Über Konvergenz- und Summationseigenschaften von Haarschen Reihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Herrn Professor László Kalmár zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Im Falle $\Sigma a_n^2 < \infty$ konvergiert die Haarsche Reihe[1])

$$(1) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m} b_m^{(k)} \chi_m^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

bekanntlich fast überall. Für den Fall $\Sigma a_n^2 = \infty$ gelten dagegen die folgenden Sätze:

Satz I. *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$ und ist die Folge $\{|a_n|\}$ monoton nichtwachsend, so divergiert die Haarsche Reihe* (1) *fast überall.*[1a])

Satz II. *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$, so existiert ein System $\{h_n(x)\}$ vom Haarschen Typ*[2]), *für welches die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x)$$

fast überall divergiert.

Ähnliche Behauptungen gelten für das Rademachersche System; man bemerke aber, daß das Haarsche System „besser" als das Rademachersche System ist, da die Lebesgueschen Funktionen des Haarschen Systems beschränkt sind. Wenn wir die Beschränktheit der Lebesgueschen Funktionen in Betracht nehmen, können wir einen Satz von K. TANDORI [7] auf Grund des Satzes I folgenderweise verallgemeinern:

Satz III. *Ist $\{\lambda_n\}$ eine positive, nichtabnehmende Zahlenfolge mit $\lambda_n = O(\log^2 n)$, so existiert ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{f_n(x)\}$ mit den*

[1a]) Während der Drucklegung unserer Arbeit erschien ein Aufsatz von P. L. Uljanov (П. Л. Ульянов, О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами, *Известия АН СССР*, **28** (1964), 925—950) in welchem mehrere Sätze über das Haarsche System bewiesen sind, die unseren Satz I und teils den Satz IV enthalten.

[1]) Siehe [1] S. 48.

[2]) Ein im Intervall (0, 1) orthonormiertes Funktionensystem $\{h_n(x)\}$ ist vom Haarschen Typ, wenn für jedes Indexpaar m, n mit $m \neq n$ und $2^k < m, n \leqq 2^{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ gilt: $h_n(x) h_m(x) = 0$ überall in $(0, 1)$.

folgenden Eigenschaften: es gilt in (a, b) $L_n(x) = O(\lambda_n)$[3]) *und für jede positive Zahlenfolge* $\{w_n\}$ *mit* $w_n = o(\lambda_n)$ *gibt es eine Koeffizientenfolge* $\{c_n\}$ *mit konvergentem* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w_n$ *und fast überall divergentem* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$.[4])

Der folgende Satz bezieht sich auf $|C, \alpha|$-Summierbarkeit. Man sagt, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad (\Sigma c_n^2 < \infty) \tag{2}$$

sei an der Stelle x $|C, \alpha|$-summierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)| < \infty$$

gilt, wobei $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ das n-te (C, α)-Mittel der Reihe (2) bezeichnet $(\alpha > -1)$.

Satz IV. *Damit die Haarsche Reihe* (1) *mit einer im Absolutbetrag monoton nichtwachsenden Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *im Intervall* $(0, 1)$ *fast überall* $|C, \alpha|$*-summierbar ist, ist im Falle* $\alpha \geqq 0$ *die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty, \quad A_n = \left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k^2 \right)^{1/2} \tag{3}$$

und im Falle $-1 < \alpha < 0$ *die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} A_n < \infty \tag{4}$$

notwendig und hinreichend.

Tandori [6] hat bewiesen, daß die Bedingung (3) notwendig und hinreichend ist, damit die Reihe (2) für *jedes* orthonormierte Funktionensystem $|C, 1|$-summierbar ist. Danach hat der Verfasser [4] bewiesen, daß die Bedingung (3) bzw. (4) auch ohne Monotonie von $\{|a_n|\}$ die $|C, \alpha \geqq 0|$ bzw. $|C, \alpha \leqq 0|$-Summierbarkeit für jedes System vom Haarschen Typ sichert. P. Billard [2] hat nach der Erscheinung der Arbeit von Tandori bewiesen, daß die Rademachersche Reihe $\Sigma a_n r_n(x)$ auch dann nicht fast überall $|C, 1|$-summierbar ist, wenn die Bedingung (3) nicht erfüllt ist.

