Gleichung der autoparallelen Abweichung in n-dimensionalen Linienelementräumen

Von A. MOÓR in Szeged

Einleitung

Das Ziel unserer Arbeit ist die Bestimmung einer Bedingung dafür, daß die aus einem Punkte ausgehenden autoparallelen Kurven eines allgemeinen metrischen Linienelementraumes eine Hüllkurve haben. Im zweidimensionalen Falle haben wir dieses Problem mit Hilfe der Bestimmung der skalaren Form der autoparallelen Abweichung in unserem Aufsatz [5][1]) behandelt; im folgenden wollen wir unsere Resultate auf den n-dimensionalen Linienelementraum erweitern.

Der Fall, in dem das zu Grunde gelegte Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ eine Finslersche Metrik hat, d. h. der metrische Grundtensor g_{ik} von der Form

$$g_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, v)}{\partial v^i \partial v^k}$$

ist, wo $F(x, v)$ die Grundfunktion bedeutet, wurde von H. RUND eingehend studiert und gelöst (vgl. [8]). Da im Finslerschen Raum die autoparallelen Kurven gleichzeitig geodätische Linien des Raumes sind, hängt der Problemkreis mit der zweiten Variation des Bogenlängenintegrals, bzw. mit dem möglichen Durchmesser des Raumes zusammen.

In unserem allgemeinen metrischen Linienelementraum sind die autoparallelen Kurven im allgemeinen von den geodätischen Linien verschieden; die Existenz, oder die Nichtexistenz einer Hüllkurve der autoparallelen Kurven drückt zwar eine sehr wichtige und charakteristische Eigenschaft der Struktur des Linienelementraumes aus, kann aber dann und nur dann für die Abschätzung des Durchmessers des Raumes benützt werden, falls die autoparallelen Kurven gleichzeitig geodätische Linien sind.

Die Existenz der Hüllkurve werden wir mit Hilfe der skalaren Form der Gleichung der autoparallelen Abweichung bestimmen. Die von uns verwandte Methode stammt von H. RUND (vgl. [8] § 1) und benützt wesentlich die Theorie der Unterräume. Dementsprechend werden wir im ersten Teil unserer Arbeit die Theorie der Unterräume der allgemeinen metrischen Linienelementräume entwickeln, im zweiten Teil bestimmen wir die Gleichung der autoparallelen Abweichung und dann geben wir eine Bedingung für die Existenz einer Hüllkurve der autoparallelen Kurven.

---

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten auf die Literatur am Ende unserer Arbeit.

I. TEIL

THEORIE DER UNTERRÄUME DER ALLGEMEINEN METRISCHEN LINIENELEMENTRÄUME

§ 1. Grundformeln der allgemeinen metrischen Linienelementräume

Ein n-dimensionaler allgemeiner metrischer Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente (x^i, v^i) in der eine geometrische Struktur durch den symmetrischen Grundtensor $g_{ik}(x, v)$ und durch ein lineares invariantes Differential von der Form

$$D\xi^i = d\xi^i + M^{*i}_{j\ k}\xi^j \omega^k(d) + L^{*i}_{j\ k}\xi^j dx^k \tag{1. 1}$$

$$\omega^k(d) \overset{\text{def}}{=} Dl^k = (\delta^k_t + \overline{M}_o{}^k{}_t)(dl^t + L^{*t}_{o\ m} dx^m) \tag{1. 1a}$$

$$l^k \overset{\text{def}}{=} \frac{v^k}{F}, \quad F \overset{\text{def}}{=} (g_{ij}(x, v) v^i v^j)^{\frac{1}{2}}$$

festgelegt ist. (Vgl. [4] § 2, insbesondere die Formeln (2. 4) und (2. 5), und [6] Formel (2. 7)). Alle charakteristische Größen des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ sind in den v^i — die die Richtung des Linienelementes bestimmen — homogen von nullter Ordnung.

Die Grundgrößen g_{ik}, $M^{*i}_{j\ k}$ und $L^{*i}_{j\ k}$ sollen den folgenden Forderungen genügen: 1) die quadratische Form

$$g_{ik}(x, v) X^i X^k$$

soll in den Hilfsveränderlichen X^i positiv definit sein; 2) das invariante Differential (1. 1) soll metrisch sein, d. h. es soll

$$Dg_{ik} = 0 \tag{1. 2}$$

bestehen. Daraus erhält man, daß die Übertragungsparameter $M^{*i}_{j\ k}$ und $L^{*i}_{j\ k}$ die folgende Form haben müssen:

$$M^{*i}_{j\ k} \overset{\text{def}}{=} \overline{M}_j{}^i{}_t J^{*t}_k, \tag{1. 3}$$

$$\overline{M}_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} A_j{}^i{}_k + \mu_j{}^i{}_k, \qquad \mu_j{}^i{}_k \equiv g^{it}\mu_{jtk}, \tag{1. 3a}$$

$$L^{*i}_{j\ k} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*i}_{j\ k} - A_j{}^i{}_r J^r_t \sigma_o{}^t{}_k + \sigma_j{}^i{}_k, \qquad \sigma_j{}^i{}_k \equiv g^{it}\sigma_{jtk}, \tag{1. 4}$$

wo
$$A_j{}^i{}_k \equiv g^{is} A_{jsk}, \quad A_{jsk} \overset{\text{def}}{=} \frac{F}{2}\partial_{v^k} g_{js}.$$

J^r_t und J^{*k}_t sollen die eindeutigen Lösungen der Gleichungssysteme

$$(\delta^t_k + A_o{}^t{}_k) J^i_t = \delta^i_k \tag{1. 5a}$$

$$(\delta^t_i + \overline{M}_o{}^t{}_i) J^{*k}_t = \delta^k_i \tag{1. 5b}$$

bedeuten (vgl. [6], Formeln (2. 5) und (3. 9), bzw. [4] Formeln (2. 15) und (2. 24)). Die Forderung der Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichungssysteme (1. 5a) und (1. 5b) bedingt selbstverständlich die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\operatorname{Det}(\delta_k^t + A_o{}^t{}_k) \neq 0, \quad \operatorname{Det}(\delta_i^t + \overline{M}_o{}^t{}_i) \neq 0,$$

was wir im folgenden immer annehmen wollen. Der Index „o" bedeutet — wie gewöhnlich — die Überschiebung mit dem Einheitsvektor l^i. μ_{jtk} bedeutet in der Formel (1. 3a) einen, in j, t schiefsymmetrischen Tensor, für den noch $\mu_{jto}=0$ gelten soll; außer diesen Bedingungen ist μ_{jtk} beliebig wählbar. Die Ursache dieser Möglichkeit für μ_{jtk} ist das folgende: durch die Forderung (1. 2) sind die Übertragungsparameter noch nicht eindeutig bestimmt. (Vgl. [4] § 2 und [6] § 2). Wir bemerken hier, daß in [6] allgemeinere Übertragungsparameter konstruiert sind, als in [4], da in [6] die Forderung (2. 3b) von [4] nicht bedingt wird. Die Bedingung (2. 3b) von [4] bedeutet übrigens, daß

$$J_t^{*k} = \delta_t^k - \overline{M}_o{}^k{}_t \equiv \delta_t^k - (A_o{}^k{}_t + \mu_o{}^k{}_t)$$

ist, was aber für die folgenden keine Bedeutung hat, und somit nicht bedingt werden soll.

