АВТОМАТЫ С ИЗОМОРФНЫМИ ПОЛУГРУППАМИ

Ф. ГЕЧЕГ и И. ПЕАК (Сегед)*)

К шестидесятилетию со дня рождения профессора Л. Кальмара

Предлагаемая работа посвящена изучению связей между циклическими автоматами, с одной стороны, и принадлежащими им некоторыми полугруппами, — с другой. Статья отчасти примыкает к работе [2], в которой рассматривались с этой точки зрения коммутативные циклические автоматы.

Помимо некоторых определений и обозначений, взятых из работы [2], мы пользуемся еще следующими определениями.

Автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ называется приведенным по входам, если для произвольных $x_1, x_2\ (\in\mathfrak{X})$ имеет место заключение

$$\forall_{a\in\mathfrak{A}}\, a[\delta(a, x_1)=\delta(a, x_2)]\Rightarrow x_1=x_2.$$

Как обычно, мы говорим, что автомат $A'=(\mathfrak{A}', \mathfrak{X}', \delta')$ является гомоморфным образом автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, если существует пара (φ, ψ) однозначных отображений $\varphi\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ и $\psi\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{X}'$ множества $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$ и множества $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{X}'$, соответственно, для которых имеет место

$$\varphi(\delta(a, x))=\delta'(\varphi(a), \psi(x)) \qquad (a\in\mathfrak{A}, x\in\mathfrak{X}). \tag{1}$$

Если φ и ψ взаимно однозначны, то автоматы A и A' называются изоморфными и это обстоятельство обозначается через $A\approx A'$.

Мы условимся говорить, что автомат $A'=(\mathfrak{A}', \mathfrak{X}', \delta')$ является частичным $\mathfrak{X}$-гомоморфным образом некоторого автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, если найдутся некоторое непустое подмножество $\mathfrak{X}''\ (\subseteq\mathfrak{X})$ и однозначные отображения $\varphi\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ и $\psi\colon \mathfrak{X}''\to\mathfrak{X}'$ множества $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$ и множества $\mathfrak{X}''$ на $\mathfrak{X}'$, соответственно, и для этих φ и ψ имеет место (1).

Мы говорим, что автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ $\mathfrak{X}$-изоморфно вложим в автомат $A'=(\mathfrak{A}', \mathfrak{X}', \delta')$, если найдутся взаимно однозначные отображения $\varphi\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ и $\psi\colon\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}'$ так, что φ отображает множество $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{A}'$, ψ отображает множество $\mathfrak{X}$ *в* $\mathfrak{X}'$ и для этих φ и ψ имеет место (1).

Известно, что для каждой полугруппы S существует автомат A, удовлетворяющий условию $S(A)\approx S$. Исходя из S, такой автомат можно сконструировать например следующим образом. Пусть $\bar{S}$ обозначает полугруппу S, если она имеет единицу, или получающуюся из S присоединением единич-

* F. Gécseg and I. Peák (Szeged)

ного элемента полугруппу, если S не содержит единицы. Возьмем некоторые множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{X}$, для которых имеет место $|\mathfrak{A}|=O(\bar{S})$ и $|\mathfrak{X}|=O(S)$ [1]). После этого мы сконструируем автомат $A_S=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, функция переходов δ которого определяется формулой $\delta(a, x)=f(f^{-1}(a)g^{-1}(x))$, где f и g являются некоторыми взаимно однозначными отображениями полугруппы $\bar{S}$ на множество $\mathfrak{A}$ и полугруппы S на $\mathfrak{X}$, соответственно. Легко убедиться, что $S(A_S)\approx S$ и A_S является приведенным по входам автоматом.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Каждый приведенный по входам циклический автомат A является частичным $\mathfrak{X}$-гомоморфным образом автомата $A_{S(A)}$.*

Действительно, пусть $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ является автоматом, удовлетворяющим условиям теоремы и возьмем автомат $A_{S(A)}=(\mathfrak{A}', \mathfrak{X}', \delta')$, где $|\mathfrak{A}'| = =O(\overline{S(A)})$, $|\mathfrak{X}'|=O(S(A))$, $\delta'(a', x')=f(f^{-1}(a')g^{-1}(x'))$ и $f:\overline{S(A)}\to\mathfrak{A}'$ и $g: S(A)\to\mathfrak{X}'$ являются взаимно однозначными отображениями полугруппы $\overline{S(A)}$ на $\mathfrak{A}'$ и полугруппы $S(A)$ на $\mathfrak{X}'$, соответственно. Как уже отмечалось выше, полугруппы $S(A)$ и $S(A_{S(A)})$ будут изоморфными и поэтому в дальнейшем мы можем отождествить полугруппу $S(A_{S(A)})$ с полугруппой $S(A)$.