F. Móricz fragt in seiner Arbeit [5], ob die Bedingung (3) für eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ notwendig dafür ist, daß die Haarsche Reihe (1) (welche „besser" als die Rademachersche Reihe ist) fast überall $|C, 1|$-summierbar ist?

Der Satz IV gibt u. a. eine bejahende Antwort auf diese Frage.

Ferner sieht man, daß gewisse Sätze über Systeme vom Haarschen Typ, laut deren eine Bedingung für das Erfülltsein einer gewissen Konvergenz- bzw. Summationseigenschaft für die Gesamtheit der Systeme vom Haarschen Typ notwendig ist, für das Haarsche System selber gelten, wenn nur die Folge $\{|a_n|\}$ monoton ist. Und es gilt auch umgekehrt: Sätze, die behaupten, daß eine Bedingung unter der

[3]) $L_n(x)$ bezeichnet die n-te Lebesguesche Funktion von $\{f_n(x)\}$.

[4]) Im Satz von Tandori wird noch die Bedingung $\lambda_n \to \infty$ gestellt.

Monotonität der Folge $\{|a_n|\}$ für das Erfülltsein einer gewissen Konvergenz- bzw. Summationseigenschaft des Haarschen Systems notwendig ist, gelten ohne die Monotonität von $\{|a_n|\}$ nur für die Gesamtheit der Systeme vom Haarschen Typ.

§ 1. Beweis von Satz I

Wir nehmen an, daß die Reihe (1) mit einer monoton nichtwachsenden Folge $\{|a_n|\}$ auf einer Menge von positivem Maß konvergiert. Das bedeutet nach dem Egoroffschen Satz, daß es eine Menge E vom Maß $\mu(E)>0$ gibt, auf welcher die Partialsummen $s_n(x)$ die Eigenschaft

$$|s_{2^m}(x)-s_{2^n}(x)| \leqq K_1 \qquad (m>n)$$

haben, wo K_1 eine geeignete absolute Konstante ist. Daraus folgt

$$\mu(E)K_1^2 \geqq \int_E \left(\sum_{k=2^n+1}^{2^m} a_k\chi_k(x)\right)^2 dx \geqq \tag{1. 1}$$

$$\geqq \mu(E)\sum_{k=n}^{m-1} 2^k a_{2^k+1}^2 - 2\left|\sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k \sum_{l=k+1}^{2^m} a_l \int_E \chi_k(x)\chi_l(x)\,dx\right|.$$

Bezeichne $I(k,p)$ die Menge der ganzen Zahlen l mit $k<l\leqq p$ und mit $\chi_k(x)\chi_l(x)\neq 0$ auf einer Menge von positivem Maß. Es ist klar, daß die letzte Doppelsumme in (1. 1) gleich

$$\left|\sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k \sum_{l\in I(k,2^m)} a_l \int_E \chi_k(x)\chi_l(x)\,dx\right|$$

ist.

Diese Summe ist nach der Cauchyschen Ungleichung nicht größer als[5])

$$\left\{\sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k^2 2^{[\log k]} \sum_{l\in I(k,2^m)} a_l^2\right\}^{1/2} \cdot \left\{\sum_{k=2^n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{[\log k]}} \sum_{l\in I(k,\infty)} \left[\int_E \chi_k(x)\chi_l(x)\,dx\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{1. 2}$$

Man kann leicht einsehen, daß das System $\{2^{-[\log k]/2}\chi_k(x)\chi_l(x)\}$ mit $l\in I(k,\infty)$ in (0, 1) orthonormiert ist. Also ist

$$2^{-[\log k]/2}\int_E \chi_k(x)\chi_l(x)\,dx$$

ein Entwicklungskoeffizient der charakteristischen Funktion $E(x)$ der Menge E. Nach der Besselschen Ungleichung folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l\in I(k,\infty)} 2^{-[\log k]}\left[\int_E \chi_k(x)\chi_l(x)\,dx\right]^2 \leqq \int_0^1 E^2(x)\,dx = \mu(E).$$

[5]) In dieser Arbeit benützen wir den Logarithmus mit der Basis 2.

