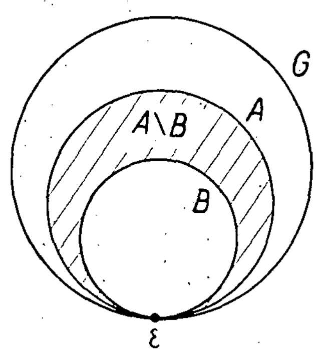
Ein Überdeckungssatz für endliche abelsche Gruppen im Zusammenhang mit dem Hauptsatz von Hajós

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged

Ladislaus Kalmár zum 60. Geburtstag gewidmet

Bekanntlich ist der Hauptsatz von HAJÓS[1]) für die endlichen abelschen Gruppen äquivalent mit einem von MINKOWSKI vermuteten berühmten Überdeckungssatz der endlichdimensionalen Euklidischen Räume, in dem es sich um eine Art Überdeckungen mit Würfeln handelt. Wir beweisen hier einen neuartigen Überdeckungssatz für die endlichen abelschen Gruppen, dessen wesentlichster Teil wieder mit dem Hauptsatz von HAJÓS äquivalent ist.

Es sei G eine endliche abelsche Gruppe mit dem Einselement ε. Eine (nichtleere) Differenzmenge $A \setminus B$ gebildet aus zwei Untergruppen $A \supset B$ von G nennen wir kurz eine *Sichel* (s. die Figur). Keine Sichel enthält ε, aber jedes von ε verschiedenes Element von G ist in mindestens einer Sichel, insbesondere nämlich gewiß in der maximalen Sichel $G \setminus \varepsilon$ enthalten.



Jede nichtleere Differenzmenge $A \setminus B$ von zwei Untergruppen A und B ist nach

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

gleich einer Sichel, wenn wir aber schlechtweg von einer Sichel $A \setminus B$ sprechen, so werde darin immer wie oben mit einbegriffen, daß A und B Untergruppen von G sind und $A \supset B$ ist.

Diese „Normalform" $A \setminus B$ einer Sichel ist eindeutig. Zum Beweis werde die Bemerkung vorausgeschickt, daß für Untergruppen U, V, W einer Gruppe mit $U \subseteqq V \cup W$ offenbar $U \subseteqq V$ oder $U \subseteqq W$ ist. Nun folgt aus der Relation

$$A \setminus B \subseteqq C \setminus D$$

zwischen zwei Sicheln zunächst (aus rein mengentheoretischen Gründen) $A \subseteqq B \cup C$, woraus (wegen $A \supset B$) nach obiger Bemerkung weiter $A \subseteqq C$ folgt. Im Fall der

[1]) G. HAJÓS, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Zeitschr.*, **47** (1942), 427—467.

Gleichheit beider Sicheln folgt ähnlich $C \subseteqq A$, also muß $A = C$ und (wegen $A \supset B$ und $C \supset D$) auch $B = D$ sein. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Den Index $(A:B)$ von B in A nennen wir auch den *Index* der Sichel $A \setminus B$. Nach dem soeben Bewiesenen ist also der Index einer Sichel eindeutig bestimmt.

Für Komplexe $K, K_1, \ldots, K_r$ von G mit $K = K_1 \cup \ldots \cup K_r$ sagen wir, daß $K_1, \ldots, K_r$ eine *Überdeckung* von K bilden. Die $K_1, \ldots, K_r$ nennen wir die Komponenten dieser Überdeckung. Zwei Überdeckungen, die voneinander nur in der Reihenfolge der Komponenten unterscheiden, werden oft als gleich angesehen. Wenn $K_1, \ldots, K_r$ paarweise disjunkt sind, so handelt es sich um die Klasseneinteilungen von K (in nichtleere Klassen $K_1, \ldots, K_r$).

Es läßt sich nach den Überdeckungen von $G \setminus \varepsilon$ mit Sicheln, d. h. nach Sicheln $A_1 \setminus B_1, \ldots, A_k \setminus B_k$ von der Eigenschaft

$$G \setminus \varepsilon = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \setminus B_i) \tag{1}$$

fragen. Das Produkt

$$\prod_{i=1}^{k} (A_i : B_i)$$

der Indizes der darin auftretenden Sicheln nennen wir den *Gesamtindex* dieser Überdeckung.

