Über eine Verallgemeinerung der Distributivitätsgleichung

Von M. HOSSZÚ in Miskolc (Ungarn)

1. Die Funktionalgleichung

$$F[G(x, y), u] = H[K(x, u), L(y, u)] \tag{1}$$

ist eine Verallgemeinerung der sogenannten Distributivitätsgleichung, wo wir speziell $G = H$, $F = K = L$ haben:

$$F[G(x, y), u] = G[F(x, u), F(y, u)]. \tag{2}$$

Eine weitere Verallgemeinerung ist

$$F_0[G(x_1, x_2, ..., x_n), u] = H[F_1(x_1, u), F_2(x_2, u), ..., F_n(x_n, u)]. \tag{3}$$

Hier können alle Veränderlichen x_i, u und die Werte der unbekannten Funktionen F_i, G, H aus verschiedenen Mengen gewählt werden. Im Spezialfall, daß G, x_i, bzw. H, F_i Elemente einer Menge Q bzw. Q' sind und u ein Parameter ist, gibt die Gleichung (3) die Definition des Homotopiebegriffes.

Nämlich bilden dann die Abbildungen $x \to F_i(x, u)$ für irgendwelches festes u einen Homotopismus, undzwar zwischen den Gruppoiden, die durch Q bzw. Q' definiert sind und welche die Funktionen G bzw. H als Gruppoidoperationen besitzen [2].

2. Man kann die folgenden Fragen stellen:

1. Was sind die allgemeinsten (umkehrbaren, stetigen, usw.) Lösungen F_i der Funktionalgleichung (3) für gegebene Funktionen G, H?

2. Was sind die Lösungen, wenn — umgekehrt — die F_i gegeben sind?

Vom algebraischen Standpunkt aus bedeutet die erste Frage, daß wir die Homotopismusrelationen zwischen zwei gegebenen Gruppoiden suchen. Die zweite Frage bedeutet, daß wir solche Gruppoiden suchen, die ein gegebenes System von Homotopismusrelationen haben. [1, 3]

Die Umkehrbarkeitsbedingungen als Nebenbedingungen für die Lösungen bedeuten, daß die gesuchten Homotopismusrelationen bzw. Gruppoiden als Isotopismusrelationen bzw. Quasigruppen auftreten. u hat die Rolle, zu zeigen, daß wir ein System der Homotopismen betrachten, die irgendwelche Bedingungen, wie die der Transivtiität, befriedigen [4].

Die Lösung für H ist eine ganz beliebige Funktion und im Falle der gegebenen F_i haben wir für G die Gestalt

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_0^{-1}\{H[F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)]\},$$

wo F_0^{-1} die inverse Funktion von F_0 bedeutet. Folglich beschäftigen wir uns im Späteren nur mit der ersten Frage, d. h. wir suchen die Lösung F_i der Funktionalgleichung für gegebene G, H.

3. Wir zeigen, daß die Verallgemeinerung (3) der Distributivitätsgleichung (2) sich mit Hilfe der eindeutigen Umkehrbarkeitsbedingungen über die Funktionen auf den Spezialfall $F_i = F$, $H = G$ reduzieren läßt.

Zuerst beschränken wir uns auf den Fall, daß die Funktionen G, H umkehrbar sind.

Definition 1. Eine Funktion G heißt *umkehrbar*, oder eine *Quasigruppenoperation*, wenn die Gleichung

$$y = G(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n) \tag{4}$$

für irgendein k ($k = 1, 2, \ldots, n$) und für irgendwelche fixierte Werte von a_i und y, eine eindeutige Lösung x hat.