Somit gilt für genügend große n die Ungleichung

$$\sum_{k=2^n+1}^{\infty} 2^{-[\log k]} \sum_{l\in I(k,\infty)} \left[\int_E \chi_k(x)\chi_l(x)\,dx\right]^2 \leqq \frac{\mu(E)^2}{64}. \tag{1. 3}$$

Ferner gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k^2 2^{[\log k]} \sum_{l\in I(k,2^m)} a_l^2 \leqq \sum_{\nu=n}^{m-2} 2^\nu a_{2^\nu}^2 \sum_{\mu=\nu+1}^{m-1} 2^\mu a_{2^\mu}^2 \leqq \tag{1. 4}$$

$$\leqq \sum_{\nu=n}^{m-2} 2^\nu a_{2^\nu}^2 \sum_{\mu=n+1}^{m-1} 2^\mu a_{2^\mu}^2 \leqq \left(\sum_{\nu=n}^{m-1} 2^\nu a_{2^\nu}^2\right)^2.$$

Nach (1. 2), (1. 3) und (1. 4) ergibt sich für genügend große n

$$2\left|\sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k \sum_{l=k+1}^{2^m} a_l \int_E \chi_k(x)\chi_l(x)\,dx\right| \leqq \frac{\mu(E)}{4}\sum_{\nu=n}^{m-1} 2^\nu a_{2^\nu}^2.$$

Aus (1. 1) erhält man dann

$$\mu(E)K_1^2 \geqq \mu(E)\sum_{k=n}^{m-1} 2^k a_{2^{k+1}}^2 - \frac{\mu(E)}{2}\sum_{k=n-1}^{m-2} 2^k a_{2^{k+1}}^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{\mu(E)}{2}\sum_{k=n}^{m-1} 2^k a_{2^{k+1}}^2 - \mu(E)2^{n-2}a_{2^n}^2.$$

Da hier m beliebig ist, folgt somit

$$\sum_{k=n}^{\infty} 2^k a_{2^{k+1}}^2 = O(1),$$

folglich ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergiert.

Damit ist der Satz I bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz II

Zuerst definieren wir ein spezielles orthonormiertes System vom Haarschen Typ $\{h_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Seien $h_n(x) = \operatorname{sign}\sin 2^n\pi x$ $(n=1, 2)$. Es sei s $(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $h_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots, 2^s)$ schon definiert sind, derart, daß sie ein System vom Haarschen Typ bilden, ferner mit $z(k, l; m, p; x) = h_{2^k+l}(x)h_{2^m+p}(x)$

$$\int_0^1 z^2(k, l; m, p; x)\,dx = 1 \qquad (k<m\leqq s) \tag{2. 1}$$

und für $(k, l, m, p) \not\equiv (k', l', m', p')$

$$\int_0^1 z(k, l; m, p; x) z(k', l'; m', p'; x)\, dx = 0 \tag{2.2}$$

gelten.

Dann kann das Intervall (0, 1) in endlich viele Teilintervalle $J_\varrho(s)$ $(1 \leqq \varrho \leqq \varrho_s)$ derart zerlegt werden, daß in jedem $J_\varrho(s)$ die Funktionen $h_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, 2^s)$ konstant sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß a_n für jedes n von 0 verschieden ist.

Wir setzen

$$\varrho_0(m) = 0 \quad \text{und} \quad \varrho_k(m) = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{2^m+n}^2}{A_m^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^m;\ m = 1, 2, \ldots).$$

Für ein endliches Intervall $I = (u, v)$ wird

$$I_k(m; I) = \big(u + \mu(I)\varrho_{k-1}(m),\ u + \mu(I)\varrho_k(m)\big) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^m;\ m = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt.

Wir teilen jedes $J_\varrho(s) = (u_\varrho, v_\varrho)$ in 2^s Teilintervalle ein:

$$I_k(s; J_\varrho(s)) = \big(u_\varrho + \mu(J_\varrho(s))\varrho_{k-1}(s),\ u_\varrho + \mu(J_\varrho(s))\varrho_k(s)\big) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^s)$$

mit

$$\mu\big(I_k(s; J_\varrho(s))\big) = \frac{a_{2^s+k}^2}{A_s^2}\, \mu(J_\varrho(s)),$$

und setzen

$$h_{2^s+k}(x) = \frac{A_s}{a_{2^s+k}} \sum_{\varrho=1}^{\varrho_s} h_1\big(x; I_k(s; J_\varrho(s))\big)\,^{6)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^s).$$