Wir verabreden, daß wir unter dem Durchschnitt $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ von k Untergruppen einer gegebenen Gruppe im Fall $k = 0$ diese Gruppe selbst verstehen. Dann gilt folgender leichter

Hilfssatz. *Sind $B_1, \ldots, B_k$ Untergruppen von G mit*

$$G \supset B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset \ldots \supset B_1 \cap \ldots \cap B_k = \varepsilon$$

und wird

$$A_i = (B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}) B_i \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

gesetzt, so existieren die Sicheln $A_i \setminus B_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ und bilden eine Überdeckung von $G \setminus \varepsilon$ vom Gesamtindex $(G : \varepsilon)$.

Zum Beweis setzen wir

$$D_i = B_1 \cap \ldots \cap B_i \qquad (i = 0, \ldots, k).$$

Dann gelten

$$G = D_0 \supset D_1 \supset \ldots \supset D_k = \varepsilon$$

und

$$A_i = D_{i-1} B_i \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Wegen $D_{i-1} \cap B_i = D_i$ ist

$$A_i \setminus B_i \supseteqq D_{i-1} \setminus D_i.$$

Da die rechte Seite nicht leer ist, muß $A_i \supset B_i$ sein, also ist $A_i \setminus B_i$ tatsächlich eine Sichel. Ferner folgt

$$\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \setminus B_i) \supseteqq \bigcup_{i=1}^{k} (D_{i-1} \setminus D_i) = D_0 \setminus D_k = G \setminus \varepsilon,$$

weshalb die linke Seite (gleich $G \setminus \varepsilon$ ist, also) eine Überdeckung von $G \setminus \varepsilon$ liefert.

Schließlich ist die Faktorgruppe A_i/B_i nach dem ersten Isomorphiesatz (und wieder nach $D_{i-1}\cap B_i = D_i$) isomorph mit D_{i-1}/D_i, also ist $(A_i:B_i) = (D_{i-1}:D_i)$, woraus für den Gesamtindex dieser Überdeckung

$$\prod_{i=1}^{k}(A_i:B_i) = \prod_{i=1}^{k}(D_{i-1}:D_i) = (D_0:D_k) = (G:\varepsilon)$$

folgt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wegen der Leichtigkeit dieses Beweises nennen wir eine Überdeckung von $G\setminus\varepsilon$ *trivial*, wenn sie von einer im Hilfssatz angegebenen Überdeckung sich höchstens in der Reihenfolge der Komponenten unterscheidet.

Nun wollen wir eine Untergruppe U von G mit zyklischer Faktorgruppe $G\setminus U$ *antizyklisch* nennen. Auch eine Sichel $A\setminus B$ nennen wir antizyklisch, wenn die Untergruppen A und B antizyklisch sind. (Es genügt, daß B antizyklisch ist, denn daraus folgt wegen $A\supset B$ das gleiche für A.) Es lautet der angekündigte

Überdeckungssatz. *Für eine endliche abelsche Gruppe G mit dem Einselement ε sind die Gesamtindizes der Überdeckungen von G mit antizyklischen Sicheln Vielfache der Ordnung $(G:\varepsilon)$ und diejenigen vom Gesamtindex $(G:\varepsilon)$ sind trivial.*

Zusatz. *Die zweite Hälfte dieses Satzes ist äquivalent mit der scharfen Form des Hauptsatzes von Hajós.*

Bemerkung. Bezüglich der scharfen Form des Hauptsatzes von Hajós s. man das Vorwort einer anderen Arbeit[2]). Die zweite Hälfte des Überdeckungssatzes können wir nur auf dem Umwege beweisen, daß wir den Zusatz beweisen. Durch einen direkten Beweis würde ein neuer Beweis des Hauptsatzes von Hajós entstehen, aber ein solcher Beweis ist uns nicht einmal im verhältnismäßig sehr einfachen Fall gelungen, wo die Invarianten von G gleiche Primzahlquadrate sind. (Unter den bekannten zahlreichen Äquivalenten des Haupsatzes von Hajós ist gegenwärtig nur dieser Hauptsatz selbst einem direkten Beweis zugänglich.)

Im Beweis bedienen wir uns der auch im § 1 der Arbeit[2]) eingeführten Bezeichnungen. (Eine einzige Abweichung von diesen Bezeichnungen wird sein, daß wir für den gruppentheoretischen Index $(A:B)$ weiter auch diese Bezeichnung behalten, wogegen wir hierfür in der Arbeit[2]) die Bezeichnung $O(A\setminus B)$ verwendet haben.)