In der Formel (1. 4) ist $\Gamma_j^{*i}{}_k$ die Lösung des Gleichungssystems:

$$\Gamma_j^{*i}{}_k = \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix} - A_j{}^i{}_t \Gamma_o^{*t}{}_k - A_k{}^i{}_t \Gamma_o^{*t}{}_j + A_{jkt} \Gamma_o^{*t}{}_r g^{ri}, \tag{1. 6}$$

wo $\begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix}$ die aus g_{ik} gebildeten Christoffelschen Symbole bedeuten (vgl. [6] Formel (3. 11b)) und σ_{jtk} ist ein beliebiger, aber in j, t schiefsymmetrischer Tensor.

Die Tensoren g_{ik}, μ_{ijk} und σ_{ijk} bilden die Grundtensoren des allgemeinen metrischen Linienelementraumes. Nach diesen Tensoren sind die Übertragungsparameter durch die Formeln (1. 3), (1. 4) und (1. 6), bzw. durch den metrischen Fundamentaltensor g_{ik} bestimmt.

§ 2. Grundgrößen der m-dimensionalen Unterräume

Die Theorie der m-dimensionalen Unterräume der Finslerschen Räume hat E.T. Davies in seiner grundlegenden Arbeit [2] entwickelt und dann S. Kikuchi weiter geführt (vgl. [3]). Derjenige Teil dieser Theorie, der das invariante Differential nicht benützt, d. h. die Bestimmung der Tangenten —, bzw. Normalenvektoren ist auch in unserem allgemeinen metrischen Linienelementraum gültig, da der Unterschied bezüglich einer Finslerschen Metrik eben in dem Unterschied der invarianten Differentiale besteht. Wir stellen aber in diesem Paragraphen die wichtigsten Formeln der Tangenten- und Normalenvektoren zusammen.

Ein m-dimensionaler Unterraum $\mathfrak{U}_m$ $(m \geqq 2)$ ist durch die Gleichungen:

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^m) \qquad (m \geqq 2) \tag{2. 1}$$

definiert. Die Tangentenvektoren von $\mathfrak{U}_m$ sind die Vektoren

(2. 2) $$B^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m\,[2])$$

von denen wir annehmen, daß der Rang der durch B^i_α bestimmten Matrix: $\|B^i_\alpha\|$ gleich m ist. Die tangenten Linienelemente von $\mathfrak{U}_m$ sind durch die Formeln

(2. 3) $$v^i = B^i_\alpha \dot{u}^\alpha$$

festgelegt. Den Unterraum $\mathfrak{U}_m$ betrachten wir also im folgenden als eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$, deren Raumkomponenten durch (2.1) und (2. 3) angegeben sind.

Der metrische Grundtensor von $\mathfrak{U}_m$ ist durch die Formel

(2. 4) $$g_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \overset{\text{def}}{=} g_{ij}(x(u), B^k_\gamma \dot{u}^\gamma) B^i_\alpha B^j_\beta$$

definiert. Auf Grund von (2. 3) und (2. 4) folgt, daß in den Linienelementen von $\mathfrak{U}_m$

(2. 5) $$F(u, \dot{u}) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} = \sqrt{g_{ij} v^i v^j} = F(x, v)$$

besteht, d. h. die Grundfunktion von $\mathfrak{U}_m$ stimmt mit der des allgemeinen metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ überein.

Aus (2. 4) und (2. 5) folgt für den inneren Torsionstensor von $\mathfrak{U}_m$ die Formel:

$$A_{\alpha\beta\gamma} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} F \partial_{\dot{u}^\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F \partial_{v^k} g_{ij} B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma = A_{ijk} B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma,$$

d. h. $A_{\alpha\beta\gamma}$ ist die Projektion von A_{ijk} auf den Unterraum $\mathfrak{U}_m$. In der gewöhnlichen Weise definieren wir durch

$$g^{\alpha\beta}(u, \dot{u}) g_{\alpha\gamma}(u, \dot{u}) = \delta^\beta_\gamma$$

die kontravarianten Komponenten des metrischen Grundtensors $g_{\alpha\beta}$ von $\mathfrak{U}_m$ (δ^β_γ bedeutet das Kronecker-δ).

Neben den Vektoren B^i_α benützen wir noch die folgenden sogenannten Projektionsfaktoren von $\mathfrak{U}_m$:

$$B^\alpha_i \overset{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} g_{ij} B^j_\beta .$$

Die kontra- und kovarianten Normalenvektoren C^ϱ_i und C^i_ϱ wählen wir so, daß die folgenden Relationen gelten:

(2. 6) $$\begin{cases} \text{(a)}\quad B^i_\alpha B^\beta_i = \delta^\beta_\alpha, & \text{(b)}\quad B^\alpha_i C^i_\varrho = 0, \\ \text{(c)}\quad C^\varrho_i B^i_\alpha = 0, & \text{(d)}\quad C^i_\varrho C^\sigma_i = \delta^\sigma_\varrho, \\ \qquad \text{(e)}\quad B^i_\alpha B^\alpha_j + C^i_\varrho C^\varrho_j = \delta^i_j \end{cases}$$

---

[2]) Die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ werden immer die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ die Buchstaben ϱ, σ, τ die Zahlen $(m+1), \ldots, n$ bezeichnen. Die lateinischen Indizes bedeuten die Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

(vgl. [2] Formeln (13), oder [10] Kapitel 5, § 2). Man kann sogar die C_i^ϱ auf Grund von (2. 6) (c) wegen der Unabhängigkeit der B_α^i von den $\dot{u}^\alpha$ so bestimmen, daß

$$\partial_{\dot{u}^\alpha} C_i^\varrho = 0 \tag{2. 7}$$

sei (vgl. [2] Seite 22).