Wir fixieren ein System von Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und bezeichnen dann die Umkehrfunktionen mit $x = G_k(y)$. Offenbar befriedigen die Funktionen G_k die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} G[a_1, \ldots, a_{k-1}, G_k(t), a_{k+1}, \ldots, a_n] &= \\ = G_k[G(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)] &= t \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{5}$$

Definition 2. G_0 heißt eine *Isotope* von G, wenn die Bedingung

$$\varphi_0[G_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = G[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)]$$

für irgendwelche eindeutig umkehrbare Abbildungen $x_i \to \varphi_i(x_i)$ gültig ist. G_0 ist eine *Hauptisotope* von G, wenn φ_0 die identische Abbildung ist.

Der Begriff des Isotopismus ist eine Verallgemeinerung des Begriffes des Isomorphismus, wo wir speziell $\varphi_i = \varphi$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) haben.

Es ist offensichtlich, daß jede Isotope einer Funktion G isomorph zu einer Hauptisotopen ist. Es sei nämlich $\bar{G}$ eine Isotope der G, d. h.

$$\bar{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_0^{-1}\{G[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)]\},$$

wo φ_0^{-1} die inverse Abbildung von φ_0 ist. Dann ist $\bar{G}$ isomorph zu der Hauptisotopen

$$G_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G\{\varphi_1[\varphi_0^{-1}(x_1)], \varphi_2[\varphi_0^{-1}(x_2)], \ldots, \varphi_n[\varphi_0^{-1}(x_n)]\}$$

der G, und die Abbildung $x \to \varphi_0(x)$ erzeugt den Isomorphismus:

$$\varphi_0[\bar{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = G_0[\varphi_0(x_1), \varphi_0(x_2), \ldots, \varphi_0(x_n)].$$

Im Falle, daß die Abbildungen φ_i nicht notwendig umkehrbar sind, sprechen wir über Homotopismus statt Isotopismus bzw. über Homomorphismus statt Isomorphismus. Es führt zu keinem Mißverständnis, wenn wir über den Homotopismus usw. der Funktionen statt des Homotopismus der Quasigruppen sprechen.

Definition 3. Die Quasigruppenoperation G_0 heißt eine *Loop-operation*, wenn ein Einheitselement e existiert, so daß

$$G_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k$$

für alle x_k und $x_i = e$ ($i \neq k$) gilt.

Hilfssatz. *Jede Loop-hauptisotope einer Quasigruppenoperation G hat die Gestalt*

(6) $$G_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G[G_1(x_1), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)],$$

wo die Funktionen G_k die mit Hilfe der Gleichung (5) mit irgendwelchen Elementen a_i definierten Umkehrfunktionen sind.

Beweis. Es sei

$$G_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)]$$

eine Loop-operation mit Einheitselement e. Dann zeigt die Substitution $x_i = e$ $(i \neq k)$, daß

$$\varphi_k(x_k) = G_k[G_0(e, \ldots, x_k, \ldots, e)] = G_k(x_k)$$

ist, wo G_k eine laut (5) mit $a_i = \varphi_i(e)$ definierte Umkehrfunktion bezeichnet.

Umgekehrt, (5) und (6) zeigen, daß wir

$$G_0[G(x_1, a_2, \ldots, a_n), G(a_1, x_2, a_3, \ldots, a_n), \ldots] = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

haben. Mit den Bezeichnungen

$$x_i = a_i \quad (i \neq k), \quad e = G(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$t = G(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

haben wir also

$$G_0(e, \ldots, t, e, \ldots, e) = t,$$

d. h. G_0 hat wirklich ein Einheitselement e.

4. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Es seien G, H gegebene Quasigruppenoperationen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Funktionalgleichung*

(3′) $$F_0[G(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = H[F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)]$$

ist, daß H eine solche Loop-isotope habe, die homomorph zu einer Loop-isotope von G ist. Man kann die allgemeinste Lösung für F_i folgendermaßen konstruieren: Mit Hilfe von beliebigen Konstanten a_i, b_i bildet man die Umkehrfunktionen G_k, H_k, welche die Bedingungen (5) und

