Sur les contractions de l'espace de Hilbert. X
Contractions similaires à des transformations unitaires

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Hommage à Monsieur L. Kalmár à son 60ième anniversaire

Le but de cette Note est de caractériser les contractions T de l'espace de Hilbert qui sont similaires à des transformations unitaires, et cela en termes de la fonction caractéristique de T. Grâce aux modèles fonctionnels des contractions basés sur la fonction caractéristique, on obtient de cette façon les modèles fonctionnels de toutes les contractions qui sont complètement non-unitaires, mais similaires à des transformations unitaires.

Rappelons que deux transformations, A et B, dans les espaces de Hilbert $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, bornées ou non, sont similaires lorsqu'il existe une transformation linéaire S de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{B}$, biunivoque et bicontinue, telle que $A = S^{-1}BS$.

A titre d'exemple, nous donnons une condition suffisante et nécessaire pour que la transformation

$$Af(x) = a(x)f(x) + i\int_0^x f(t)\,dt$$

dans l'espace $L^2(0, 1)$, où $a(x)$ est une fonction réelle et mesurable, soit similaire à une transformation autoadjointe.

1. Préliminaires

Soient T une contraction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et U la dilatation unitaire minimum de T, opérant dans un espace $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$. Soient

$$\mathfrak{K}_+ = \bigvee_0^\infty U^n\mathfrak{H}, \quad U_+ = U|\mathfrak{K}_+,$$

$$\mathfrak{L} = \overline{(U-T)\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{L}_* = \overline{(I-UT^*)\mathfrak{H}},$$

$$M(\mathfrak{L}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n\mathfrak{L}, \quad M_+(\mathfrak{L}) = \bigoplus_0^{\infty} U^n\mathfrak{L}, \quad M(\mathfrak{L}_*) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n\mathfrak{L}_*, \quad M_+(\mathfrak{L}_*) = \bigoplus_0^{\infty} U^n\mathfrak{L}_*.$$

On a

$$\mathfrak{K}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_0 = M_+(\mathfrak{L}) \oplus \mathfrak{H}, \tag{1.1}$$

$\mathfrak{K}_0$ étant un sous-espace de $\mathfrak{K}_+$, qui réduit U et par conséquent aussi U_+; soit

$$U_0 = U|\mathfrak{K}_0.$$

On a

$$(1.2) \qquad T^* = U_+^*|\mathfrak{H}.$$

Les projections orthogonales de $\mathfrak{K}$ sur les sous-espaces

$$\mathfrak{H},\ \mathfrak{K}_0,\ M(\mathfrak{L}),\ M(\mathfrak{L}_*)$$

soient désignées par

$$P_{\mathfrak{H}},\ P_{\mathfrak{K}_0},\ P^{\mathfrak{L}},\ P^{\mathfrak{L}_*},$$

selon les cas. Les dernières trois projections permutent à U. Pour toutes ces notions et relations, *cf.* [VIII], n° 3 et [IX], n° 1.

On a la relation

$$(1.3) \qquad P_{\mathfrak{K}_0}h = \lim_{n\to\infty} U^n T^{*n} h \qquad \text{pour tout } h \in \mathfrak{H}.^{1)}$$

Dans le cas où T n'a pas la valeur propre 0, on a aussi

$$(1.4) \qquad \overline{P_{\mathfrak{K}_0}\mathfrak{H}} = \mathfrak{K}_0.$$

En effet, en cas contraire il existe un $k \in \mathfrak{K}_0$ tel que $k \perp \mathfrak{H}$ et $k \neq 0$. Puisque $k \in \mathfrak{K}_+ \ominus \mathfrak{H} = M_+(\mathfrak{L})$, k admet un développement orthogonal

$$k = \sum_0^\infty U^n l_n \qquad \left(l_n \in \mathfrak{L},\ \sum_0^\infty \|l_n\|^2 = \|k\|^2\right).$$

Comme $k \neq 0$, il y a des coefficients l_n qui sont différents de 0: soit l_ν le premier d'entre eux. On a alors

$$(1.5) \qquad U_+^{*\nu+1} k = U_+^* l_\nu + l_{\nu+1} + U_+ l_{\nu+2} + U_+^2 l_{\nu+3} + \dots.$$

Puisque $U_+^* l_\nu \in U_+^* \mathfrak{L} = U_+^* \overline{(U_+ - T)\mathfrak{H}} \subseteq \overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}} \subseteq \mathfrak{H}$ (voir (1.2)) le développement (1.5) correspond à la décomposition orthogonale

$$\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L} \oplus U^2\mathfrak{L} \oplus \dots,$$

d'où

$$\|U_+^{*\nu+1} k\|^2 = \|U_+^* l_\nu\|^2 + \|l_{\nu+1}\|^2 + \|l_{\nu+2}\|^2 + \|l_{\nu+3}\|^2 + \dots.$$

D'autre part, puisque $k \in \mathfrak{K}_0$, on a $U_+^{*\nu+1} k = U_0^{-\nu-1} k$, d'où

$$\|U_+^{*\nu+1} k\|^2 = \|k\|^2 = \|l_\nu\|^2 + \|l_{\nu+1}\|^2 + \|l_{\nu+2}\|^2 + \dots.$$

