Über die zulässigen Ideale in Szépschen Ringerweiterungen

Von L. C. A. VAN LEEUWEN in Delft (Holland)

Einleitung

In seiner Arbeit [4] hat J. SZÉP den Begriff der *allgemeinen Zerlegung* eines Ringes R eingeführt, d. h. R ist ein Ring mit zwei Unterringen A und B so beschaffen, daß die Beziehungen $R^+ = A^+ \oplus B^+$, $A \cap B = 0$ gelten, wobei durch R^+, A^+ und B^+ der Modul des Ringes R, A und B bezeichnet wird und $\oplus$ das Zeichen der direkten Summe (des Moduls) ist. Ein solcher Ring R wird bezeichnet mit $R = A \dot{+} B$. Umgekehrt sind zu beliebigen Ringen A, B diejenige Ringe R zu bestimmen, für die $R = A' \dot{+} B'$, $A' \cap B' = 0$, $A' \cong A$, $B' \cong B$ gelten, wobei $\cong$ die Isomorphie bezeichnet. Der Ring R entsteht also aus den Ringen A und B durch *allgemeine Zusammensetzung* und wir werden R eine *Szépsche Erweiterung* von A und B nennen.

Um die Struktur der Szépschen Erweiterungen kennen zu lernen, werden wir in dieser Arbeit eine Klasse von Idealen in solchen Ringen untersuchen. Ist R eine Szépsche Erweiterung von A und B, so entstehen in A bzw. B die von J. SZENDREI eingeführte *zulässige* Ideale in A bzw. B [3]. Es zeigt sich, daß es spezielle zulässige Ideale $T(\mathfrak{a})$ bzw. $T'(\mathfrak{b})$ in B bzw. A gibt, mit denen man eine Klasse von Idealen $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ bzw. $(T'(\mathfrak{b}), \mathfrak{b})$ in R bestimmen kann. Dabei sind $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ zulässige Ideale in A bzw. B. Wir werden zeigen, daß man mit Hilfe der zulässigen Idealen $T(\mathfrak{a})$ bzw. $T'(\mathfrak{b})$ in B bzw. A ein Kriterium dafür gewinnen kann, daß die Zusammensetzung $\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$ in R ein Ideal in R ist. Dabei sind $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ beliebige zulässige Ideale in A bzw. B (Satz 2 und 2a). Wenn A noch B ein Ideal in $R = A \dot{+} B$ ist und A noch B zulässige Unterringe enthalten, so existieren in R nur *echte* Ideale I, für die I^+ subdirekte Summe von A^+ und B^+ ist (Satz 3). Unter gewissen Voraussetzungen bezüglich der Idealen $T(\mathfrak{a})$ bzw. $T'(\mathfrak{b})$ in B bzw. A ist es möglich einen Verbandsisomorphismus zwischen den Verband der zulässigen Idealen in A und denselben Verband in B anzugeben. Auch besteht dann ein Isomorphismus des Verbandes der zulässigen Idealen in A (oder in B) auf den Verband der Ideale der Form $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ in R, wo $\mathfrak{a}$ zulässig in A ist (Sätze 4 und 5). Endlich werden wir den Restklassenring $R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ untersuchen, wo $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ zulässige Ideale in A bzw. B sind und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ein Ideal in R ist. Man kann zeigen, daß $R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cong A/\mathfrak{a} \dot{+} B/\mathfrak{b}$ (Satz 6), was eine Verallgemeinerung meines Satzes 1 in [1] ist. Umgekehrt, wenn $A/\mathfrak{a}$ bzw. $B/\mathfrak{b}$ zerfallende Everettsche Ringerweiterungen von $\mathfrak{a}$, bzw. $\mathfrak{b}$ sind [2], dann gibt es eine Szépsche Erweiterung R von A und B, in der $\mathfrak{a}^+ \oplus \mathfrak{b}^+$ Ideal ist derart, daß $R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cong$ $\cong A/\mathfrak{a} \dot{+} B/\mathfrak{b}$ (Satz 7).