§ 3. Induziertes invariantes Differential

Die Mannigfaltigkeit der tangentialen Linienelemente eines m-dimensionalen Unterraumes $\mathfrak{U}_m$ ist durch die Gleichungen

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^m), \quad v^i = B_\alpha^i \dot{u}^\alpha \tag{3. 1}$$

festgelegt. Wenn nicht anders gesetzt wird, wollen wir im folgenden immer solche Linienelemente betrachten, die der Relationen (3. 1) genügen. Das invariante Differential eines tangentialen Vektors

$$\xi^i(x, v) = B_\alpha^i \xi^\alpha(u, \dot{u})$$

ist nach (1. 1) von der Form:

$$D\xi^i = \xi^\alpha dB_\alpha^i + B_\alpha^i d\xi^\alpha + M_j^{*i}{}_k B_\alpha^j \xi^\alpha \omega^k(d) + L_j^{*i}{}_k B_\alpha^j B_\beta^k \xi^\alpha du^\beta. \tag{3. 2}$$

Der Vektor $D\xi^i$ ist im allgemeinen kein Tangentenvektor von $\mathfrak{U}_m$; wir wollen nun den Vektor (3. 2) mit Hilfe des n-Beins B_α^i, C_ϱ^i bezüglich $\mathfrak{U}_m$ in tangentiale bzw. normale Komponenten zerlegen. Vor allem berechnen wir das invariante Differential von l^k. Nach (2. 5) und (3. 1) ist

$$l^k = \frac{v^k}{F} = B_\beta^k \frac{\dot{u}^\beta}{F} = B_\beta^k l^\beta,$$

und somit wird auf Grund von (1. 1a)

$$\omega^k(d) = (\delta_t^k + \overline{M}_o{}^k{}_t) B_\beta^t dl^\beta + (\delta_t^k + \overline{M}_o{}^k{}_t)(l^\beta B_{\beta\gamma}^t + L_o^{*t}{}_m B_\gamma^m)\, du^\gamma,$$

wo

$$B_{\beta\gamma}^t \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^t}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}, \quad \overline{M}_j{}^k{}_t \overset{\text{def}}{=} A_j{}^k{}_t + \mu_j{}^k{}_t \tag{3. 3}$$

bedeutet. Auf Grund von (2. 6) (e) wird

$$\omega^k(d) = (\delta_t^k + \overline{M}_o{}^k{}_t)(B_\beta^t \overset{*}{\omega}{}^\beta(d) + C_\varrho^t A_\gamma^\varrho du^\gamma), \tag{3. 4}$$

wo

$$\overset{*}{\omega}{}^\beta(d) \overset{\text{def}}{=} dl^\beta + (B_j^\beta B_{o\gamma}^j + L_o^{*\beta}{}_\gamma)\, du^\gamma, \quad B_{o\gamma}^j \overset{\text{def}}{=} B_{\alpha\gamma}^j l^\alpha \tag{3. 4a}$$

$$A_\gamma^\varrho \overset{\text{def}}{=} C_j^\varrho B_{o\gamma}^j + L_o^{*\varrho}{}_\gamma \tag{3. 4b}$$

bezeichnen; dabei bedeuten die griechischen Indizes, daß die entsprechenden Größen des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ mit den Projektionsvektoren überschieben sind. Es ist also:

$$L^{*\beta}_{o\ \gamma} \overset{\text{def}}{=} B^\beta_j B^k_\gamma L^{*j}_{o\ k}, \quad L^{*\varrho}_{o\ \gamma} \overset{\text{def}}{=} C^\varrho_j B^k_\gamma L^{*j}_{o\ k},$$
$$\beta, \gamma = 1, \ldots, m; \quad \varrho = m+1, \ldots, n.$$

Nach der Definitionsformel (1. 3) bekommt man auf Grund von (1. 5b):

$$M^{*i}_{j\ k}(\delta^k_t + \overline{M}_o{}^k{}_t) = \overline{M}_j{}^i{}_s J^{*s}_k(\delta^k_t + \overline{M}_o{}^k{}_t) = \overline{M}_j{}^i{}_t$$

und somit erhält man aus (3. 2) nach der Substitution von $\omega^k(d)$ aus (3. 4)

$$D\xi^i = B^i_\alpha d\xi^\alpha + \{dB^i_\alpha + \overline{M}_\alpha{}^i{}_\beta \overset{*}{\omega}{}^\beta + (\overline{M}_\alpha{}^i{}_\varrho \Lambda^\varrho_\beta + L^{*i}_{\alpha\ \beta})\, du^\beta\}\, \xi^\alpha \text{ [3]}. \tag{3. 5}$$

Beachten wir nun, daß

$$dB^i_\alpha = B^i_{\alpha\beta}\, du^\beta$$

ist, führen wir ferner Bezeichnung

$$\Lambda^{*\gamma}_{\alpha\ \beta} \overset{\text{def}}{=} B^\gamma_r B^r_{\alpha\beta} + \overline{M}_\alpha{}^\gamma{}_\varrho \Lambda^\varrho_\beta + L^{*\gamma}_{\alpha\ \beta} \tag{3. 6}$$

ein, so wird aus (3. 5) auf Grund der Relation (2. 6) (e):

$$D\xi^i = B^i_\gamma \overset{*}{D}\xi^\gamma + C^i_\sigma\{\overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\beta \overset{*}{\omega}{}^\beta + (C^\sigma_j B^j_{\alpha\beta} + \overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\varrho \Lambda^\varrho_\beta + L^{*\sigma}_{\alpha\ \beta})\, du^\beta\}\, \xi^\alpha \tag{3. 7}$$

mit

$$\overset{*}{D}\xi^\gamma = d\xi^\gamma + \overline{M}_\alpha{}^\gamma{}_\beta \xi^\alpha \overset{*}{\omega}{}^\beta(d) + \Lambda^{*\gamma}_{\alpha\ \beta} \xi^\alpha\, du^\beta. \tag{3. 8}$$

Die Formel (3. 7) gibt schon die Zerlegung des invarianten Differentials nach dem n-Bein B^i_γ, C^i_σ; $\overset{*}{\omega}{}^\beta$ ist aber im allgemeinen nicht das invariante Differential von l^β. Wir werden deshalb die Formeln (3. 7) und (3. 8) umformen und statt $\overset{*}{\omega}{}^\beta$ die Größe $\overset{*}{D}l^\beta$ einführen. Für $\xi^\gamma = l^\gamma$ folgt aus (3. 8)

$$\overset{*}{D}l^\gamma = dl^\gamma + \overline{M}_o{}^\gamma{}_\beta \overset{*}{\omega}{}^\beta(d) + \Lambda^{*\gamma}_{o\ \beta}\, du^\beta.$$

Eliminieren wir nun aus dieser Formel dl^γ mittels (3. 4a), so wird im Hinblick auf die Formel (3. 6):

$$\overset{*}{D}l^\gamma = (\delta^\gamma_\alpha + \overline{M}_o{}^\gamma{}_\alpha)\overset{*}{\omega}{}^\alpha(d) + \overline{M}_o{}^\gamma{}_\varrho \Lambda^\varrho_\beta\, du^\beta. \tag{3. 9}$$

Aus dieser Formel folgt, daß

$$\overset{*}{D}l^\alpha = \overset{*}{\omega}{}^\alpha(d)$$

besteht, falls $\overline{M}_o{}^\gamma{}_\alpha = 0$ ist. In diesem Falle hat schon das induzierte invariante Differential (3. 8) die gewünschte Form.