Die Funktionen $h_n(x)$ $(2^s < n \leqq 2^{s+1})$ sind Treppenfunktionen. Sie sind normiert:

$$\int_0^1 h_{2^s+k}^2(x)\, dx = \frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho_s} \int_0^1 h_1^2\big(x; I_k(s; J_\varrho(s))\big)\, dx =$$

$$= \frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho_s} \mu\big(I_k(s; J_\varrho(s))\big) \int_0^1 h_1^2(x)\, dx = \frac{A_s^2}{a_{2^s+k}^2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho_s} \mu(J_\varrho(s)) \frac{a_{2^s+k}^2}{A_s^2} = 1.$$

[6]) Ist $I = (u, v)$ ein endliches Intervall und $h(x)$ eine in (0, 1) definierte Funktion, so wird

$$h(x; I) = \begin{cases} h\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt. Offensichtlich ist

$$\int_u^v h(x; I)\, dx = \mu(I) \int_0^1 h(x)\, dx.$$

Nach der Definition ist es klar, daß das Funktionensystem $\{h_n(x)\}$ $(n=1, 2, \dots, 2^{s+1})$ auch orthogonal ist und für jedes $x \in (0, 1)$ sogar

$$h_n(x)h_m(x) = 0 \qquad (2^l < n, m \leqq 2^{l+1}, n \neq m;\ 0 \leqq l \leqq s)$$

ist, also bilden die $h_n(x)$ $(n=1, 2, \dots, 2^{s+1})$ ein System von Haarschem Typ.

Durch eine einfache Rechnung kann man einsehen, daß (2. 1) auch mit $s+1$ gilt. Sei $k < m \leqq s+1$, dann ist

$$\int_0^1 z^2(k, l; m, p; x)\,dx =$$

$$= \frac{A_k^2}{a_{2^k+l}^2} \cdot \frac{A_m^2}{a_{2^m+p}^2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho_k} \int\limits_{I_l(k;\,J_\varrho(k))} \sum_{\varrho'=1}^{\varrho_m} h_1^2(x; I_p(m; J_{\varrho'}(m))\,dx =$$

$$= \frac{A_k^2}{a_{2^k+1}^2} \cdot \frac{A_m^2}{a_{2^m+p}^2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho_k} \mu(I_l(k; J_\varrho(k))) \frac{a_{2^m+p}^2}{A_m^2} = \frac{A_k^2}{a_{2^k+l}^2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho_k} \frac{a_{2^k+l}^2}{A_k^2} \mu(J_\varrho(k)) = 1.$$

Das Erfülltsein von (2. 2) ist nach der Definition der Funktionen $h_n(x)$ klar.

Durch vollständige Induktion ergibt sich sodann ein unendliches System von Haarschem Typ mit den Eigenschaften (2. 1) und (2. 2).

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis des Satzes I. Wir nehmen an, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n(x)$$

auf einer Menge von positivem Maß konvergiert. Nach dem Egoroffschen Satz gibt es dann eine Menge E vom Maß $\mu(E) > 0$, auf welcher die Partialsummen $s_n(x)$ die Eigenschaft

$$|s_{2^m}(x) - s_{2^n}(x)| \leqq K_2 \qquad (m > n)$$

haben, wobei K_2 eine Konstante ist. Deswegen besteht nach der Definition der Funktionen $h_n(x)$

$$\mu(E)K_2^2 \geqq \int_E \left(\sum_{k=2^n+1}^{2^m} a_k h_k(x) \right)^2 dx \geqq \tag{2. 3}$$

$$\geqq \mu(E) \sum_{k=n}^{m-1} A_k^2 - 2 \left| \sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k \sum_{l=k+1}^{2^m} a_l \int_E h_k(x) h_l(x)\,dx \right|.$$