---

1) *Cf.* [VII], n° 1. La convergence $U^n T^{*n} h \to h_0$ s'ensuit de la relation

$$\|U^n T^{*n} h - U^m T^{*m} h\|^2 = \|T^{*m} h\|^2 - \|T^{*n} h\|^2 \qquad (h \in \mathfrak{H};\ m < n)$$

et de ce que les valeurs $\|T^{*n}h\|^2$ forment une suite non-croissante, donc convergente. On a

$$h - h_0 = \lim_n (I - U^n T^{*n}) h = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} U^k (I - UT^*) T^{*k} h \in M_+(\mathfrak{L}_*).$$

D'autre part, $h_0 \perp M_+(\mathfrak{L}_*)$ parce que, pour tout ν fixé, $U^n T^{*n} h \perp U^\nu (I - UT^*) T^{*\nu} h'$ $(h, h' \in \mathfrak{H})$ dès que $n \geq \nu + 1$, conséquence de ce que $\mathfrak{H} \perp U^\mu \mathfrak{L}_*$ pour $\mu = -1, -2, \dots$. Donc $h_0 = P_{\mathfrak{K}_0} h$.

Il en résulte $\|U_+^* l_\nu\|^2 = \|l_\nu\|^2$, donc

(1.6) $$((I_{\mathfrak{K}_+} - U_+ U_+^*) l_\nu, l_\nu) = 0.$$

Or, $I_{\mathfrak{K}_+} - U_+ U_+^*$ étant égal à la projection de $\mathfrak{K}_+$ sur $\mathfrak{K}_+ \ominus U_+ \mathfrak{K}_+ = \mathfrak{L}_*$ (*cf.* la première des relations (1.1)), (1.6) veut dire que $l_\nu \perp \mathfrak{L}_*$. En vertu de la relation

$$\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} = U\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}_* \quad (\textit{cf.}\ [\mathrm{V}],\ \text{formule}\ (17))$$

cela entraîne que

$$l_\nu = Uh \quad (h \in \mathfrak{H}, h \neq 0), \quad P_{\mathfrak{H}} l_\nu = P_{\mathfrak{H}} Uh = Th.$$

Puisque $\mathfrak{L} \perp \mathfrak{H}$, on à $P_{\mathfrak{H}} l_\nu = 0$, donc $Th = 0$. Cela contredit notre hypothèse que T n'a pas la valeur propre 0. Donc (1.4) subsiste.

Nous aurons besoin aussi du suivant simple

Lemme. *Soient*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$$

deux décompositions d'un espace de Hilbert $\mathfrak{R}$. Désignons par $P_{\mathfrak{A}}$ et $P_{\mathfrak{B}}$ les projections orthogonales dans $\mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Supposons que $P_{\mathfrak{A}}$ applique $\mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{A}$ de manière biunivoque et bicontinue. $P_{\mathfrak{B}}$ applique alors $\mathfrak{Y}$ sur $\mathfrak{B}$ de la même manière. Plus précisément: lorsqu'on a

(1.7) $$P_{\mathfrak{A}}\mathfrak{X} = \mathfrak{A} \quad \textit{et} \quad \|P_{\mathfrak{A}}x\| \geqq c\|x\| \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathfrak{X}$$

avec une constante positive c, on a aussi

(1.8) $$P_{\mathfrak{B}}\mathfrak{Y} = \mathfrak{B} \quad \textit{et} \quad \|P_{\mathfrak{B}}y\| \geqq c\|y\| \quad \textit{pour tout} \quad y \in \mathfrak{Y}.$$

Démonstration. Puisque $\|P_{\mathfrak{A}}x\|^2 \geqq c^2\|x\|^2 = c^2[\|P_{\mathfrak{A}}x\|^2 + \|P_{\mathfrak{B}}x\|^2]$, on a $C^2\|P_{\mathfrak{A}}x\|^2 \geqq \|P_{\mathfrak{B}}x\|^2$ avec $C = \sqrt{1-c^2}/c$. Donc les hypothèses (1.7) assurent que la formule

$$A(P_{\mathfrak{A}}x) = P_{\mathfrak{B}}x \qquad (x \in \mathfrak{X})$$

définit une transformation linéaire A de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, bornée par C. A^* sera alors une transformation linéaire de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$, bornée aussi par C. Puisque le graphique $\{a \oplus Aa : a \in \mathfrak{A}\}$ de A dans $\mathfrak{R} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ est égale à $\{P_{\mathfrak{A}}x \oplus P_{\mathfrak{B}}x : x \in \mathfrak{X}\}$, donc à $\mathfrak{X}$, son complément orthogonal $\{-A^*b \oplus b : b \in \mathfrak{B}\}$ sera égal à $\mathfrak{Y}$. Cela veut dire que $P_{\mathfrak{B}}\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}$ et que $P_{\mathfrak{A}}y = -A^*P_{\mathfrak{B}}y$ pour tout $y \in \mathfrak{Y}$. Il s'ensuit que

$$\|P_{\mathfrak{A}}y\| \leqq C\|P_{\mathfrak{B}}y\|, \quad \|y\|^2 = \|P_{\mathfrak{A}}y\|^2 + \|P_{\mathfrak{B}}y\|^2 \leqq (1+C^2)\|P_{\mathfrak{B}}y\|^2 = \frac{1}{c^2}\|P_{\mathfrak{B}}y\|^2,$$

ce qui achève la démonstration des relations (1.8).