(5′) $$H[b_1, \ldots, b_{k-1}, H_k(t), b_{k+1}, \ldots, b_n] = H_k[H(b_1, \ldots, b_{k-1}, t, b_{k+1}, \ldots, b_n)] = t$$

befriedigen. Dann konstruiert man die Loop-hauptisotopen (6) und

(6′) $$H_0(y_1, y_2, \ldots, y_n) = H[H_1(y_1), H_2(y_2), \ldots, H_n(y_n)].$$

Die allgemeinste Lösung F_0 ist ein beliebiger Homomorphismus der G_0 zu H_0:

(7) $$F_0[G_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = H_0[F_0(x_1), F_0(x_2), \ldots, F_0(x_n)].$$

Ferner, die allgemeinsten Lösungen für F_i $(i > 0)$ mit den Anfangsbedingungen

(8) $$F_i(a_i) = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sind

$$F_i(x) = H_i\{F_0[G_i^{-1}(x)]\}, \tag{9}$$

wo G_i^{-1} *die inverse Funktion der* G_i *bezeichnet, d. h.*

$$G_i^{-1}(x) = G(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n). \tag{10}$$

Beweis. Fixieren wir $x_i = a_i$ $(i \neq k)$ in (3′), so bekommen wir wegen (10) und (8)

$$\begin{aligned} F_0[G_k^{-1}(x_k)] &= H[F_1(a_1), \ldots, F_{k-1}(a_{k-1}), F_k(x_k), F_{k+1}(a_{k+1}), \ldots] = \\ &= H[b_1, \ldots, b_{k-1}, F_k(x_k), b_{k+1}, \ldots], \end{aligned}$$

folglich haben wir (9). Damit (9) die Funktionalgleichung (3′) befriedigt, ist es notwendig und hinreichend, daß

$$F_0[G(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = H(H_1\{F_0[G_1^{-1}(x_1)]\}, \ldots) = H_0\{F_0[G_1^{-1}(x_1)], \ldots\}$$

gilt. Das ist aber eben (7), wenn wir $G_k(x_k)$ statt x_k schreiben und (6) beachten. Endlich, da alle Loop-isotopen der G bzw. H zu einer Hauptisotopen von der Gestalt (6) bzw. (6′) mit geeigneten Konstanten a_i, b_i isomorph sind (siehe den Hilfssatz), haben wir die oben ausgesprochene Bedingung für die Lösbarkeit.

5. Bis jetzt reduzierten wir die Funktionalgleichung (3) zu dem Spezialfall $F_i = F$, d. h. zu (7). Wenn (7) eine eindeutig umkehrbare Lösung hat, dann können wir eine weitere Reduktion machen.

Satz 2. *Es sei $E(x)$ eine eindeutig umkehrbare partikuläre Lösung der Funktionalgleichung* (7) *für* F_0. *Dann ist*

$$F_0(x) = E[F_G(x)] = F_H[E(x)] \tag{11}$$

die allgemeinste Lösung von (7), wo F_G die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung

$$F_G[G(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = G[F_G(x_1), F_G(x_2), \ldots, F_G(x_n)] \tag{12}$$

und F_H die allgemeinste Lösung der analogen Gleichung (mit H statt G) ist.

Beweis. Setzen wir (11) in (7) ein, so bekommen wir z. B.

$$E\{F_G[G(x_1, x_2, \ldots, x_n)]\} = H\{E[F_G(x_1)], \ldots\} = E\{G[F_G(x_1), \ldots]\},$$

woraus (12) folgt. Wir bemerken, daß ein ähnliches Ergebnis gilt, wenn die partikuläre Lösung E nur eine einseitige Inverse hat.

Literatur

[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Basel—Stuttgart, 1960).

[2] R. H. Bruck, A survey of binary systems, *Ergebnisse d. Math.*, **20** (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958).

[3] M. Hosszú, A generalization of the functional equation of distributivity, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 67—80.

[4] M. Hosszú, Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects, *Publicationes Math. Debrecen*, **5** (1958), 294—329.

(Eingegangen am 3. Februar 1964)