Da das System vom Haarschen Typ ist, ist die rechts stehende Doppelsumme mit

$$\left| \sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k \sum_{l=2^{[\log(k-1)]+1}+1}^{2^m} a_l \int_E h_k(x) h_l(x)\,dx \right|$$

gleich. Diese Summe kann man nach der Cauchyschen Ungleichung folgenderweise abschätzen:

$$\left\{\sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k^2 \sum_{l=2^{[\log(k-1)]+1}+1}^{2^m} a_l^2\right\}^{1/2} \cdot \tag{2.4}$$

$$\cdot\left\{\sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} \sum_{l=2^{[\log(k-1)]+1}+1}^{2^m} \left[\int_E h_k(x)h_l(x)\,dx\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Nach (2. 1) und (2. 2) ist das System $\{h_k(x)h_l(x)\}$ $l>2^{[\log(k-1)]+1}$ $k=1, 2, \ldots$ orthonormiert. Das Integral

$$\int_E h_k(x)h_l(x)\,dx$$

ist ein Entwicklungskoeffizient der charakteristischen Funktion $E(x)$ der Menge E. Nach der Besselschen Ungleichung ergibt sich

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=2^{[\log(k-1)]+1}+1}^{\infty} \left[\int_E h_k(x)h_l(x)\,dx\right]^2 \leqq \int_0^1 E^2(x)\,dx = \mu(E).$$

Wenn n genügend groß ist, besteht

$$\sum_{k=2^n+1}^{\infty} \sum_{l=2^{[\log(k-1)]+1}+1}^{\infty} \left[\int_E h_k(x)h_l(x)\,dx\right]^2 \leqq \frac{\mu(E)^2}{16}. \tag{2.5}$$

Nach (2. 4) und (2. 5) gilt,

$$2\left|\sum_{k=2^n+1}^{2^m-1} a_k \sum_{l=2^{[\log(k-1)]+1}+1}^{2^m} a_l \int_E h_k(x)h_l(x)\,dx\right| \leqq \frac{\mu(E)}{2} \sum_{k=2^n+1}^{2^m} a_k^2,$$

somit ergibt sich aus (2. 3)

$$\mu(E)K_2^2 \geqq \mu(E)\sum_{k=n}^{m-1} A_k^2 - \frac{\mu(E)}{2}\sum_{k=n}^{m-1} A_k^2 = \frac{\mu(E)}{2}\sum_{k=n}^{m-1} A_k^2.$$

Da m beliebig groß sein kann, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

§ 3. Beweis von Satz III

Den Satz III brauchen wir jetzt nur im Falle $\lambda_n = O(1)$ zu beweisen. Ist $\lambda_n = O(1)$, so folgt aus $w_n = o(\lambda_n)$, daß die Folge $\{w_n\}$ gegen Null strebt. Es ist klar, daß eine monoton abnehmende Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ mit $\Sigma c_n^2 = \infty$ und $\Sigma c_n^2 w_n < \infty$ angegeben werden kann. Es sei $f_n(x)=\chi_n(I; x)$ mit $I=(a, b)$. Die Reihe $\Sigma c_n f_n(x)$ divergiert nach dem Satz I fast überall. Ferner besteht

$$\int_a^b \left| \sum_{n=0}^{m} \chi_n(I; x)\chi_n(I; t) \right| dt \leqq \mu(I) \qquad (m=0, 1, \ldots)$$

nach dem bekannten Ergebnis von A. HAAR [3], also sind die Lebesgueschen Funktionen von $\{f_n(x)\}$ beschränkt.

Damit ist der Satz III vollständig bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz IV

Die Hinlänglichkeit der Bedingungen (3) und (4) folgt aus Satz V in [4]. Zum Beweis der Notwendigkeit benötigen wir den folgenden Hilfssatz aus [4]:

Hilfssatz I. *Es sei $\{R_n(x)\}_1^\infty$ ein im Intervall $(0, 1)$ definiertes Treppenfunktionensystem. Wir bezeichnen mit $J_s(n)$ $(n=1, 2, \ldots; s=1, 2, \ldots, s_n)$ die Konstanzintervalle von $R_n(x)$. Gilt für jedes $m>n$ die Beziehung*

$$\int_{J_s(n)} \operatorname{sign} R_m(x)\, dx = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, s_n),$$

so gibt es zu jeder reellen Zahlenfolge $d_1, \ldots, d_N$ einfache Mengen[7]) *E_k $(k=0, 1, \ldots, N-1)$ derart, daß für jedes $x\in E_k$*

$$\left| \sum_{l=1}^{N} d_l R_l(x) \right| \geqq |d_{N-k} R_{N-k}(x)|$$

besteht und

$$\mu(E_k \cap J_s(N-k-1)) = \frac{\mu(J_s(N-k-1))}{2^{k+1}} \;{}^{8)} \qquad (s=1, 2, \ldots, s_{N-k-1};\ J_1(0)=(0, 1))$$

gilt.