---

[3]) Unserer vorigen Bemerkung entsprechend ist

$$\overline{M}_\alpha{}^i{}_\varrho \overset{\text{def}}{=} B^j_\alpha C^k_\varrho \overline{M}_j{}^i{}_k.$$

Nehmen wir jetzt an, daß $\overline{M}_{o}{}^{\gamma}{}_{\alpha} \neq 0$ ist. In diesem Falle bedingen wir die Gültigkeit der Ungleichung

$$\mathrm{Det}\,(\delta_{\alpha}^{\gamma} + \overline{M}_{o}{}^{\gamma}{}_{\alpha}) \neq 0.$$

Das bedeutet aber, daß das Gleichungssystem

$$(3.10) \qquad (\delta_{\alpha}^{\gamma} + \overline{M}_{o}{}^{\gamma}{}_{\alpha})\theta_{\gamma}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

auf θ_{γ}^{β} eindeutig lösbar ist. Eine Überschiebung der Gleichung (3. 9) mit θ_{γ}^{β} ergibt nach (3. 10) $\overset{*}{\omega}{}^{\beta}(d)$, ausgedrückt durch $\overset{*}{D}l^{\beta}$. Substituieren wir das in (3. 7) und (3. 8), so bekommt man:

$$(3.11) \qquad D\xi^{i} = B_{\gamma}^{i}\overset{*}{D}\xi^{\gamma} + C_{\sigma}^{i}\{\overline{M}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}\theta_{\gamma}^{\beta}\overset{*}{D}l^{\gamma} + (B_{\alpha\gamma}^{\sigma} + \overline{M}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\varrho}A_{\gamma}^{\varrho} + L_{\alpha}^{*\sigma}{}_{\gamma} - \overline{M}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}\theta_{\delta}^{\beta}\overline{M}_{o}{}^{\delta}{}_{\varrho}A_{\gamma}^{\varrho})\,du^{\gamma}\}\,\xi^{\alpha}, \quad B_{\alpha\gamma}^{\sigma} \overset{\mathrm{def}}{=} C_{i}^{\sigma}B_{\alpha\gamma}^{i}, \text{ [4]}$$

$$(3.12) \qquad \overset{*}{D}\xi^{\gamma} = d\xi^{\gamma} + \overline{M}_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\delta}\theta_{\beta}^{\delta}\overset{*}{D}l^{\beta} + (A_{\alpha}^{*\gamma}{}_{\beta} - \overline{M}_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\delta}\theta_{\varepsilon}^{\delta}\overline{M}_{o}{}^{\varepsilon}{}_{\varrho}A_{\beta}^{\varrho})\xi^{\alpha}\,du^{\beta}.$$

Aus der Formel (3. 11) folgt leicht der folgende

Satz I. *Liegt die Linienelementfolge $(x^{i}(s), v^{i}(s))$ in dem Unterraum $\mathfrak{U}_{m}$ und ist der Tangentenvektor von $\mathfrak{U}_{m}$*

$$\xi^{i} = B_{\alpha}^{i}\xi^{\alpha}$$

längs dieser Linienelementfolge im Sinne der Raumübertragung „D" parallel verschoben, so ist auch ξ^{α} im Sinne der $\mathfrak{U}_{m}$-Übertragung „$\overset{*}{D}$" parallel verschoben.

Beweis. Aus der Bedingung

$$(3.13) \qquad D\xi^{i} = 0$$

folgt nach (3. 11)

$$B_{\gamma}^{i}\overset{*}{D}\xi^{\gamma} + C_{\sigma}^{i}\Phi^{\sigma}(\xi) = 0,$$

wo Φ^{σ} der entsprechende Koeffizient von C_{σ}^{i} in (3. 11) bedeutet. Eine Überschiebung unserer letzten Formel mit B_{i}^{α} ergibt nach (2. 6) (a) unmittelbar die Relation

$$(3.14) \qquad \overset{*}{D}\xi^{\alpha} = 0,$$

was unsere Behauptung beweist.

Bedeutet nun der Vektor

$$\xi^{i} \equiv \frac{dx^{i}}{ds} = B_{\alpha}^{i}\frac{du^{\alpha}}{ds}, \qquad \frac{du^{\alpha}}{ds} = \xi^{\alpha}$$

den Tangentenvektor einer autoparallelen Kurve des Raumes, d. h. (3. 13) ist gültig,

---

[4]) Auch bei den nicht-tensoriellen Größen $B_{\alpha\beta}$ bezeichnen wir durch den Index σ die Überschiebung mit C_{i}^{σ}. Es ist also

$$B_{\alpha\gamma}^{\sigma} \equiv C_{i}^{\sigma}\frac{\partial^{2}x^{i}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\gamma}}.$$

so folgt aus dem Satze I, daß auch (3. 14) gültig ist. Dies kann man im folgenden Korollar ausdrücken:

Korollar I. *Liegt eine autoparallele Kurve des Raumes $\mathfrak{L}_n$ im Unterraum $\mathfrak{U}_m$, so ist sie im Sinne der $\mathfrak{U}_m$-Übertragung „$\overset{*}{D}$" auch autoparallel.*

§ 4. Die zweite Grundform der Unterräume

Bezeichnen wir durch C eine Kurve in dem Unterraum $\mathfrak{U}_m$, und die Gleichungen von C seien durch

$$u^\alpha = u^\alpha(s), \quad \dot{u}^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} \equiv u'^\alpha$$

angegeben, wo der Parameter s die Bogenlänge bedeutet. In Raumkoordinaten sind die Gleichungen von C von der Form:

$$x^i = x^i(u(s)), \quad v^i = B^i_\alpha u'^\alpha = \frac{dx^i}{ds} \equiv x'^i.$$

Da der Parameter s die Bogenlänge bedeutet, gilt nach (2. 4):

$$g_{ij} v^i v^j = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = g_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta = 1. \tag{4. 1}$$

Wie in den Riemannschen und Finslerschen Räumen, folgt aus dieser Gleichung auch in unserem allgemeinen metrischen Linienelementraum, daß der Krümmungsvektor Dx'^i auf den Tangentenvektor x'^i orthogonal steht. Der erste Normalenvektor der Kurve C ist durch die verallgemeinerten Frenet-Formeln:

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} \equiv \frac{Dx'^i}{ds} = \varkappa \eta^i \tag{4. 2}$$

definiert, wo η^i der erste Normalenvektor und

$$\varkappa = \sqrt{g_{ij}(x(s), x'(s)) \frac{Dx'^i}{ds} \frac{Dx'^j}{ds}} \tag{4. 2a}$$

die erste Krümmung von C ist.

Bemerkung. Die Formeln (4. 2) und (4. 2a) sind für alle Raumkurven gültig und nicht nur für die Kurven von $\mathfrak{U}_m$. –

Für die Kurven von $\mathfrak{U}_m$ gilt nun

$$\frac{dx^i}{ds} C^\varrho_i = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung nach s, so wird auf Grund von $ds = Ds$, (was aber nur für Invarianten gültig ist):

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} C^\varrho_i + \frac{dx^i}{ds} \frac{DC^\varrho_i}{ds} = 0.$$

Auf Grund von (4. 2) wird nun nach der Bezeichnung:

$$\cos\varphi_\varrho \overset{\text{def}}{=} \eta^i C_i^\varrho$$

die Relation

(4. 3) $$\varkappa\cos\varphi_\varrho + B_\alpha^i \frac{DC_i^\varrho}{ds}\frac{du^\alpha}{ds} = 0$$

bestehen. Differenziert man nun die Gleichung (2. 6) (c) invariant nach s, so wird

$$B_\alpha^i \frac{DC_i^\varrho}{ds} = -C_i^\varrho \frac{DB_\alpha^i}{ds}$$

und aus (4. 3) erhält man

(4. 4) $$\varkappa_\varrho \overset{\text{def}}{=} \varkappa\cos\varphi_\varrho = C_i^\varrho \frac{DB_\alpha^i}{ds}\frac{du^\alpha}{ds}, \qquad (\varrho = m+1, \ldots, n).$$

Ist $\varphi_\varrho = 0$, so gibt (4. 4) die zum Normalenvektor C_i^ϱ gehörige Normalkrümmung in der Richtung u'^α.