2. Critère général de similitude à une transformation unitaire

1. Soit la contraction T de $\mathfrak{H}$ similaire à une transformation unitaire V, donc $T = S^{-1}VS$. Dans ce cas T^{-1} et T^{*-1} existent au sens strict et on a

$$T^{*-n} = S^*V^nS^{*-1}, \quad \|T^{*-n}\| \leqq \|S^*\|\,\|S^{*-1}\| = \frac{1}{c}, \quad \text{donc} \quad \|T^{*n}h\| \geqq c\|h\|$$

pour tout $h \in \mathfrak{H}$.

En vertu de (1. 3) on a

$$\|P_{\mathfrak{R}_0}h\| = \lim_n \|U^n T^{*n}h\| = \lim_n \|T^{*n}h\| \geqq c\|h\| \qquad (h \in \mathfrak{H})$$

et par conséquent $P_{\mathfrak{R}_0}\mathfrak{H}$ est un ensemble fermé. Vu aussi (1. 4) on aura donc

$$(2.1) \qquad P_{\mathfrak{R}_0}\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_0 \quad \text{et} \quad \|P_{\mathfrak{R}_0}h\| \geqq c\|h\| \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Cela nous permet d'appliquer le lemme de ci-dessus aux décompositions (1. 1) de $\mathfrak{R}$. En vertu de ce lemme, les relations (2. 1) entraînent

$$(2.2) \qquad P^{\mathfrak{L}_*}M_+(\mathfrak{L}) = M_+(\mathfrak{L}_*) \quad \text{et} \quad \|P^{\mathfrak{L}_*}l\| \geqq c\|l\| \quad \text{pour tout} \quad l \in M_+(\mathfrak{L}).$$

Puisque $P^{\mathfrak{L}_*}$ permute à U, les relations (2. 2) subsistent aussi pour $U^{-\nu}M_+$, au lieu de M_+ ($\nu = 0, 1, \ldots$), et comme ces sous-espaces vont en croissant et déterminent l'espace M en question, on aura, par raison de continuité,

$$(2.3) \qquad P^{\mathfrak{L}_*}M(\mathfrak{L}) = M(\mathfrak{L}_*) \quad \text{et} \quad \|P^{\mathfrak{L}_*}l\| \geqq c\|l\| \quad \text{pour tout} \quad l \in M(\mathfrak{L}).$$

Posons

$$(2.4) \qquad Q = P^{\mathfrak{L}_*}|M(\mathfrak{L}), \quad W = U|M(\mathfrak{L}), \quad W_* = U|M(\mathfrak{L}_*).$$

Nous avons, en vertu de (2. 2) et (2. 3),

$$\|Q\| \leqq 1, \quad QM(\mathfrak{L}) = M(\mathfrak{L}_*), \quad QM_+(\mathfrak{L}) = M_+(\mathfrak{L}_*), \quad QW = W_*Q,$$

$$\|Q^{-1}\| \leqq \frac{1}{c}, \quad Q^{-1}M(\mathfrak{L}_*) = M(\mathfrak{L}), \quad Q^{-1}M_+(\mathfrak{L}_*) = M_+(\mathfrak{L}), \quad Q^{-1}W_* = WQ^{-1}.$$

Dans l'hypothèse additionnelle que l'espace $\mathfrak{H}$ (et par conséquent l'espace $\mathfrak{R}$) sont *séparables,* ces relations nous permettent d'appliquer le lemme du n° 2 de [IX] et nous obtenons qu'il existe dans $D_0 = \{\lambda: |\lambda| < 1\}$ deux fonctions analytiques bornées

$$\{\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*, \Theta(\lambda)\} \quad \text{et} \quad \{\mathfrak{L}_*, \mathfrak{L}, \Omega(\lambda)\}.$$

telles que

$$\|\Theta(\lambda)\| \leqq 1 \quad \text{et} \quad \|\Omega(\lambda)\| \leqq \frac{1}{c},$$

et que, en considérant les représentations unitaires

$$\Phi^{\mathfrak{L}} \sum_{-\infty}^{\infty} W^n l_n = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{int} l_n \qquad (l_n \in \mathfrak{L}),$$

$$\Phi^{\mathfrak{L}_*} \sum_{-\infty}^{\infty} W_*^n l_n = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{int} l_n \qquad (l_n \in \mathfrak{L}_*)$$

de $M(\mathfrak{L})$ sur $L_0^2(\mathfrak{L})$ et de $M(\mathfrak{L}_*)$ sur $L_0^2(\mathfrak{L}_*)$,[2]) on a

$$(2.5) \qquad \Phi^{\mathfrak{L}_*}Qf = \Theta(e^{it})\Phi^{\mathfrak{L}}f \quad \text{pour} \quad f \in M(\mathfrak{L}),$$