Через a_0 обозначается некоторый образующий элемент автомата A. Пусть отображение $\varphi: \mathfrak{A}'\to\mathfrak{A}$ сопоставляет каждому состоянию a' $(\in\mathfrak{A}')$ автомата $A_{S(A)}$ то состояние a $(\in\mathfrak{A})$ автомата A, для которого $a=a_0p$ $(p\in F(\mathfrak{X}))$ [2]) и при упомянутом отождествлении имеет место $C_\varrho[p]=f^{-1}(a')$. При этом пусть $\varphi(f(e))=a_0$, где через e обозначается единичный элемент полугруппы $\overline{S(A)}$. Легко видеть тогда, что φ является однозначным отображением множества $\mathfrak{A}'$ на $\mathfrak{A}$. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{X}''$ $(\subseteq\mathfrak{X}')$, состоящее из тех и только тех входных сигналов x' автомата $A_{S(A)}$, для которых найдется x $(\in\mathfrak{X})$, такое, что при упомянутом выше отождествлении имеет место $C_\varrho[x]=g^{-1}(x')$ и определим отображение $\psi: \mathfrak{X}''\to\mathfrak{X}$, сопоставляющее каждому входному сигналу x' $(\in\mathfrak{X}'')$ входный сигнал x $(\in\mathfrak{X})$ автомата A, удовлетворяющий условию $C_\varrho[x]=g^{-1}(x')$. Не трудно показать, что ψ является однозначным отображением множества $\mathfrak{X}''$ на $\mathfrak{X}$.

Осталось еще показать, что для этих отображений φ и ψ имеет место (1). Для этой цели рассмотрим произвольное состояние a' $(\in\mathfrak{A}')$ и произвольный входный сигнал x' $(\in\mathfrak{X}'')$ автомата $A_{S(A)}$. Тогда найдутся p $(\in F(\mathfrak{X}))$ и x $(\in\mathfrak{X})$ так, что $a'=f(C_\varrho[p])$, $x'=g(C_\varrho[x])$ и мы имеем

$$\varphi(\delta'(a', x'))=\varphi(f(f^{-1}(a')g^{-1}(x')))=\varphi(f(C_\varrho[p]C_\varrho[x]))=$$
$$=\varphi(f(C_\varrho[px]))=a_0px=\delta(a_0p, x)=\delta(\varphi(a'), \psi(x')),$$

что и требовалось доказать.

В частности, в коммутативном случае справедлива следующая

Теорема 2. *Каждый приведенный по входам коммутативный циклический автомат A $\mathfrak{X}$-изоморфно вложим в автомат $A_{S(A)}$.*

---

[1]) $|\mathfrak{A}|$ и $O(S)$ обозначает мощность множества $\mathfrak{A}$ и порядок полугруппы S, соответственно.

[2]) Везде в этой статье, через $F(\mathfrak{X})$ обозначается свободная полугруппа без единицы в алфавите $\mathfrak{X}$.

Действительно, достаточно показать, что при таких условиях отображения φ и ψ, определенные в доказательстве теоремы 1 взаимно однозначны. Предположим, что для некоторых $a_1', a_2' (\in \mathfrak{A}')$ имеет место $\varphi(a_1')=\varphi(a_2')$. Тогда $a_0p_1=a_0p_2$ $(p_i \in F(\mathfrak{X}), f^{-1}(a_i')=C_\varrho[p_i]$ $(i=1, 2))$ и так для произвольного $b\,(=a_0r)$ $(r \in F(\mathfrak{X}))$ из-за коммутативности мы имеем $bp_1=a_0rp_1=$ $=a_0p_1r=a_0p_2r=a_0rp_2=bp_2$, т. е. $p_1 \equiv p_2(\varrho(A))$. Отсюда уже видно, что φ является взаимно однозначным отображением. Легко получается, что и отображение ψ также будет взаимно однозначным.

Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Для произвольной полугруппы S пусть $\mathfrak{M}_S$ обозначает множество всех приведенных по входам циклических автоматов, принадлежащих полугруппе S. Если $\mathfrak{M}_S \neq \varnothing$, то существует автомат A_0, такой, что каждый автомат из $\mathfrak{M}_S$ является частичным $\mathfrak{X}$-гомоморфным образом автомата A_0. Далее, если S содержит единицу, то $A_0 \in \mathfrak{M}_S$ и если при этом полугруппа S коммутативна, тогда каждый автомат из $\mathfrak{M}_S$ $\mathfrak{X}$-изоморфно вложим в автомат A_0. В частности, в случае конечного S автомат A_0 (с точностью до изоморфизма) однозначно определен.*

Действительно, таким автоматом A_0 может служить автомат A_S.