Nehmen wir an, daß die Kurve C eine autoparallele Kurve im Sinne der „$\overset{*}{D}$"-Übertragung von $\mathfrak{U}_m$ ist, d. h. es ist nach (3. 14)

(4. 5) $$\overset{*}{D} l^\alpha = 0, \quad l^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}.$$

Aus (3. 9) folgt nun nach einer Überschiebung mit θ_γ^β nach (3. 10)

$$\overset{*}{\omega}{}^\beta(d) = -\theta_\gamma^\beta \overline{M}_o{}^\gamma{}_\varrho A_\alpha^\varrho \frac{du^\alpha}{ds}$$

und nach (3. 4):

(4. 6) $$\omega^k(d) = -(B_\beta^k + \overline{M}_o{}^k{}_\beta)\theta_\gamma^\beta \overline{M}_o{}^\gamma{}_\varrho A_\alpha^\varrho \frac{du^\alpha}{ds} + (C_\varrho^k + \overline{M}_o{}^k{}_\varrho) A_\alpha^\varrho \frac{du^\alpha}{ds}.$$

Berechnen wir nun DB_α^i mittels der Formel (1. 1), beachten wir ferner, daß nach (1. 3) und (1. 5b) die Relationen

$$M_j^{*i}{}_k(B_\beta^k + \overline{M}_o{}^k{}_\beta) = \overline{M}_j{}^i{}_t J_k^{*t} B_\beta^r(\delta_r^k + \overline{M}_o{}^k{}_r) = \overline{M}_j{}^i{}_\beta$$
$$M_j^{*i}{}_k(C_\varrho^k + \overline{M}_o{}^k{}_\varrho) = \overline{M}_j{}^i{}_t J_k^{*t} C_\varrho^s(\delta_s^k + \overline{M}_o{}^k{}_s) = \overline{M}_j{}^i{}_\varrho.$$

bestehen, so wird nach (4. 6)

$$DB_\alpha^i = \{B_{\alpha\beta}^i + L_\alpha^{*i}{}_\beta - \overline{M}_\alpha{}^i{}_\gamma \theta_\delta^\gamma \overline{M}_o{}^\delta{}_\sigma A_\beta^\sigma + \overline{M}_\alpha{}^i{}_\sigma A_\beta^\sigma\}\, du^\beta.$$

Substituiert man das in die Formel (4. 4), so wird:

(4. 7) $$\varkappa_\varrho = \Omega_{\alpha\beta}^{(\varrho)} \frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}$$

bestehen, mit

(4. 7a) $$\Omega_{\alpha\beta}^{(\varrho)} \overset{\text{def}}{=} B_{\alpha\beta}^\varrho + L_\alpha^{*\varrho}{}_\beta - (\overline{M}_\alpha{}^\varrho{}_\gamma \theta_\delta^\gamma \overline{M}_o{}^\delta{}_\sigma - \overline{M}_\alpha{}^\varrho{}_\sigma) A_\beta^\sigma.$$

Offenbar ist in einem allgemeinen $\mathfrak{L}_n$-Raum $\Omega^{(\varrho)}_{\alpha\beta} \neq \Omega^{(\varrho)}_{\beta\alpha}$. (4. 7a) bestimmt die Koeffizienten der zweiten Grundform des Unterraumes $\mathfrak{U}_m$.

Mit Hilfe von (4. 7a) kann nun (3. 11) in der Form:

$$D\xi^i = B^i_\gamma \overset{*}{D}\xi^\gamma + C^i_\sigma \{\overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\beta \theta^\beta_\gamma \overset{*}{D} l^\gamma + \Omega^{(\sigma)}_{\alpha\beta}\, du^\beta\}\, \xi^\alpha \tag{4. 8}$$

angegeben werden, die in folgenden eine sehr wichtige Rolle spielen wird.

Eine Überschiebung mit B^δ_i gibt nach (2. 6) (a), (b) die Relation:

$$\overset{*}{D}\xi^\delta = B^\delta_i D\xi^i. \tag{4. 9}$$

§ 5. Bemerkungen über die Dupinsche Indikatrix

Es sei in diesem Paragraphen $m = n - 1$. $\mathfrak{U}_{n-1}$ ist jetzt eine Hyperfläche des allgemeinen metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$. Die Formeln (4. 7) und (4. 7a) bestehen in diesem Falle je aus einer Gleichung, da jetzt nur $\varrho, \sigma = n$ gelten kann. Es ist

$$\varkappa \equiv \frac{1}{r} = \Omega_{\alpha\beta}(u, u')u'^\alpha u'^\beta, \tag{5. 1}$$

mit

$$\Omega_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} C_i\big(B^i_{\alpha\beta} + L^{*i}_{\alpha\ \beta} - (\overline{M}_\alpha{}^i{}_\gamma \theta^\gamma_\delta \overline{M}_o{}^\delta{}_\sigma - \overline{M}_\alpha{}^i{}_\sigma) A^\sigma_\beta\big), \tag{5. 1a}$$

wo der Normalenvektor C_i und die Größen $B^i_{\alpha\beta}$ von den u'^α unabhängig sind (vgl. die Formeln (2. 2) und (2. 7)).

Da $\Omega_{\alpha\beta}$ in den u'^α homogen von nullter Ordnung ist, bekommt man aus (5. 1) nach einer zuläßigen Parametertransformation $s = s(t)$

$$\frac{1}{r} = \frac{\Omega_{\alpha\beta}(u, \dot{u})\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\alpha\beta}(u, \dot{u})\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}, \tag{5. 2}$$

wo für $\dot{u}^\alpha, u'^\alpha$ die Relation

$$u'^\alpha = \frac{\dot{u}^\alpha}{\sqrt{g_{\gamma\beta}(u, \dot{u})\dot{u}^\gamma \dot{u}^\beta}}$$

gilt. Die Formel (5. 2) ist im wesentlichen mit (5. 1) identisch, nur der Parameter t ist in (5. 2) beliebig.

Durch die Gleichung

$$\Omega_{\alpha\beta}(u, \dot{u})\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 1, \tag{5. 3}$$

in der die $\dot{u}^\alpha$ die Veränderlichen sind, ist eine $(n-2)$-dimensionale Hyperfläche bestimmt, die als Dupinsche Indikatrix von $\mathfrak{U}_{n-1}$ betrachtet werden kann. Auf Grund von (5. 3) sind nun die Extremalrichtungen von (5. 2) mit den Extremalrichtungen von

$$g_{\alpha\beta}(u, \dot{u})\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \tag{5. 4}$$

identisch (vgl. [9] § 3 auf S. 494, oder [10] Kapitel V., § 7 auf S. 196).