---

[2]) Il s'agit des espaces des fonctions $l(t)$ ($0 \leqq t \leqq 2\pi$), à valeurs vecteurs dans $\mathfrak{L}$ ou $\mathfrak{L}_*$, selon les cas, mesurables et telles que $\|l(t)\|^2$ est intégrable. Le signe $_0$ veut indiquer que l'intégration doit être prise par rapport à la mesure normée $dt/(2\pi)$.

et

(2.6) $$\Phi^{\mathfrak{L}} Q^{-1} g = \Omega(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{L}_*} g \quad \text{pour} \quad g \in M(\mathfrak{L}_*).\ ^{3)}$$

Il s'ensuit que

$$\Theta(e^{it}) \Omega(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{L}_*} g = \Phi^{\mathfrak{L}_*} g \quad \text{pour} \quad g \in M(\mathfrak{L}_*)$$

et

$$\Omega(e^{it}) \Theta(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{L}} f = \Phi^{\mathfrak{L}} f \quad \text{pour} \quad f \in M(\mathfrak{L});$$

vu que $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}_*$ sont séparables, cela entraîne

$$\Theta(e^{it}) \Omega(e^{it}) = I_{\mathfrak{L}_*}, \quad \Omega(e^{it}) \Theta(e^{it}) = I_{\mathfrak{L}}$$

pour presque tous les $t \in (0, 2\pi)$ et par conséquent [4]

$$\Theta(\lambda) \Omega(\lambda) = I_{\mathfrak{L}_*}, \quad \Omega(\lambda) \Theta(\lambda) = I_{\mathfrak{L}} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in D_0,$$

donc $\Omega(\lambda) = \Theta(\lambda)^{-1}$.

Or, la fonction $\{\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*, \Theta(\lambda)\}$ coïncide avec la fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ de T où

$$\mathfrak{D}_T = \overline{D_T \mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*} \mathfrak{H}}, \quad D_T = (I - T^* T)^{1/2}, \quad D_{T^*} = (I - T T^*)^{1/2},$$

$$\Theta_T(\lambda) = \left[-T + \sum_1^\infty \lambda^n D_{T^*} T^{*n-1} D_T \right] \Big| \mathfrak{D}_T.\ ^{5)}$$

Ainsi il résulte que si la contraction T de l'espace (séparable) $\mathfrak{H}$ est similaire à une transformation unitaire, $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ existe au sens strict pour tout $\lambda \in D_0$ et est bornée par une constante indépendante de λ.

2. Montrons que la condition que nous venons d'obtenir est aussi suffisante pour que T soit similaire à une transformation unitaire.

En effet, on sait que la relation (2.5) est vérifiée pour toute contraction T, avec une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*, \Theta(\lambda)\}$ qui coïncide avec la fonction caractéristique de T; *cf.* [VIII], formule (3.16). Les hypothèses

$$\Theta_T(\lambda) \mathfrak{D}_T = \mathfrak{D}_{T^*}, \quad \|\Theta_T(\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{c} \quad (\lambda \in D_0)$$

entraînent

$$\Theta(\lambda) \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_*, \quad \|\Theta(\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{c} \quad (\lambda \in D_0),$$

donc on aura

(2.7) $$\|P^{\mathfrak{L}_*} f\|_{\mathfrak{K}} = \|\Phi^{\mathfrak{L}_*} P^{\mathfrak{L}_*} f\|_{L_0^2(\mathfrak{L}_*)} = \|\Theta(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{L}} f\|_{L_0^2(\mathfrak{L}_*)} \geq c \|\Phi^{\mathfrak{L}} f\|_{L_0^2(\mathfrak{L})} = c \|f\|_{\mathfrak{K}}$$

pour tout $f \in M(\mathfrak{L})$. De plus, $\{\mathfrak{L}_*, \mathfrak{L}, \Theta(\lambda)^{-1}\}$ étant une fonction analytique bornée, pour toute fonction $u_*(\lambda) \in H_0^2(\mathfrak{L}_*)$ on aura $u(\lambda) = \Theta(\lambda)^{-1} u_*(\lambda) \in H_0^2(\mathfrak{L})$,[6] d'où il

---

[3]) Égalités dans les espaces L_0^2 correspondants, c'est-à-dire pour presque tous les $t \in (0, 2\pi)$.
[4]) *Cf.* [IX], p. 292, note 14.
[5]) *Cf.* [VIII], n° 3, et [IX], p. 292.

s'ensuit que

$$\Theta H_0^2(\mathfrak{L}) \equiv \{\Theta u : u \in H_0^2(\mathfrak{L})\} = H_0^2(\mathfrak{L}_*).$$

Grâce à la relation (2. 5) ce résultat entraîne que

$$P^{\mathfrak{L}_*} M_+(\mathfrak{L}) = M_+(\mathfrak{L}_*). \tag{2. 8}$$

Eu égard aux décompositions (1. 1) de $\mathfrak{K}$, les relations (2. 7) et (2. 8) entraînent, en vertu du lemme du n° 1, que

$$P_{\mathfrak{K}_0}\mathfrak{H} = \mathfrak{K}_0 \quad \text{et} \quad \|P_{\mathfrak{K}_0}h\| \geqq c\|h\| \qquad (h \in \mathfrak{H}). \tag{2. 9}$$

Cela veut dire que la transformation linéaire

$$S = P_{\mathfrak{K}_0}|\mathfrak{H}$$

applique $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{K}_0$ de manière biunivoque et bicontinue. De la relation (1. 3) nous obtenons que

$$UP_{\mathfrak{K}_0}T^*h = \lim U^{n+1}T^{*n+1}h = P_{\mathfrak{K}_0}h \qquad (h \in \mathfrak{H}),$$

d'où

$$U_0ST^* = S, \quad TS^*U_0^* = S^*, \quad T = S^*U_0S^{*-1},$$

U_0 étant la transformation $U_0 = U|\mathfrak{K}_0$, qui est unitaire dans $\mathfrak{K}_0$.

