

Über ein Problem von S. B. Stetschkin

Von K. TANDORI in Szeged

Herrn Professor Ladislaus Kalmár zum 60. Geburtstag gewidmet

In dieser Note werden wir den folgenden Satz beweisen, der ein Problem von S. B. STETSCHKIN¹⁾ im positiven Sinne beantwortet.

Satz. Es gibt eine trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) derart, daß für ihre Partialsummen $s_n(x)$ überall gilt:
 $\underline{\lim} s_n(x) < \overline{\lim} s_n(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

Hilfssätze

Im folgenden bezeichnen wir mit c_1, c_2, \dots positive, absolute Konstanten.

Hilfssatz I. Es seien a und N gegebene natürliche Zahlen. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom

$$P(x) = P(a, N; x) = \sum_{k=v(a, N)}^{\mu(a, N)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (N < v(a, N) < \mu(a, N))$$

mit den folgenden Eigenschaften: $|a_k| \leq c_1$, $|b_k| \leq c_1$,

$$|P(x)| \leq c_2 \max \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2\pi - x)^2} \right), a \right\} \quad (-\infty < x < \infty),$$

und es gibt für jedes $x \in [-\pi/128a, \pi/128a]$ Indizes $p = p(x)$, $q = q(x)$ derart, daß

$$s_p(x) \geq c_3 a, \quad \text{und} \quad s_q(x) \leq -c_3 a \quad (c_3 \leq 1),$$

wobei $s_n(x)$ die n -te Partialsumme von $P(x)$ bezeichnet.

¹⁾ Siehe П. Л. Улянов, Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, *Успехи матем. наук*, **19:1** (115) (1964), 3–69.

Beweis. Es sei $N' = 96 \cdot N \cdot a$. Da für $k=1, 2, 3, 4$

$$|l| \left(\frac{\pi}{N'} - \frac{\pi}{(N' + 3ka)} \right) \cong \frac{\pi}{8(N' + 3ka)} \quad \left(l=0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N'}{96a} \right)$$

gilt, so ergibt sich für $k=1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} \sin(N' + 3ka)x &\cong \sin \frac{\pi}{8} \\ (1) \quad &\left(x \in \left[\frac{2l\pi}{N'} + \frac{\pi}{4N'}, \frac{(2l+1)\pi}{N'} - \frac{\pi}{4N'} \right]; -\frac{N'}{96a} \cong 2l < 2l+1 \cong \frac{N'}{96a} \right), \\ \sin(N' + 3ka)x &\cong -\sin \frac{\pi}{8} \\ &\left(x \in \left[\frac{(2l-1)\pi}{N'} + \frac{\pi}{4N'}, \frac{2l\pi}{N'} - \frac{\pi}{4N'} \right]; -\frac{N'}{96a} \cong 2l-1 < 2l \cong \frac{N'}{96a} \right). \end{aligned}$$

Für die a -te Fejérsche Kernfunktion

$$K_a(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^a \left(1 - \frac{k}{a+1} \right) \cos kx = \frac{1}{2(a+1)} \left(\frac{\sin(a+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

gelten die Abschätzungen

$$(2) \quad 0 \cong K_a(x) \cong a, \quad K_a(x) \cong \frac{\pi^2}{2a} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2\pi-x)^2} \right) \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$K_a(x) \cong \frac{2}{\pi^2} a \left(-\frac{\pi}{2a} \cong x \cong \frac{\pi}{2a} \right).$$

Aus (1) und (2) folgt offensichtlich, daß das trigonometrische Polynom

$$\begin{aligned} P(x) &= \sin(N' + 3a)x \cdot K_a(x) - 2 \frac{\pi^2}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \sin(N' + 6a)x \cdot K_a(x) + \\ &\quad + 4 \left(\frac{\pi^2}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right)^2 \sin(N' + 9a) \left(x - \frac{\pi}{2N'} \right) \cdot K_a(x) - \\ &\quad - 8 \left(\frac{\pi^2}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right)^2 \sin(N' + 12a) \left(x - \frac{\pi}{2N'} \right) \cdot K_a(x) \end{aligned}$$

allen Bedingungen des Hilfssatzes I genügt.