Вопрос об обращении теоремы 1 решается отрицательно. Придавая, однако, этой теореме более полную формулировку, она уже оказывается обратимой. Об этом говорит следующее утверждение, выделяющее, по существу, из совокупности всех частичных $\mathfrak{X}$-гомоморфных образов A_S автоматы с полугруппой S.

Теорема 4. *Если для конечной полугруппы S некоторый приведенный по входам циклический автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ является частичным $\mathfrak{X}$-гомоморфным образом автомата A_S, при некоторой паре отображений (φ, ψ), то имеет место $S(A)\approx S$ тогда и только тогда, если (1) множество всех элементов $g^{-1}(x')$ $(x' \in \mathfrak{X}'')$ является системой образующих полугруппы S и (2) разбиение $\pi_{\varphi f}$ полугруппы $S \cap \bar{S}$, индуцируемое отображением φf: $\bar{S} \to \mathfrak{A}$ не имеет уточнения, являющегося нетривиальным двусторонне стабильным разбиением*[3] *полугруппы S.*[4]

К доказательству достаточности рассмотрим полугруппу S и предположим, что автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ удовлетворяет условиям теоремы. Покажем, что тогда $S(A)\approx S$. Пусть $A''=A_S/(\varphi, \psi)$ обозначает фактор-автомат автомата A_S, состояниями и множеством входных сигналов которого являются все классы множества $\mathfrak{A}'$ по разбиению, индуцируемому отображением φ и множество $\mathfrak{X}''$, соответственно, а функция переходов δ'' автомата A'' действует обычным образом. Ясно, что имеет место $S(A'')\approx S(A)$. Следовательно, достаточно показать, что $S(A'')\approx S$.

[3]) Разбиение π полугруппы S называется правосторонне (двусторонне) стабильным, если отношение эквивалентности в S, индуцируемое разбиением π является правосторонне (двусторонне) стабильным в смысле Е. С. Ляпина [1]. Разбиение полугруппы S мы назовем тривиальным, если все классы эквивалентности в этом разбиении суть отдельные элементы.

[4]) Мы здесь пользуемся обозначениями теоремы 1.

Рассмотрим отображение $\chi: F(\mathfrak{X}'') \to S$, сопоставляющее каждому слову $p = x_1' x_2' \ldots x_k'$ $(\in F(\mathfrak{X}''))$, элемент $s = g^{-1}(x_1') g^{-1}(x_2') \ldots g^{-1}(x_k')$ $(\in S)$. Сразу видно, что χ будет гомоморфным отображением свободной полугруппы $F(\mathfrak{X}'')$ на полугруппу S. Далее, если взять еще $p' = x_1'' x_2'' \ldots x_l''$ $(\in F(\mathfrak{X}''))$ и предполагать $\chi(p) = \chi(p')$, то для всех a' $(\in \mathfrak{A}')$ мы имеем $\delta''(a', p) = f(f^{-1}(a') g^{-1}(x_1') g^{-1}(x_2') \ldots g^{-1}(x_k')) = f(f^{-1}(a') g^{-1}(x_1'') g^{-1}(x_2'') \ldots g^{-1}(x_l'')) = \delta''(a', p')$, следовательно, $p \equiv p' (\varrho(A''))$. А это означает, что полугруппа $S(A'')$ изоморфна некоторой фактор-полугруппе фактор-полугруппы $F(\mathfrak{X})/(\chi)$ свободной полугруппы $F(\mathfrak{X}'')$ по отношению конгруентности, индуцируемому в $F(\mathfrak{X}'')$ отображением χ. Так как $F(\mathfrak{X}'')/(\chi) \approx S$, то полугруппа $S(A'')$ изоморфна некоторой фактор-полугруппе полугруппы S. Возьмем теперь слова q, q' $(\in F(\mathfrak{X}''))$, удовлетворяющие условию $q \equiv q'$ $(\varrho(A''))$ и пусть e обозначает единичный элемент полугруппы $\bar{S}$. Тогда из $\varphi(f(e\chi(q))) = \varphi(f(e\chi(q')))$ следует $\chi(q) \equiv \chi(q')$ $(\pi_{\varphi f})$, т. е. $\chi(q)$ и $\chi(q')$ содержатся в одном и том же классе полугруппы $S(= \bar{S} \cap S)$ по $\pi_{\varphi f}$. Итак, мы получим, что полугруппа $S(A'')$ изоморфна фактор-полугруппе полугруппы S, принадлежащее разбиение π которой является двусторонне стабильным уточнением разбиения $\pi_{\varphi f}$. С другой стороны, по условиям теоремы, разбиение $\pi_{\varphi f}$ полугруппы S имеет только тривиальное двусторонне стабильное уточнение, так, что мы получим $S(A'') \approx S$. Этим самым достаточность доказана.