Wir machen den Kunstgriff, daß wir den Satz für die Charaktergruppe $\mathfrak{G}$ von G statt G beweisen. Das ist durchaus gestattet, da G und $\mathfrak{G}$ miteinander isomorph sind. (Der Zweck dieses Übergehens von G auf $\mathfrak{G}$ wird uns bald klar.) Es sei eine Überdeckung

$$\mathfrak{G}\setminus\chi_1 = \bigcup_{i=1}^{k}(\mathfrak{A}_i\setminus\mathfrak{B}_i) \tag{2}$$

von $\mathfrak{G}\setminus\chi_1$ mit antizyklischen Sicheln $\mathfrak{A}_i\setminus\mathfrak{B}_i$ aus $\mathfrak{G}$ angegeben. Wir haben zu beweisen, daß für den Gesamtindex von (2) die Teilbarkeit

$$(\mathfrak{G}:\chi_1)\,\Big|\,\prod_{i=1}^{k}(\mathfrak{A}_i:\mathfrak{B}_i) \tag{3}$$

²) L. Rédei, Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (im Erscheinen).

zutrifft und daß die Überdeckung (2) trivial ist, wenn in (3) „=" statt „|" gilt. Die zweite Behauptung — wir wiederholen es — werden wir so beweisen, daß wir ihre Äquivalenz mit der scharfen Form des Hauptsatzes von Hajós nachweisen. So werden Satz und Zusatz bewiesen.

Für eine Untergruppe X von G bezeichnen wir mit X' die Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bestehend aus denjenigen Charakteren $\chi \in \mathfrak{G}$, für die stets $\chi(\xi) = 1 \, (\xi \in X)$ ist. Dual hierzu bezeichnet $\mathfrak{X}'$ für eine Untergruppe $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{G}$ die Untergruppe von G bestehend aus denjenigen Elementen $\xi \in G$, für die stets $\chi(\xi) = 1 \; (\chi \in \mathfrak{X})$ ist. Man nenne die beiden zueinander inversen eineindeutigen Abbildungen $X \to X'$ und $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ etwa die erste bzw. zweite Dirichletsche Abbildung. Die erste ist bekanntlich ein Antiisomorphismus des Untergruppenverbandes von G auf den von $\mathfrak{G}$, die zweite ist der hierzu duale Antiisomorphismus.

Es folgt, daß die in (2) auftretenden antizyklischen Untergruppen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ von $\mathfrak{G}$ als

$$\mathfrak{B}_i = \{\beta_i\}' \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{4}$$

angesetzt werden können, wobei für $\beta_1, \ldots, \beta_k$ beliebige von ε verschiedene Elemente von G in Frage kommen. Da ferner $\mathfrak{A}_i$ jede echte Obergruppe von $\mathfrak{B}_i$ in $\mathfrak{G}$ bedeuten kann, läßt sich wegen (4)

$$\mathfrak{A}_i = \{\beta_i^{e_i}\}' \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{5}$$

setzen, wobei für $e_1, \ldots, e_k$ beliebige natürliche Zahlen mit

$$e_i | o(\beta_i), \quad e_i > 1 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{6}$$

in Frage kommen.

Wir fassen die nach (6) existierenden Simplexe

$$[\beta_i, e_i] \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{7}$$

aus G ins Auge. Nach Hilfssatz 10 der Arbeit[2]) ist der Nullifikator $\mathfrak{N}([\beta_i, e_i])$ von $[\beta_i, e_i]$ gleich der Menge derjenigen Charaktere $\chi \in \mathfrak{G}$, die den Bedingungen $\chi(\beta_i)^{e_i} = 1$ und $\chi(\beta_i) \neq 1$ genügen. Da die erste Bedingung als $\chi(\beta_i^{e_i}) = 1$ geschrieben werden kann, folgt daraus nach (4) und (5)

$$\mathfrak{N}([\beta_i, e_i]) = \mathfrak{A}_i \setminus \mathfrak{B}_i \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

also drückt sich die Annahme (2) in der Form

$$\mathfrak{G} \setminus \chi_1 = \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{N}([\beta_i, e_i]) \tag{8}$$

aus.