Hilfssatz II. Es seien $a (\cong c_4)$ und M natürliche Zahlen. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom

$$Q(x) = Q(a, M; x) = \sum_{k=n(a, M)}^{m(a, M)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (M < n(a, M) < m(a, M))$$

mit den folgenden Eigenschaften: für jedes k sind $|a_k| \cong c_5$, $|b_k| \cong c_5$, es gilt die Abschätzung $|Q(x)| \cong c_6 a$, und für jedes x gibt es Indizes $r = r(x)$, bzw. $s = s(x)$ derart, daß

$$S_r(x) \cong c_7 a \quad \text{bzw.} \quad S_s(x) \cong -c_7 a$$

gelten, wobei $S_n(x)$ die n -te Partialsumme von $Q(x)$ bezeichnet.

Beweis. Es sei ϱ eine natürliche Zahl mit

$$(3) \quad \frac{32c_2^2}{\pi^2 \varrho^2} \cong c_3,$$

wobei c_2 und c_3 die im Hilfssatz I erwähnten Konstanten bedeuten. Wir setzen

$$Q_1(x) = \sum_{1 \leq i \leq 2a/\varrho} P\left(a, N_i, x - i\varrho \frac{\pi}{a}\right),$$

wobei die Indizes N_i derart gewählt sind, daß $M < \nu(a, N_0) < \dots < \mu(a, N_i) < \nu(a, N_{i+1}) < \dots$ gilt.

Ist $x \in \left[i_0 \varrho \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{128a}, i_0 \varrho \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{128a}\right]$ ($1 \leq i_0 \leq 2a/\varrho$), dann gilt auf Grund des Hilfssatzes I und (3)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{i_0-1} P\left(a, N_i; x - i\varrho \frac{\pi}{a}\right) \right| \cong \\ & \cong \frac{c_2}{a} \sum_{i=1}^{i_0-1} \left(\frac{1}{\left(x - i\varrho \frac{\pi}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(2\pi - x + i\varrho \frac{\pi}{a}\right)^2} \right) \cong \frac{16c_2}{\pi^2 \varrho^2} a \cong \frac{c_3}{2} a. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß für $x \in \left[i\varrho \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{128a}, i\varrho \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{128a}\right]$ ($1 \leq i \leq 2a/\varrho$) Indizes $\bar{r} = \bar{r}(x)$ und $\bar{s} = \bar{s}(x)$ existieren mit

$$(4) \quad \bar{S}_{\bar{r}}(x) \cong \frac{c_3}{2} a, \quad \bar{S}_{\bar{s}}(x) \cong -\frac{c_3}{2} a,$$

wobei $\bar{S}_n(x)$ die n -te Partialsumme von $Q_1(x)$ bezeichnet. Nach dem Hilfssatz I ergibt sich leicht mit $c_8 \cong 1$

$$(5) \quad |Q_1(x)| \cong \sum_{1 \leq i \leq 2a/\varrho} \left| P\left(a, N_i; x - i\varrho \frac{\pi}{a}\right) \right| \cong 2c_2 \left(a + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i\varrho \frac{\pi}{a}\right)^2} \right) \cong c_8 a.$$

Wir setzen endlich

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{68q-1} \left(\frac{4c_8}{c_3} \right)^i Q_1 \left(x - 2i \frac{\pi}{128a} \right).$$

Auf Grund von (4) und (5) ist offensichtlich, daß $Q(x)$ allen Bedingungen des Hilfssatzes II genügt.

Beweis des Satzes

Es sei $(c_4 \cong) a_1 < \dots < a_i < \dots$ eine Folge von natürlichen Zahlen, für die die Ungleichung

$$(6) \quad c_6(a_1 + \dots + a_i) \cong \frac{c_7}{2} a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

besteht und es sei $M_i = m(a_{i-1}^2, M_{i-1})$ ($i = 1, 2, \dots$; $M_0 = 0$). Wir setzen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} Q(a_i^2, m(a_{i-1}^2, M_{i-1}); x).$$

Auf Grund des Hilfssatzes II und (6) ist es klar, daß die Koeffizienten dieser trigonometrischen Reihe nach 0 streben und überall gilt:

$$\underline{\lim} s_n(x) = -\infty, \quad \overline{\lim} s_n(x) = \infty.$$

Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

(Eingegangen am 11. März 1964)