Die Extremalwerte von (5. 4) mit den Nebenbedingungen (5. 3) erhält man aus dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{u}^\gamma}\left(g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \lambda(\Omega_{(\alpha\beta)}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta - 1)\right) = 0, \tag{5. 5}$$

da (5. 3) offenbar nur den symmetrischen Teil von $\Omega_{\alpha\beta}$ enthält. Aus (5. 5) bekommt man

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma} + \lambda \frac{\partial \Omega_{(\alpha\beta)}}{\partial \dot{u}^\gamma}\right)\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + 2(g_{\gamma\beta} + \lambda\Omega_{(\gamma\beta)})\dot{u}^\beta = 0. \tag{5. 6}$$

Eine Überschiebung von (5. 6) mit $\dot{u}^\gamma$ gibt wegen der Homogenität nullter Ordnung von $g_{\alpha\beta}$ und $\Omega_{\alpha\beta}$ in den $\dot{u}^\alpha$:

$$(g_{\gamma\beta} + \lambda\Omega_{\gamma\beta})\dot{u}^\gamma\dot{u}^\beta = 0 \tag{5. 7}$$

und ein Vergleich mit (5. 2) zeigt, daß $\lambda = -r$ ist. Setzen wir das in (5. 6) ein, so bekommt man den

Satz II. *Die Hauptrichtungen der Hyperfläche $\mathfrak{U}_{n-1}$ sind die Lösungen des Gleichungssystems*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma} - r \frac{\partial \Omega_{(\alpha\beta)}}{\partial \dot{u}^\gamma}\right)\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + (g_{\gamma\beta} - r\Omega_{(\gamma\beta)})\dot{u}^\beta = 0 \tag{5. 8}$$

wo r die entsprechenden Hauptkrümmungsradien bezeichnet.

Aus der Formel (5. 8) folgt im Hinblick auf die Gleichungen (3. 6) von [9] das

Korollar II. *Ein zum Finslerschen Fall analoger Fall entsteht für die Bestimmung der Hauptrichtungen, falls*

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta = 0 \tag{5. 9}$$

sind.

Beweis: Die Gleichung (3. 6) von [9] ist in unserer Schreibweise

$$g_{\alpha\beta}u'^\alpha = r\Omega_{\alpha\beta}u'^\alpha,$$

woraus nach (5. 8) und (5. 9) die Behauptung unmittelbar folgt. (Im Finslerschen Fall ist $\Omega_{\alpha\beta}$ in α, β symmetrisch).

II. TEIL

DIE AUTOPARALLELE ABWEICHUNG

§ 6. Gleichung der autoparallelen Abweichung

Es sei O ein Punkt des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ durch den eine Schar autoparalleler Kurven geht. Nehmen wir an, daß diese Schar autoparalleler Kurven auf einem zweidimensionalen sogenannten „autoparallelen Unterraum $\mathfrak{U}_2$ mit dem Pol

O" liegt. Diese $\mathfrak{U}_2$ hat also die charakteristische Eigenschaft, daß die autoparallelen Kurven von $\mathfrak{U}_2$ durch den Punkt O, auch im Sinne der „D"-Übertragung des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ autoparallel sind. Diese Eigenschaft beschränkt zwar den Unterraum $\mathfrak{U}_2$, doch ist dadurch $\mathfrak{U}_2$ offenbar noch nicht festgelegt.

C und $\bar{C}$ seien nun zwei unendlich benachbarte Kurven dieser Schar. Das bedeutet das folgende: Es sei die Gleichung von C bzw. $\bar{C}$ durch

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+L^{*i}_{j\ k}(x,x')\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0,\quad x'^i\equiv\frac{dx^i}{ds}$$

bzw.

$$\frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2}+L^{*i}_{j\ k}(\psi,\psi')\frac{d\psi^j}{d\sigma}\frac{d\psi^k}{d\sigma}=0,\quad \psi'^i\equiv\frac{d\psi^i}{d\sigma}$$

angegeben, wo s, bzw. σ die von O gerechnete Bogenlänge auf C bzw. $\bar{C}$ bedeutet. Die Punkte von C und $\bar{C}$ seien durch die Formeln

$$\psi^i(\sigma)=x^i(s)+\xi^i(s),\quad \xi^i(0)=0$$

zueinander geordnet, wo $\xi^i(s)$ einen infinitesimalen Vektor bedeutet. Die Parameterwerte s und σ sollen der Relationen

$$\frac{d\sigma}{ds}=1+\lambda(s),\qquad \lambda(0)=0$$

genügen, wo $\lambda(s)$ eine infinitesimale Größe von derselben Ordnung wie $\xi^i(s)$ ist (vgl. [5] § 3).

Der Vektor ξ^i genügt der Gleichung

$$\text{(6. 1)}\qquad \frac{D^2\xi^i}{ds^2}+\frac{d\lambda}{ds}\frac{dx^i}{ds}+\left(2\Omega^{*i}_{o\ k}+L^{*i}_{j\ t}\|_k l^j l^t\right)\frac{D\xi^k}{ds}+$$
$$+\left(2L^{*i}_{j\ k}\|_t l^j l^k\Omega^{*t}_{o\ m}+\bar{R}_{o\ om}^{\ i}+2\Omega^{*i}_{o\ m}|_o\right)\xi^m=0,$$

die die Gleichung der autoparallelen Abweichung ist (vgl. [5], Formel (3. 7)). Der Tensor $\Omega^{*i}_{j\ k}$ ist der schiefsymmetrische Teil von $L^{*i}_{j\ k}$, der Tensor $\bar{R}_{j\ km}^{\ i}$ ist der Hauptkrümmungstensor (vgl. [5] (1. 12)), die Operation $\|_t$ bedeutet die partielle Ableitung nach v^t multipliziert mit $F(x,v)$, endlich ist die Operation $|_k$ die kovariante Ableitung gebildet durch die $L^{*i}_{j\ k}$.

In unserer Arbeit [5] haben wir weiterhin bedingt, daß der allgemeine metrische Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ zweidimensional sei und wir bestimmten unter dieser Bedingung eine skalare Form von (6. 1). Jetzt werden wir im folgenden eine skalare Form von (6. 1) ohne Beschränkung der Dimensionszahl herleiten.