3. Ainsi, nous avons démontré le suivant

Théorème 1. *Pour que la contraction T d'un espace de Hilbert (séparable) soit similaire à une transformation unitaire, il faut et il suffit que la fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ satisfasse à la condition que $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ existe au sens strict pour tout $\lambda \in D_0$ et est bornée par une constante indépendante de λ. Dans cette condition, T est notamment similaire à la partie $U_0 = U|\mathfrak{K}_0$ de sa dilatation unitaire minimum.*

Ajoutons le fait, démontré dans [VIII], n° 3, que dans le cas où T est complètement non-unitaire, la transformation U_0 est unitairement équivalente à la multiplication par la fonction e^{it} dans l'espace fonctionnel

$$\overline{\Delta_T L_0^2(\mathfrak{D}_T)} \quad \text{où} \quad \Delta_T(t) = [I - \Theta_T(e^{it})^* \Theta_T(e^{it})]^{1/2} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi). \tag{2. 10}$$

Par conséquent, si la contraction T est similaire à une transformation unitaire, la partie complètement non-unitaire de T est similaire à la multiplication par la fonction e^{it} dans l'espace (2. 10).

3. Une application

1. Envisageons une transformation linéaire dans l'espace (séparable) $\mathfrak{H}$, de la forme suivante:

$$A = R + iQ \tag{3. 1}$$

---

[6]) $H_0^2(\mathfrak{L})$ est le sous-espace de $L_0^2(\mathfrak{L})$, constitué des fonctions $u(e^{it})$, valeurs limites p. p. des fonctions $u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n l_n$, analytiques dans D_0, telles que $l_n \in \mathfrak{L}$, $\sum_0^\infty \|l_n\|^2 < \infty$. De même pour $\mathfrak{L}_*$.

où R et Q sont des transformations autoadjointes dont Q est positive et bornée. Cherchons des conditions dans lesquelles A est similaire à une transformation autoadjointe. Il ne restreint évidemment pas la généralité de supposer que $\|Q\|<1$. Dans ce cas $(A\pm iI)^{-1}$ existent au sens strict, conséquence de ce que $(R\pm iI)^{-1}$ existent au sens strict et sont bornées par 1, et de ce que, dans la relation

$$A\pm iI = R\pm iI+iQ = (R\pm iI)[I+i(R\pm iI)^{-1}Q]$$

on a $\|i(R\pm iI)^{-1}Q\| = \|(R\pm iI)^{-1}\|\,\|Q\|<1$. Puisque $Q\geqq O$, la transformée cayleyenne de A,

$$T = (A-iI)(A+iI)^{-1} = I-2i(A+iI)^{-1} \tag{3.2}$$

est une contraction dans $\mathfrak{H}$. Vu aussi la relation réciproque

$$A = i(I+T)(I-T)^{-1}, \tag{3.3}$$

il s'ensuit aussitôt que la décomposition de T en ses parties unitaire et complètement non-unitaire, $T = T_1\oplus T_0$, fournit une décomposition $A = A_1\oplus A_0$ en somme orthogonale d'une transformation autoadjointe A_1 et d'une transformation A_0 qui est, dans un sens évident, "complètement non-autoadjointe"[7]), pareille décomposition de A étant déterminée de manière univoque.

Il s'ensuit aussi que si T est similaire à une transformation unitaire, A est similaire (par la même transformation biunivoque et bicontinue S) à une transformation autoadjointe. Pour que ce soit le cas, il faut et il suffit, en vertu du théorème 1, que la fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ vérifie les conditions

$$\Theta_T(\lambda)\mathfrak{D}_T=\mathfrak{D}_{T^*} \quad \text{pour tout} \quad \lambda\in D_0 \tag{3.4}$$

et

$$\|\Theta_T(\lambda)g\|\geqq c\|g\| \quad \text{pour tout} \quad g\in\mathfrak{D}_T \text{ et } \lambda\in D_0, \tag{3.5}$$

avec une constante $c>0$.

Or, dans notre cas, (3. 4) est une conséquence des autres conditions. En effet, puisque $T^{-1} = (A+iI)(A-iI)^{-1}$ existe au sens strict, il s'ensuit de la relation

$$TD_T=D_{T^*}T$$ [8])

que $T\mathfrak{D}_T=\mathfrak{D}_{T^*}$; vu que $\Theta_T(0) = -T|\mathfrak{D}_T$, cela fournit (3. 4) pour $\lambda=0$. Vu aussi (3. 5) pour $\lambda=0$, il résulte que $\Theta_T(0)^{-1}$ existe au sens strict. Donc l'ensemble Λ des points $\lambda\in D_0$ pour lesquels $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ existe au sens strict[9]), n'est pas vide. Puisque l'ensemble Λ est évidemment ouvert, on aura démontré que $\Lambda=D_0$ dès qu'on montre que les hypothèses

$$\lambda_n\in\Lambda, \quad \lambda_n\to\lambda_0\in D_0$$

entraînent

$$\lambda_0\in\Lambda.$$

[7]) Ou "simple", dans la terminologie employée dans [1].