Andererseits folgt aus (4), (5) und (6) das Bestehen von

$$e_i = (\mathfrak{A}_i : \mathfrak{B}_i) \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{9}$$

also lautet die Teilbarkeit (3) (wegen $(\mathfrak{G} : \chi_1) = (G = \varepsilon)$) als

$$(G : \varepsilon) | e_1 \ldots e_k . \tag{10}$$

Zur ersten Hälfte des Satzes genügt es also zu beweisen, daß (10) eine Folgerung von (8) ist.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit m eine natürliche Zahl von der Eigenschaft

$$(G:\varepsilon)\,|\,me_1\dots e_k$$

und zeigen, daß im Gruppenring $\mathfrak{J}(G)$ die Gleichung

$$\frac{me_1\dots e_k}{(G:\varepsilon)}\bar{G} = m\prod_{i=1}^{k}\overline{[\beta_i, e_i]} \tag{11}$$

gilt. Nach Hilfssatz 6 der Arbeit[2]) haben wir hierzu nur nachzuweisen, daß jeder Charakter $\chi\in\mathfrak{G}$ an beiden Seiten der Gleichung (11) den gleichen Wert annimmt. Für $\chi=\chi_1$ ist das wegen

$$\chi_1(\bar{G}) = (G:\varepsilon),\quad \chi_1(\overline{[\beta_i, e_i]}) = e_i \qquad (i=1,\dots,k)$$

klar. Für $\chi\neq\chi_1$ (d. h. $\chi\in\mathfrak{G}\setminus\chi_1$) folgt die Behauptung aus $\chi(\bar{G})=0$ und (8).

Wegen des Auftretens des Zahlfaktors m auf der rechten Seite von (11) muß der Zahlfaktor auf der linken Seite durch m teilbar d. h. $e_1\dots e_k$ durch den Nenner $(G:\varepsilon)$ teilbar sein. Damit ist die Teilbarkeit (10) d. h. die erste Hälfte des Überdeckungssatzes bewiesen.

Da (3) wegen (9) mit (10) übereinstimmt, setzen wir dementsprechend im weiteren Teil des Beweises auch

$$e_1\dots e_k=(G:\varepsilon) \tag{12}$$

voraus. Um den Beweis auszuführen, haben wir vor allem zu erforschen, wie sich die Bedingungen in den Bestimmungsstücken β_i und e_i $(i=1,\dots,k)$ ausdrücken, damit die Überdeckung (2) trivial ist. Das ist (s. den Hilfssatz) dann und nur dann der Fall, wenn nach passender Umnumerierung der Sicheln $\mathfrak{A}_i\setminus\mathfrak{B}_i$ $(i=1,\dots,k)$

$$\mathfrak{G}\supset\mathfrak{B}_1\supset\mathfrak{B}_1\cap\mathfrak{B}_2\supset\dots\supset\mathfrak{B}_1\cap\dots\cap\mathfrak{B}_k=\varepsilon$$

und

$$\mathfrak{A}_i=(\mathfrak{B}_1\cap\dots\cap\mathfrak{B}_{i-1})\mathfrak{B}_i \qquad (i=1,\dots,k)$$

besteht. Mit Verwendung der zweiten Dirichletschen Abbildung drücken sich diese Bedingungen durch

$$\varepsilon\subset\mathfrak{B}_1'\subset\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2'\subset\dots\subset\mathfrak{B}_1'\dots\mathfrak{B}_k'=G$$

und

$$\mathfrak{A}_i'=\mathfrak{B}_1'\dots\mathfrak{B}_{i-1}'\cap\mathfrak{B}_i \qquad (i=1,\dots,k)$$

aus. Da aber nach (4) und (5) $\mathfrak{B}_i'=\{\beta_i\}$ und $\mathfrak{A}_i'=\{\beta_i^{e_i}\}$ gelten, verwandeln sich diese Bedingungen in

$$\varepsilon\subset\{\beta_1\}\subset\{\beta_1,\beta_2\}\subset\dots\subset\{\beta_1,\dots,\beta_k\}=G \tag{13}$$

und

$$\{\beta_i^{e_i}\}=\{\beta_1,\dots,\beta_{i-1}\}\cap\{\beta_i\} \qquad (i=1,\dots,k). \tag{14}$$

In (14) sind beide Seiten Untergruppen der zyklischen Gruppe $\{\beta_i\}$, also ist die Gleichung (14) gleichbedeutend mit der Gleichheit der Ordnung beider Seiten, d. h. (teils wegen (6_1)) mit

$$\frac{(\{\beta_i\}:\varepsilon)}{e_i}=\frac{(\{\beta_1,\dots,\beta_{i-1}\}:\varepsilon)(\{\beta_i\}:\varepsilon)}{(\{\beta_1,\dots,\beta_i\}:\varepsilon)}.$$

