 2 folgendermaßen schreiben:

$$g(Sx)=\varphi(S)g(x), \tag{12}$$

wobei $S\in R(a,b)$ ist. Es sei $H=\{h_\nu\}$ eine Basis der reellen Zahlen über $R(a,b)$. Wir wissen, daß eine beliebige reelle Zahl x sich in der Gestalt

$$x = \sum_{\nu=1}^{s} R_\nu h_\nu \quad (R_\nu\in R(a,b), h_\nu\in H) \tag{10}$$

---

[5]) Da R gemeinsamer Primkörper der Körper $R(a,b)$ und $R(p,q)$ ist, gilt $\varphi(r)=r$ für jedes Element $r\in R$. (Vgl. L. Rédei [5].)

eindeutig aufschreiben läßt. Beachten wir die Gleichungen (2), (12), so erhalten wir

$$f(x)-f(0) = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(R_\nu)(f(h_\nu)-f(0)),$$

womit die Formel (9) bewiesen ist.

Jetzt beweisen wir noch, daß die Funktionen der Gestalt (9) die Gleichung (1) dann und nur dann erfüllen, wenn (11) besteht. Wir setzen die Funktion (9) in die Gleichung (1) ein. Wenn

$$y = \sum_{\nu=1}^{s} T_\nu h_\nu, \quad c = \sum_{\nu=1}^{s} Q_\nu h_\nu \qquad (T_\nu, Q_\nu \in R(a, b)),$$

dann ist

$$ax+by+c = \sum_{\nu=1}^{s} (aR_\nu + bT_\nu + Q_\nu)h_\nu \quad aR_\nu + bT_\nu + Q_\nu \in R(a, b),$$

also gilt

$$f(ax+by+c)-pf(x)-qf(y)-r = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(aR_\nu + bT_\nu + Q_\nu)(f(h_\nu)-f(0))+f(0)-$$

$$-p\sum_{\nu=1}^{s} \varphi(R_\nu)(f(h_\nu)-f(0))-pf(0)-q\sum_{\nu=1}^{s} \varphi(T_\nu)(f(h_\nu)-f(0))-qf(0)-r.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß φ ein Isomorphismus ist, mit $\varphi(a)=p$ und $\varphi(b)=q$, so erhalten wir

$$f(ax+by+c)-pf(x)+qf(y)-r = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(Q_\nu)(f(h_\nu)-f(0))+f(0)-(p+q)f(0)-r,$$

d. h. wegen (9)

$$f(ax+by+c)-pf(x)-qf(y)-r = f(c)-(p+q)f(0)-r.$$

Daher sehen wir, daß die durch die Gleichung (9) definierte Funktion dann und nur dann der Funktionalgleichung (1) genügt, wenn

$$f(c) = (p+q)f(0)+r \tag{11}$$

gilt.

Die Bedingung (11) kann immer erfüllt werden, außer wenn $p+q = 1$, $c=0$ ist, denn dann geht (11) in $f(0) = f(0)+r$ über. Damit (11) in diesem Fall bestehe, muß also $r=0$ sein.

Literatur

[1] J. Aczél, Quelques problèmes non résolus dans la théorie des équations fonctionnelles, *Matematička biblioteka*, Beograd, **25** (1963), 149–152.

[2] J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Commentarii Math. Helv.*, **21** (1948), 247–256.

[3] Z. Daróczy, Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 31–41.

[4] Z. Daróczy, A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról, *Mat. Lapok* **15** (1964), 52-86.

[5] L. Rédei, *Algebra*. I (Budapest, 1954).

(Eingegangen am 30. September 1963)