[8]) *Cf.* [VIII], note 1.

[9]) Remarquons, sans en faire usage, que Λ est, d'après [VIII] théorème 4, la partie de l'ensemble résolvant de T située dans D_0.

Or, cela s'ensuit de ce que $\|\Theta_T(\lambda_n)^{-1}\| \leqq 1/c$ en vertu de (3. 5), et que dans la relation

$$\Theta_T(\lambda_0) = \Theta_T(\lambda_n)[I + \Theta_T(\lambda_n)^{-1}(\Theta_T(\lambda_0) - \Theta_T(\lambda_n))]$$

on a $\|(\Theta_T(\lambda_0) - \Theta_T(\lambda_n))\| < c$ pour λ_n suffisamment proche de λ_0. Donc nous avons $\Lambda = D_0$ ce qui prouve que (3. 4) est une conséquence de (3. 5).

Vu que $D_T\mathfrak{H}$ est dense dans $\mathfrak{D}_T$, la condition (3. 5) est équivalente à la suivante:

$$\|\Theta_T(\lambda) D_T h\| \geqq c \|D_T h\| \qquad (h \in \mathfrak{H},\ \lambda \in D_0). \tag{3. 6}$$

Calculons ces opérateurs! En posant

$$J = (A + iI)^{-1} \tag{3. 7}$$

on arrive par un calcul simple aux relations

$$D_T^2 = 4J^* QJ, \quad D_{T^*}^2 = 4JQJ^*. \tag{3. 8}$$

Grâce à la relation

$$\Theta_T(\lambda) D_T = D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T) \quad (cf.\ [\text{VIII}],\ \text{n}^\circ\ 2),$$

on a donc

$$\|\Theta_T(\lambda) D_T h\|^2 = 4(QJ^*(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T)h,\ \ J^*(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T)h).$$

Soit z lié de λ par

$$z = i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}; \tag{3. 9}$$

lorsque $|\lambda| < 1$ on a $\operatorname{Im} z > 0$. Nous avons

$$J^*(I - \lambda T^*)(\lambda I - T) =$$

$$= J^* \left[I - \frac{z-i}{z+i}(A^* - iI)^{-1}(A^* + iI)\right]^{-1} \cdot \left[\frac{z-i}{z+i} I - (A - iI)(A + iI)^{-1}\right] =$$

$$= [(z+i)(A^* - iI) - (z-i)(A^* + iI)]^{-1} \cdot [(z-i)(A + iI) - (z+i)(A - iI)] J =$$

$$= (A^* - zI)(zI - A)J.$$

De cette manière,

$$\|\Theta_T(\lambda) D_T h\|^2 = 4(Q(A^* - zI)^{-1}(zI - A)Jh, (A^* - zI)^{-1}(zI - A)Jh). \tag{3. 10}$$

2. Appliquons ces formules au cas de la transformation

$$Ah(x) = a(x)h(x) + i\int_0^x h(t)\,dt$$

de l'espace $\mathfrak{H} = L^2(0, 1)$ où $a(x)$ est une fonction donnée, mesurable, à valeurs réelles et finies p. p. On a alors $A = R + iQ$ avec

$$Rh(x) = a(x)h(x) + \frac{i}{2}\left(\int_0^x - \int_x^1\right) h(t)\,dt, \quad Qh(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 h(t)\,dt = \frac{1}{2}(h, e_0)e_0 \tag{3. 11}$$

où $e_0(x) \equiv 1$; donc $Q \geqq O$, $\|Q\| = \frac{1}{2}$.

Le second membre de (3. 10) sera égal à

$$2\left|((A^*-zI)^{-1}(zI-A)Jh, e_0)\right|^2 = 2\left|(Jh, (\bar{z}I-A^*)(A-\bar{z}I)^{-1}e_0)\right|^2.$$

Or,

$$(\bar{z}I-A^*)(A-\bar{z}I)^{-1}e_0 = -e_0+2iQ(A-\bar{z}I)^{-1}e_0 =$$
$$= -e_0+i((A-\bar{z}I)^{-1}e_0, e_0)e_0 = \theta(z)e_0$$

où

(3. 12) $$\theta(z) = -1+i((A-\bar{z}I)^{-1}e_0, e_0) \qquad (\operatorname{Im} z>0).$$

Par suite (3. 10) prend la forme

(3. 13) $$\|\Theta_T(\lambda)D_Th\|^2 = 2|(Jh, e_0)|^2\cdot|\theta(z)|^2,$$

tandis que (3. 8) donne

(3. 14) $$\|D_Th\|^2 = 4(QJh, Jh) = 2|(Jh, e_0)|^2.$$

Ainsi la condition (3. 6) se réduit à la suivante:

(3. 15) $$|\theta(z)| \geqq c>0 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Im} z>0.$$