Der Vektor ξ^i bestimmen wir auf die Weise, daß

$$\text{(6. 2)}\qquad l_i\xi^i\equiv g_{ik}l^k\xi^i=0,\qquad l^k=\frac{dx^k}{ds}$$

gültig sei. Da C eine autoparallele Kurve ist, hat man

$$\text{(6. 3)}\qquad Dl_i=0,\quad \omega^i(d)\equiv Dl^i=0$$

(vgl. z. B. [4] (5. 5) und (5. 5a)). Durch Ableitung nach s bekommt man aus (6. 2):

(6. 4) $$l_i \frac{D\xi^i}{ds} = 0.$$

Bezeichnen wir jetzt durch ξ die Länge des Vektors ξ^i, und durch X^i den Einheitsvektor, der die Richtung von ξ^i hat, d. h. es ist längs C

(6. 5) $$\xi^i = \xi X^i, \quad \xi \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}$$

(6. 6) $$g_{ik} X^i X^k = 1.$$

Differenzieren wir (6. 5) invariant nach s, beachten wir ferner, daß für Skalaren $\frac{d}{ds} = \frac{D}{ds}$ ist, so wird

$$\frac{D\xi^i}{ds} = \xi \frac{DX^i}{ds} + X^i \frac{d\xi}{ds}.$$

Eine Überschiebung mit l_i gibt nun auf Grund von (6. 2) und (6. 4) die Relation

(6. 7) $$l_i \frac{DX^i}{ds} \equiv g_{ik} l^k \frac{DX^i}{ds} = 0.$$

Da aus (6. 6) nach invarianter Ableitung nach s auch

(6. 8) $$g_{ik} X^k \frac{DX^i}{ds} = 0$$

folgt, steht der Vektor $\frac{DX^i}{ds}$ zu den Vektoren l^i und X^i orthogonal.

Betrachten wir nun den autoparallelen Unterraum $\mathfrak{U}_2$ mit dem Pol O, der C und $\bar{C}$ enthält und dessen autoparallelen Kurven durch O auch im Sinne der „D"-Übertragung des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ autoparallel sind. Zwei linear unabhängige Tangentenvektoren von $\mathfrak{U}_2$ sind:

(6. 9) $$l^i = B^i_\alpha l^\alpha, \quad X^i = B^i_\alpha X^\alpha.$$

(In diesem zweiten Teil soll $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ immer die Zahlen 1, 2 und ϱ, σ, τ die Zahlen: 3, 4, ..., n durchlaufen. Die lateinischen Indizes durchlaufen, wie vorher, die Zahlen 1, 2, ..., n). Da $\frac{DX^i}{ds}$ zu den Flächenvektoren (6. 9) — wie das schon bemerkt wurde — orthogonal steht, ist er eine Linearkombination der Normalvektoren C^i_σ von $\mathfrak{U}_2$.

Verwenden wir also die Formel (4. 8) auf X^i, beachten wir ferner, daß wegen der Autoparallelität nach Korollar I. $\overset{*}{D} l^\alpha = 0$ ist, so wird

(6. 10) $$\frac{DX^i}{ds} = C^i_\sigma \Omega^{(\sigma)}_{\alpha\beta} X^\alpha \frac{du^\beta}{ds},$$

wo $\Omega^{(\sigma)}_{\alpha\beta}$ die Koeffizienten der zum $\mathfrak{U}_2$ gehörigen zweiten Grundform bedeuten. Aus (4. 9) folgt noch im Hinblick auf (6. 10):

$$\frac{\overset{*}{D} X^\alpha}{ds} = 0, \tag{6.10a}$$

d. h. der Vektor X^α ist längs C im Sinne der „$\overset{*}{D}$"-Übertragung parallel verschoben.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der skalaren Form der Gleichung (6. 1) der autoparallelen Abweichung über. Aus (6. 8) folgt nach einer invarianten Ableitung nach s:

$$X_i \frac{D^2 X^i}{ds^2} = -g_{ik} \frac{DX^i}{ds} \frac{DX^k}{ds}, \qquad X_i \overset{\text{def}}{=} g_{ij} X^j.$$

Im Hinblick auf (6. 10) wird:

$$X_i \frac{D^2 X^i}{ds^2} = -\frac{1}{R_X^2} \tag{6.11}$$

mit der zum X^α gehörigen assoziierten Krümmung

$$\frac{1}{R_X} = \sqrt{g_{ik} C^i_\varrho C^k_\sigma \Omega^{(\varrho)}_{\alpha\beta} \Omega^{(\sigma)}_{\gamma\delta} X^\alpha X^\gamma \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\delta}{ds}} \text{ [5]}. \tag{6.11a}$$

Substituieren wir nun ξ^i von der Gleichung (6. 5) in (6. 1), überschieben wir dann die erhaltene Relation mit X_i, beachten wir dann (6. 2), (6. 5), (6. 6) und (6. 11), so wird:

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} + \Gamma^* \frac{d\xi}{ds} + \left(R^* - \frac{1}{R_X^2} \right) \xi = 0, \tag{6.12}$$

wo Γ^* und R^* durch (3. 16a) und (3. 16b) von [5] angegeben sind, d. h. es ist:

$$\Gamma^*(x, x', X) \overset{\text{def}}{=} L^{*i}_{j\ t}\|_k l^j l^t X_i X^k + 2\Omega^*_{oik} X^i X^k,$$

$$R^*(x, x', X) \overset{\text{def}}{=} (\bar{R}_{oioj} + 2\Omega^*_{oij}|_o) X^i X^j + 2L^{*i}_{j\ t}\|_k \Omega^{*k}_{o\ r} l^i l^t X_i X^r.$$

Die Gleichung (6. 12) *ist die invariante Form der autoparallelen Abweichung, die im n-dimensionalen Fall auch von den durch O gehenden vorgegebenen autoparallelen* $\mathfrak{U}_2$ *abhängt.*

Die Abhängigkeit von $\mathfrak{U}_2$ kommt in der Existenz des Gliedes $\frac{1}{R_X^2}$ zum Ausdruck.

Für die durch (6. 11a) angegebene Größe kann die folgende geometrische Deutung gegeben werden: Es sei C^* eine Kurve durch dem Punkte O und mit den Gleichungen

$$x^{*i} = x^{*i}(s)$$

[5]) Die Summation über ϱ, σ geht selbstverständlich von 3 bis n.

die aber auf das Richtungsfeld $v^i(s)$ von C bezogen ist. C^* ist also nicht die Mannigfaltigkeit ihrer tangenten Linienelemente, z. B. ist die Bogenlänge von C^*:

$$\sigma^* = \int_0^{s_0} \left(g_{ij}(x^*(s), v(s)) \frac{dx^{*i}}{ds} \frac{dx^{*j}}{ds}\right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Der Punkt O soll den Parameterwert $s=0$ representieren und im Punkte O sollen für den Tangentenvektor von C^* die Formeln

$$\text{(6. 13)} \qquad \left.\frac{dx^{*i}}{ds}\right|_{s=0} = X^i(0). \quad \left.\frac{D^2 x^{*i}}{ds^2}\right|_{s=0} = \left.\frac{DX^i}{ds}\right|_{s=0}$$

bestehen. C^* ist also zu C orthogonal. Verwenden wir nun auf C^* die Formeln (4. 2), so wird nach (6. 13):

$$\text{(6. 14)} \qquad \left.\frac{DX^i}{ds}\right|_{s=0} = \frac{1}{R^*} \eta_i^*(x^*, v)\bigg|_{s=0}.$$

Aus dieser Formel folgt nun, daß

$$\left.\frac{1}{R^*}\right|_{s=0} = \left(g_{ij}(x^* v) \frac{DX^i}{ds} \frac{DX^j}{ds}\right)^{\frac{1}{2}}\bigg|_{s=0}$$

ist. Auf Grund der Formeln (6. 10) und (6. 11a) folgt wegen $x^{*i}(0) = x^i(0)$:

$$\left.\frac{1}{R^*}\right|_{s=0} = \left.\frac{1}{R_X}\right|_{s=0}.$$

$\dfrac{1}{R_X}$ ist also im Punkte O die erste Krümmung von C^*.