Bekanntlich ist $c_1(\alpha) \leqq \dfrac{A_m^{(\alpha)}}{m^\alpha} \leqq c_2(\alpha)$ $(m>0, \alpha>-1)$, wobei $c_1(\alpha)$ und $c_2(\alpha)$ nur von α abhängige positive Zahlen sind, ferner gilt für

$$L_{n,\nu}^{(\alpha)} = \frac{A_{n+1-\nu}^{(\alpha)}}{A_{n+1}^{(\alpha)}} - \frac{A_{n-\nu}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}} = \frac{A_{n-\nu}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}} \frac{\nu\alpha}{(n+1-\nu)(n+1+\alpha)}$$

die Abschätzung

$$d_1(\alpha) \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{n^{\alpha+1}} \leqq |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| \leqq d_2(\alpha) \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{n^{\alpha+1}} \tag{4.1}$$

---

7) D. h. E_k ist die Summe endlich vieler Intervalle.

8) Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

($n=1, 2, \ldots; \nu=0, 1, \ldots, n; \alpha>-1, \alpha\neq 0$), wobei $d_1(\alpha)$ und $d_2(\alpha)$ nur von α abhängige positive Zahlen sind.

Wir nehmen an, daß die Reihe (1) fast überall $|C, \alpha|$-summierbar ist. Es sei $\varepsilon=2^{-(24+2\alpha)}d_1^2(\alpha)d_2^{-2}(\alpha)$, wo $d_1(\alpha)$ und $d_2(\alpha)$ die unter (4. 1) angeführten Konstanten sind. Nach dem Egoroffschen Satz gibt es dann eine meßbare Menge E mit $\mu(E)\geqq 1-\varepsilon$ und eine positive Konstante K derart, daß für die (C, α)-Mitteln der Reihe (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|<K \qquad (x\in E)$$

ist. Hieraus folgt:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_E|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx\leqq K\mu(E). \tag{4. 2}$$

Seien m und n natürliche Zahlen mit $2^m<n\leqq 2^{m+1}$. Wir setzen

$$R_l(x; m, n)=\sum_{\nu=2^l+1}^{2^{l+1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x) \qquad (l=1, 2, \ldots, m-1),$$

$$R_m(x; m, n)=\sum_{\nu=2^m+1}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x),$$

und

$$R_{m+1}(x; m, n)=\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\chi_{n+1}(x).$$

Die Funktionen $R_l(x; m, n)$ ($l=1, 2, \ldots, m+1$) erfüllen offensichtlich die Bedingungen des Hilfssatzes I.

Wenn $\alpha\geqq 0$ ist, dann wenden wir auf die Funktionen $R_l(x; m, n)$ ($l=1, 2, \ldots, m+1$) den Hilfssatz I mit $N=m+1$, $k=3$ an; die entsprechende Menge sei mit $E_3=E_3(m, n)$ bezeichnet. So ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_E|\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx=\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\int_E\left|\sum_{\nu=0}^{n}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}}a_{n+1}\chi_{n+1}(x)\right|dx\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\int_{E_3\cap E}\left|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\right|dx\geqq$$

$$\geqq\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}\left(\int_{E_3}-\int_{E_3-E_3\cap E}\right)\left|\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}}L_{n,\nu}^{(\alpha)}a_\nu\chi_\nu(x)\right|dx=\Sigma_1.$$

Mit Anwendung der Schwarzschen Ungleichung bekommt man nach (4. 1)

$$\Sigma_1 \geqq \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\int_{E_3} \left| \sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\varepsilon} \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(2^{-4} \sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} L_{n,\nu}^{(\alpha)} |a_\nu| \frac{1}{2^{m/2}} - \sqrt{\varepsilon}\, d_2(\alpha) 2^{-(\alpha+m)} A_{m-2} \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=3}^{\infty} \left(2^{-7} d_1(\alpha) \frac{1}{2^{m/2}} \sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} |a_\nu| \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}}{n^\alpha} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\varepsilon} d_2(\alpha) 2^{-\alpha} A_{m-2} \right) = \Sigma_2 .$$