Calculons $\theta(z)$ de manière explicite! Dans ce but posons

$$u_z = (A+zI)^{-1}e_0 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Im} z\neq 0.$$

On a alors

(3. 16) $$(a(x)+z)u_z(x)+i\int_0^x u_z(t)\,dt = 1 \qquad (0\leqq x\leqq 1),$$

ou, en posant $(a(x)+z)u_z(x) = v_z(x)$,

$$v_z(x)+i\int_0^x \frac{v_z(t)}{a(t)+z}\,dt = 1.$$

Cette équation a la seule solution

(3. 17) $$v_z(x) = \exp\left(-i\int_0^x \frac{dt}{a(t)+z}\right).$$

En vertu de (3. 12), (3. 16) et (3. 17) on a donc pour $\operatorname{Im} z>0$:

$$\theta(z) = -1+i(u_{-\bar{z}}, e_0) = -v_{-\bar{z}}(1) = -\exp\left(-i\int_0^1 \frac{dt}{a(t)-\bar{z}}\right),$$

ou, en introduisant la fonction de répartition de $a(x)$, c'est-à-dire la fonction

$$\sigma(a) = \operatorname{mes}\{x:\ 0\leqq x\leqq 1,\ a(x)\leqq a\} \qquad (-\infty<a<\infty),$$

on a

(3. 18) $$\theta(z) = -\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(a)}{a-z}\right),$$

d'où

$$|\theta(z)| = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta\, d\sigma(a)}{(a-\alpha)^2+\beta^2}\right) \qquad (z = \alpha+i\beta,\ \beta>0). \tag{3.19}$$

Ainsi, la condition (3. 15) est équivalente à la suivante:

$$F(\alpha, \beta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{(a-\alpha)^2+\beta^2}\, d\sigma(a) \leqq M \qquad \left(M = \log \frac{1}{c};\ -\infty<\alpha<\infty,\ \beta>0\right). \tag{3.20}$$

Lorsque (3. 20) est vérifiée, on a pour tout intervalle fini (α_1, α_2) et pour tout $\beta>0$

$$M(\alpha_2-\alpha_1) \geqq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha, \beta)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\beta\, d\alpha}{(a-\alpha)^2+\beta^2}\right] d\sigma(a) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha_2-a}{\beta} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha_1-a}{\beta}\right] d\sigma(a).$$

Si α_1, α_2 sont des points de continuité de $\sigma(a)$, il en résulte, en faisant $\beta\to 0$ et en appliquant le lemme de Fatou, que

$$M(\alpha_2-\alpha_1) \geqq \pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\sigma(a) = \pi[\sigma(\alpha_2)-\sigma(\alpha_1)],$$

donc $\sigma(a)$ vérifie la condition de Lipschitz avec la constante M/π.

Réciproquement, pour $\sigma(a)$ vérifiant la condition de Lipschitz avec la constante M/π, on a

$$F(\alpha, \beta) \leqq \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta\, da}{(a-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{M}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{a-\alpha}{\beta}\right]_{a=-\infty}^{a=+\infty} = M,$$

donc (3. 20) subsiste.

De cette façon, nous avons démontré la partie a) du théorème suivant:

Théorème 2. *Soit A la transformation de $\mathfrak{H} = L^2(0, 1)$, définie par*

$$Ah(x) = a(x)h(x) + i\int_0^x h(t)\, dt \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

où $a(x)$ est une fonction donnée, mesurable, à valeurs réelles finies p. p.

a) *Pour que A soit similaire à une transformation autoadjointe, il faut et il suffit que $\sigma(a)$, la fonction de répartition de $a(x)$, soit Lipschitzienne.*

b) *Lorsque $\sigma(a)$ est Lipschitzienne, la partie complètement non-autoadjointe de A est similaire à l'opérateur de multiplication par la fonction ξ dans l'espace des* *fonctions* $\varphi(\xi)\in L^2(\Omega)$ *où*

$$\Omega=\{a\colon \sigma'(a)>0\}.$$

Reste à démontrer la partie b).

De (3. 13) et (3. 14) il résulte

$$\|\Theta(\lambda)g\| = |\theta(z)|\cdot\|g\|$$

d'abord pour $g\in D_T\mathfrak{H}$, puis par continuité pour tout $g\in\mathfrak{D}_T$. Donc on a pour tout point $e^{it}\neq 1$ où la limite radiale $\Theta(e^{it})$ existe,

$$\|\Theta(e^{it})g\| = \lim_{z\to\xi}|\theta(z)|\cdot\|g\| \tag{3. 21}$$

où ξ est l'image, située sur l'axe réelle, du point $\lambda=e^{it}$ par l'homographie (3. 9), c'est-à-dire

$$\xi=-\operatorname{cotg}\frac{t}{2},$$

la limite au point ξ étant du côté du demi-plan supérieur, non-tangentielle. Or, si la fonction $\sigma(a)$ est Lipschitzienne, on a

$$\lim_{z\to\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta\, d\sigma(a)}{(a-\alpha)^2+\beta^2} = \pi\sigma'(\xi) \tag{3. 22}$$