К доказательству необходимости мы предположим, что из условий (1) и (2) не выполняется только (2). В этом случае разбиение $\pi_{\varphi f}$ полугруппы S имеет отличное от тривиального (единственное) максимальное двусторонне стабильное уточнение π. Мы будем показать, что полугруппа $S(A'')$ изоморфна фактор-полугруппе полугруппы S, индуцируемой разбиением π. Ясно, что для этой цели достаточно убедиться в том, что для всех q, q' $(\in F(\mathfrak{X}''))$ из $\chi(q) \equiv \chi(q')\,(\pi)$ всегда следует $q \equiv q' (\varrho(A''))$. Возьмем произвольные a_1', a_2' $(\in \mathfrak{A}')$, для которых имеет место $\varphi(a_1') = \varphi(a_2')$. Тогда $f^{-1}(a_1')$ и $f^{-1}(a_2')$ входят в один и тот же класс по $\pi_{\varphi f}$ в полугруппе S. Однако, разбиение π является двусторонне стабильным уточнением правосторонне стабильного разбиения $\pi_{\varphi f}$, поэтому из-за $\chi(q) \equiv \chi(q')\,(\pi)$ мы получаем $f^{-1}(a_1')\chi(q) \equiv f^{-1}(a_2')\chi(q')\,(\pi_{\varphi f})$, другими словами, $\varphi(\delta'(a_1', q)) = \varphi(\delta'(a_2', q'))$, т. е. $q \equiv q'$ $(\varrho(A''))$.

В дальнейшем, мы предположим, что не выполняется условие (1). Тогда полугруппа S', порожденная множеством всех элементов $g^{-1}(x')$ $(x' \in \mathfrak{X}'')$ будет истинной подполугруппой полугруппы S. Итак, аналогично предыдущему, можно показать, что либо полугруппа $S(A'')$ изоморфна некоторой фактор-полугруппе полугруппы S', либо имеет место $S(A'') \approx S'$, в зависимости от того, имеет ли разбиение полугруппы $S' \cap \bar{S}$, индуцируемое отображением φf отличное от тривиального двусторонне стабильное уточнение, или же нет. Этим завершается доказательство теоремы 4.

Пусть задан произвольный автомат A. Интересный вопрос, при каких условиях определяется (с точностью до изоморфизма) автомат A полугруппой $S(A)$. Задавать такие условия — то же самое, как выделять такие классы автоматов, в которых автоматы с изоморфными полугруппами и самы являются изоморфными. Следующее предложение дает некоторое частное решение этой проблемы.

Теорема 5. *Если для конечных множеств* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{X}$ *имеет место* $|\mathfrak{A}|=|\mathfrak{X}|$, *то приведенные по входам коммутативные циклические автоматы* $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ *и* $A'=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta')$ *будут изоморфными тогда и только тогда, если* $S(A)\approx S(A')$.

Необходимость очевидна. К доказательству достаточности прежде всего покажем, что $A\approx A_{S(A)}$. Действительно, из теоремы 1 работы [2] следует, что полугруппа $S(A)$ содержит единицу и так по теореме 2 мы имеем $|\mathfrak{A}|=O(S(A))$. Отсюда из-за $|\mathfrak{A}|=|\mathfrak{X}|$ получается $|\mathfrak{X}|=O(S(A))$. С другой стороны, мощность множества $\mathfrak{X}'$ входных сигналов автомата $A_{S(A)}$ совпадает порядком полугруппы $S(A)$ и так $|\mathfrak{X}|=|\mathfrak{X}'|$. Следовательно, отображение ψ, определенное в доказательстве теоремы 1 будет взаимно однозначным, и поэтому $A\approx A_{S(A)}$. Аналогичным образом получается $A'\approx A_{S(A)}$, откуда из $A_{S(A)}\approx A_{S(A')}$ вытекает $A\approx A'$.

Литература

[1] Е. С. Ляпин, *Полугруппы* (Москва, 1960).
[2] И. Пеак, Автоматы и полугруппы. II, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 49–54.

(Поступило 26/I, 1965)