Für diese Gleichung darf $(\{\beta_1, \ldots, \beta_i\}:\varepsilon) = e_i(\{\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\}:\varepsilon)$ genommen werden, woraus folgt, daß das Gleichungssystem (14) mit dem System

$$(15) \qquad (\{\beta_1, \ldots, \beta_i\}:\varepsilon) = e_1 \ldots e_i \qquad (i=1, \ldots, k)$$

äquivalent ist. Da aber hieraus wegen (6_2) und (12) auch schon (13) folgt, haben wir gewonnen, daß die Überdeckung (2) dann und nur dann trivial ist, wenn nach passender Umnumerierung der Paare β_i, e_i die Gleichungen (15) erfüllt sind.

Nun ist aber (2) mit (12) zusammen nach dem Hauptlemma im § 1 der Arbeit[2]) gleichbedeutend damit, daß die schlichte Zerlegung

$$(16) \qquad G = [\beta_1, e_1] \circ \ldots \circ [\beta_k, e_k]$$

besteht. Also haben wir zur zweiten Hälfte unseres Satzes und zum Zusatz nur zu beweisen, daß die scharfe Form des Hauptsatzes von Hajós mit der Aussage äquivalent ist, daß aus (16) bei passender Umnumerierung der Faktoren die Bedingung (15) folgt.

Man bemerke noch, daß man dabei die obige Voraussetzung (6) fallen lassen darf, da diese in (16) schon mitenthalten ist. Aus der Existenz der Faktoren in (16) und aus der Definition der Simplexe folgt nämlich (6_2), ferner folgt aus (16) auch (6_1), da aus jeder Teilbarkeit

$$[\gamma, e] \mid G \qquad (\gamma \in G;\ o(\gamma) \geqq e > 1)$$

die weitere Teilbarkeit

$$e \mid o(\gamma)$$

folgt.

Um dieses zu beweisen, bemerke man, daß nach der Annahme ein Komplex K von G mit

$$G = [\gamma, e] \circ K$$

existiert. Dann ist

$$\bar{G} = \overline{[\gamma, e]}\bar{K}.$$

Hieraus folgt nach Multiplikation mit $\varepsilon - \gamma$

$$0 = (\varepsilon - \gamma^e)\bar{K}$$

d. h. $\gamma^e K = K$, also gilt sogar

$$\gamma^{(e, o(\gamma))} K = K.$$

Diese Gleichung ist mit der Existenz des obigen schlichten Produktes nur dann verträglich, wenn $(e, o(\gamma)) \geqq e$, d. h. $e \mid o(\gamma)$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. Das bedeutet, daß es sich in (16) um alle möglichen Zerlegungen von G in ein schlichtes Produkt von Simplexen handelt.

Nunmehr besagt die scharfe Form des Hauptsatzes von Hajós (s. das Vorwort der Arbeit[2])), daß jede schlichte Zerlegung von G von der Form (16) klassisch ist, d. h. nach passender Numerierung der Faktoren alle schlichten Produkte

$$(17) \qquad P_i = [\beta_1, e_1] \circ \ldots \circ [\beta_i, e_i] \qquad (i=1, \ldots, k)$$

Gruppen sind. Wir zeigen, daß (15) dann und nur dann besteht, wenn alle schlichten Produkte (17) (existieren und) Gruppen sind, wodurch also die zweite Hälfte des Satzes und der Zusatz bewiesen sind.

Man sieht aus (17), daß stets, wenn $P_1, \ldots, P_k$ (existieren und) Gruppen sind, dann $P_i = \{\beta_1, \ldots, \beta_i\}$ und $(P_i : \varepsilon) = e_1 \ldots e_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ gelten, woraus (15) folgt. Umgekehrt, wenn (15) besteht, so gilt

$$(\{\beta_1, \ldots, \beta_i\} : \{\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\}) = e_i$$

d. h.

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_i\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}\} \circ [\beta_i, e_i],$$

woraus

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_i\} = [\beta_1, e_1] \circ \ldots \circ [\beta_i, e_i] \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

folgt. Da hiernach die Produkte (17) (existieren und) Gruppen sind, sind Satz und Zusatz bewiesen.

(Eingegangen am 18. Dezember 1964)