§ 7. Über die Existenz der Hüllkurve der autoparallelen Kurven

Ein Kriterium für die Existenz der Hüllkurve der aus einem Punkte O ausgehenden autoparallelen Kurven kann auf Grund der Gleichung (6. 12) ebenso abgeleitet werden, wie im Paragraphen 4 unseres Aufsatzes [5]. Ist $\xi(s)$ die Lösung von (6. 12) mit $\xi(0)=0$, so schneiden sich die unendlich benachbarten autoparallelen Kurven außer in ihrem Ausgangspunkt O dann und nur dann, falls noch für ein $s_0 \neq 0$, $\xi(s_0)=0$ ist. Es ist nämlich nach (6. 5) in diesem Falle auch $\xi^i(s_0)=0$, und somit wird für einen geeigneten Parameterwert σ_0:

$$\text{(7. 1)} \qquad \psi^i(\sigma_0) \equiv x^i(s_0) + \xi^i(s_0) = x^i(s_0).$$

Nach der Transformation

$$\text{(7. 2)} \qquad \xi(s) = e^{-\frac{1}{2}\int \Gamma^* ds} \eta(s)$$

geht (6. 12) in

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + \left(R^* - \frac{1}{R_X^2} - \frac{1}{2}\frac{d\Gamma^*}{ds} - \frac{1}{4}\Gamma^{*2}\right)\eta = 0$$

über. Offenbar stimmen die Nullstellen von $\xi(s)$ und $\eta(s)$ überein. Unsere letzte Formel ist vollständig analog zur Formel (4. 2) unseres Aufsatzes [5], nur der Koeffizient von η ist verschieden. Dementsprechend gilt jetzt der folgende

Satz III. *Besteht für den Skalar*

$$K\left(x, \frac{dx}{ds}\right) \stackrel{\text{def}}{=} R^* - \frac{1}{R_X^2} - \frac{1}{2}\frac{d\Gamma^*}{ds} - \frac{1}{4}\Gamma^{*2} \tag{7. 3}$$

längs jeder autoparallelen Linie C: $x^i = x^i(s)$ *die Ungleichung*

$$K\left(x, \frac{dx}{ds}\right) > \frac{1}{A^2}, \quad A = konst \neq 0, \tag{7. 4}$$

so haben die durch den Punkt O gehenden und auf einem $\mathfrak{U}_2$ *liegenden autoparallelen Kurven eine Hüllkurve.*

Beweis. Ebenso wie im Beweis des Satzes 4 unserer Arbeit [5] (vgl. [5], Seite 115—116) kann gezeigt werden, daß aus der Bedingung (7. 4) die Existenz eines Parameterwertes $s_0 < \pi A$ folgt, für den $\eta(s_0) = 0$, und es wird somit auf Grund von (7. 2) und (6. 5) auch (7. 1) bestehen. Die unendlich benachbarten Kurven C und $\bar{C}$ schneiden sich also außer $x^i(0)$ im Punkte $x^i(s_0)$.

Nun bilden die durch O gehenden und auf $\mathfrak{U}_2$ liegenden autoparallelen Kurven eine einparametrige Kurvenschar, wie das aus der charakteristischen Differentialgleichung der autoparallelen Kurven gefolgert werden kann[6]). Aus der Theorie der einparametrigen Kurvenscharen ist nun bekannt, daß wenn der Limespunkt der Schnittpunkte sich schneidenden unendlich benachbarten Kurven C und $\bar{C}$, falls $\bar{C} \to C$, existiert, liegt immer auf der Hüllkurve. Die Hüllkurve besteht dann eben aus diesen Limespunkten, falls C die durch O gehenden Kurven auf $\mathfrak{U}_2$ durchläuft; die Existenz des Limespunktes auf C ist wegen $s_0 < \pi A$ gesichert. (Vgl. [11] Kapitel VIII. insbesondere S. 44—47.). Die Hüllkurve kann selbstverständlich auch ausgeartet sein, z. B.: sie kann auch ein Punkt sein, nämlich der Punkt $x^i(s_0)$. Damit haben wir den Satz III. bewiesen.

Zum Schluß wollen wir nochmals darauf hinweisen, daß die Hüllkurve, für deren Existenz wir eine Bedingung bestimmt haben, im allgemeinen von dem gewählten autoparallelen Unterraum $\mathfrak{U}_2$ abhängig ist. Das zeigt sich auch in der Bedingung (7. 4), da der Skalar K nach (7. 3) auch von $\frac{1}{R_X}$ abhängig ist. Die Hüllkurve selbst liegt auch auf $\mathfrak{U}_2$.

Haben die von O ausgehenden autoparallelen Kurven eine Hüllfläche, so ist die auf $\mathfrak{U}_2$ liegende Hüllkurve offenbar eben den Schnitt der Hüllfläche mit $\mathfrak{U}_2$. Daraus folgt die Richtigkeit des folgenden Korollars:

Korollar III. *Ist die Ungleichung* (7. 4) *für jeden autoparallelen Unterraum* $\mathfrak{U}_2$ *der den Pol O hat, richtig, so haben die durch O gehenden autoparallelen Kurven eine Hüllfläche.*

---

[6]) Ein Punkt und eine Richtung bestimmt eine autoparallele Kurve C; die Richtung bestimmt aber jetzt nur einen Parameter, da C auf dem zweidimensionalen Unterraum $\mathfrak{U}_2$ liegt.

Literatur

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. I. dritte, erweiterte Auflage (Berlin, 1930).
[2] E. T. Davies, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **49** (1947), 19–39.
[3] S. Kikuchi, On the theory of subspace in a Finsler space, *Tensor*, (new series) **2** (1952), 67–79.
[4] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 85–120.
[5] A. Moór, Über die autoparallele Abweichung in allgemeinen metrischen Linienelementräumen, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1957), 102–118.
[6] A. Moór, Eine Verallgemeinerung der metrischen Übertragung in allgemeinen metrischen Räumen, *Publ. Math. Debrecen*, **10** (1963), 145–150.
[7] S. B. Myers, Riemannian manifolds in the large, *Duke Math. J.* **1** (1935), 39–49.
[8] H. Rund, The scalar form of Jacobi's equations in the calculus of variations, *Annali di Math.*, (4) **35** (1953), 183–202.
[9] H. Rund, Hypersurfaces of a Finsler space, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 487–503.
[10] H. Rund, *The differential geometry of Finsler spaces*. (Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959).
[11] G. Julia, *Cours de géométrie infinitésimale*. Troisième fascicule. Deuxième édition entièrement refondue (Paris, 1955).

(Eingegangen am 16. April 1964)