pour presque tous les $\xi\in(-\infty,\infty)$, limite non-tangentielle à l'axe réelle; *cf.* [2], p. 123. Ainsi, il résulte de (3. 19), (3. 21) et (3. 22) que

$$\|\Theta(e^{it})g\|^2 = \exp\big(-\pi\sigma'(\xi)\big)\cdot\|g\| \qquad (g\in\mathfrak{D}_T)$$

pour presque tous les points e^{it} du cercle unité, et par conséquent

$$\big(\Delta_T^2(t)g,g\big) = \big(1-\exp\big(-2\pi\sigma'(\xi)\big)\big)\cdot(g,g) \qquad (g\in\mathfrak{D}_T),$$

pour presque tous les $t\in(0,2\pi)$. Cela entraîne, pour ces t,

$$\Delta_T(t)g = \big(1-\exp\big(-2\pi\sigma'(\xi)\big)\big)^{1/2}g \qquad (g\in\mathfrak{D}_T). \tag{3. 23}$$

Observons encore que (3. 8) et (3. 11) entraînent

$$D_T^2h=4J^*QJh=2(Jh,e_0)J^*e_0 \qquad (h\in\mathfrak{H})$$

et que, en vertu de (3. 14) on a

$$\|D_Th_0\|^2=2|(e_0,e_0)|^2=2 \quad\text{pour}\quad h_0=(A+iI)e_0.$$

Puisque $\mathfrak{D}_T=\overline{D_T\mathfrak{H}}=\overline{D_T^2\mathfrak{H}}$, il s'ensuit de ces résultats que $\mathfrak{D}_T$ est constitué de tous les multiples numériques de J^*e_0, donc $\dim\mathfrak{D}_T=1$.

De cette façon, l'espace $\overline{\Delta_TL_0^2(\mathfrak{D}_T)}$ s'identifie à l'espace $\overline{\delta L_0^2(0,2\pi)}$ où

$$\delta(t)=\eta\left(-\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right),\quad \eta(\xi)=[1-\exp\big(-2\pi\sigma'(\xi)\big)]^{1/2}.$$

Ainsi, il s'ensuit que T_0, la partie complètement non-unitaire de T, est similaire à la multiplication par la fonction e^{it} dans l'espace $\overline{\delta L_0^2(0, 2\pi)}$. Par conséquent $A_0 = i(I+T_0)(I-T_0)^{-1}$, la partie complètement non-autoadjointe de A, sera similaire à l'opérateur de multiplication par $i\frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} = -\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$ dans $\overline{\delta L_0^2(0, 2\pi)}$.

Envisageons la transformation suivante:

$$f(t) \equiv F(e^{it}) \to \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\xi^2)}} F\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi;\ -\infty < \xi < \infty).$$

Elle applique $L_0^2(0, 2\pi)$ unitairement sur $L^2(-\infty, \infty)$ de sorte que le sous-espace $\overline{\delta L_0^2(0, 2\pi)}$ sera appliqué sur le sous-espace $\overline{\eta L^2(-\infty, \infty)}$ et que de plus à l'opérateur de multiplication par $-\operatorname{cotg} t/2$ dans le premier sous-espace il correspond l'opérateur de multiplication par ξ dans le second sous-espace. Or, l'espace $\overline{\eta L^2(-\infty, \infty)}$ s'identifie de manière évidente à l'espace $L^2(\Omega)$ où

$$\Omega = \{\xi : \eta(\xi) \neq 0\} = \{\xi : \sigma'(\xi) \neq 0\},$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

3. Dans le cas où la transformation A elle-même est complètement non-autoadjointe, donc $A = A_0$, notre théorème fournit (dans la condition, bien entendu, que $\sigma(a)$ soit Lipschitzienne) une transformation autoadjointe similaire à A. Tel est le cas par exemple lorsque

$$a(x) \equiv x, \quad \text{donc} \quad \sigma(a) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad a \leqq 0 \\ a & \text{pour} \quad 0 \leqq a \leqq 1, \\ 1 & \text{pour} \quad 1 \leqq a < \infty. \end{cases}$$

En effet, supposons qu'il existe un sous-espace $\mathfrak{H}'$ de $L^2(0, 1)$, qui réduisse A à une transformation autoadjointe. Puisque A est bornée, on a alors pour tout $h \in \mathfrak{H}'$

$$O = (A' - A'^*)h = (A - A^*)h = 2iQh = i(h, e_0)e_0,$$

donc $(h, e_0) = 0$. Par conséquent, on a aussi

$$(h, A^n e_0) = (A^{n*}h, e_0) = 0 \quad \text{pour} \quad h \in \mathfrak{H}' \text{ et } n = 1, 2, \ldots.$$

Or,

$$Ae_0 = x + ix = (1+i)x,$$

$$A^2 e_0 = (1+i)\left(1+\frac{i}{2}\right)x^2, \ldots, A^n e_0 = (1+i)\left(1+\frac{i}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{i}{n}\right)x^n, \ldots,$$

donc $h \perp x^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ce qui entraîne $h = 0$. Ainsi, $\mathfrak{H}' = \{0\}$, ce qui prouve que A est complètement non-autoadjointe.

Nous obtenons donc que *la transformation*

$$Ah(x) = xh(x) + i\int_0^x h(t)\,dt$$