Nach der Definition von ε besteht

$$\Sigma_2 \geqq \sum_{m=3}^{\infty} \left(2^{-(8+2\alpha)} d_1(\alpha) 2^{-\frac{m}{2}} \sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} |a_\nu| - 2^{-(11+2\alpha)} d_1(\alpha) 2^{\frac{m}{2}} |a_{2^{m-2}}| \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=3}^{\infty} (2^{-(10+2\alpha)} d_1(\alpha) 2^{m/2} |a_{2^{m-1}}| - 2^{-(12+2\alpha)} d_1(\alpha) 2^{m/2} |a_{2^{m-2}}|) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=3}^{\infty} 2^{-(11+2\alpha)} d_1(\alpha) 2^{m/2} |a_{2^{m-1}}| - 2^{-(11+2\alpha)} d_1(\alpha) 2^{3/2} |a_2| \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=2}^{\infty} 2^{-(11+2\alpha)} d_1(\alpha) A_m - O(1).$$

Nach obigen folgt das Erfülltsein der Bedingung (3) wegen (4. 2).

Es sei $-1 < \alpha < 0$. Bei Benützung der vorigen Bezeichnungen nehmen wir an, daß die Reihe (1) in (0, 1) fast überall $|C, \alpha|$-summierbar ist. Dann gibt es auch jetzt nach dem Egoroffschen Satz zu $\varepsilon = 2^{-12} d_1^2(\alpha) d_2^{-2}(\alpha)$ eine meßbare Menge E mit $\mu(E) \geqq 1-\varepsilon$ und eine Konstante M derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)| < M \qquad (x \in E)$$

ist, woraus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)|\, dx \leqq M\mu(E) \tag{1. 3}$$

folgt. Wir wenden den Hilfssatz I für die $R_l(x; m, n)$ mit $N = m+1$ und $k=1$ an; die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $E_1 = E_1(m, n)$.

Ähnlich wie vorher ergibt sich

$$\sum_{n=4}^{\infty} \int_E |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)|\, dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_E \left| \sum_{\nu=0}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) + \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1} \chi_{n+1}(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \int_{E_1 \cap E} \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\int_{E_1} - \int_{E_1 - E_1 \cap E} \right) \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx = \Sigma'.$$

Die Abschätzung kann man durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung fortsetzen:

$$\Sigma' \geqq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\int_{E_1} \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right| dx - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\varepsilon} \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{\nu=2^m+1}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \chi_\nu(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(2^{-2} \sum_{\nu=2^m+1}^{n} |L_{n,\nu}^{(\alpha)}|\, |a_\nu| 2^{-\frac{m}{2}} - \sqrt{\varepsilon}\, d_2(\alpha) 2^{-\alpha m} A_m \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=1}^{\infty} \left(2^{-3} d_1(\alpha) 2^{-\frac{m}{2}} \sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} |a_\nu| \sum_{n=\nu}^{2^{m+1}} \frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}}{n^\alpha} - \sqrt{\varepsilon}\, d_2(\alpha) 2^{-\alpha m} A_m \right) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=1}^{\infty} \left(2^{-3} d_1(\alpha) 2^{m\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} |a_{2^{m+1}}| - \sqrt{\varepsilon}\, d_2(\alpha) 2^{m\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} |a_{2^m}| \right) = \Sigma''.$$

Nach der Definition von ε gilt

$$\Sigma'' \geqq -2^{-4} d_1(\alpha) |a_2| + \sum_{m=2}^{\infty} \left(2^{-6} d_1(\alpha) 2^{m\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} |a_{2^m}| \right) \geqq -O(1) + O(1) \sum_{m=2}^{\infty} 2^{-m\alpha} A_m,$$

woraus die Bedingung (4) auf Grund von (4. 3) folgt.

Damit haben wir den Satz IV vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] G. Alexits, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960).

[2] P. Billard, Sur la sommabilité absolue des séries de fonctions orthogonales, *Bull. Sci. Math.*, **85** (1961), 29–33.

[3] A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Annalen*, **69** (1910), 331–371.

[4] L. Leindler, Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 243–268.

[5] Ф. Мориц, О безусловной сходимости рядов по системе Хаара, *Известия Акад. Наук СССР*, **27** (1963), 1229–1238.

[6] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. IX (Absolute Summation), *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292–299.

[7] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. V (Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen), *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 1–13.

(Eingegangen am 23. April 1964)