1. Es seien A und B zwei gegebene (assoziative) Ringe. Das Szépsche Erweiterungsproblem besteht darin, aus den Ringen A und B alle Ringe R mit

$$R^{+} = \mathfrak{S}_1^{+} \oplus \mathfrak{S}_2^{+}, \quad \mathfrak{S}_1 \cong A, \quad \mathfrak{S}_2 \cong B, \quad \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = 0$$

zu bestimmen, wobei $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ Unterringe von R sind. Hierbei bezeichnet $\oplus$ die direkte Summe von Moduln, durch R^+ wird der Modul des Ringes R bezeichnet und $\cong$ ist das Zeichen des Isomorphismus.

Die Lösung dieses Problems gewinnt man folgenderweise: In der Menge $R = A \cdot B$ der (geordneten) Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ definieren wir die Gleichheit, die Addition und die Multiplikation durch die folgenden Relationen:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a', \quad b = b',$$

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \tag{A}$$

$$(a, b)(a', b') = (aa' + b_l a' + ab'_r, a_l b' + ba'_r + bb'), \tag{B}$$

wobei die Funktionen

$$b_l a, \ ab_r (\in A), \quad a_l b, \ ba_r (\in B) \tag{C}$$

den „Anfangsbedingungen”

$$b_l 0 = 0\, b_r = 0_l\, a = a\, 0_r = 0, \qquad a_l 0 = 0\, a_r = 0_l b = b\, 0_r = 0, \tag{D}$$

unterworfen sind. Die Struktur R ist dann und nur dann ein Ring, wenn

$$\begin{aligned} (b+b')_l a &= b_l a + b'_l a, & a(b+b')_r &= ab_r + ab'_r, \\ (a+a')_l b &= a_l b + a'_l b, & b(a+a')_r &= ba_r + ba'_r, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (bb')_l a &= b_l(b'_l a), & a(bb')_r &= (ab_r)b'_r, \\ (aa')_l b &= a_l(a'_l b), & b(aa')_r &= (ba_r)a'_r, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} b_l(a+a') &= b_l a + b_l a', & (a+a')b_r &= ab_r + a'b_r, \\ a_l(b+b') &= a_l b + a_l b', & (b+b')a_r &= ba_r + b'a_r, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} b_l(aa') &= (b_l a)a' + (ba_r)_l a', & (aa')b_r &= a(a'b_r) + a(a'_l b)_r, \\ a_l(bb') &= (a_l b)b' + (ab_r)_l b', & (bb')a_r &= b(b'a_r) + b(b'_l a)_r, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a(b_l a') + a(ba'_r)_r &= (ab_r)a' + (a_l b)_l a', \\ b(a_l b') + b(ab'_r)_r &= (ba_r)b' + (b_l a)_l b', \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} (b_l a)b'_r &= b_l(ab'_r), \\ (a_l b)a'_r &= a_l(ba'_r), \end{aligned} \tag{6}$$

für alle $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ erfüllt sind. Diese Ringe sind bis auf Isomorphie die sämtlichen Szépschen Erweiterungen R von A und B. ([3], [4], [5]). Die Elemente $(a, 0)$, $a \in A$ bilden einen Ring $(A, 0) \cong A$, und ebenso ist $(0, B) \cong B$. $(A, 0)$ und $(0, B)$ sind Unterringe von R und $R^+ = (A, 0)^+ \oplus (0, B)^+$.

2. Definition 1. Ein Unterring T von B wird *zulässig* genannt, wenn $a_l b, ba_r \in T$ für alle $b \in T$, $a \in A$ erfüllt ist. Ein Unterring S von A wird zulässig genannt, wenn $b_l a, ab_r \in S$ für alle $a \in S$, $b \in B$ erfüllt ist.

Es sei R eine Szépsche Erweiterung von A und B, bezeichnet mit $R = A \dotplus B$ und $\mathfrak{a}$ ein gegebenes zulässiges Ideal in A. (Das Wort „Ideal" hat immer die Bedeutung: „zweiseitiges Ideal"). Wir betrachten die Menge $T(\mathfrak{a})$ von Elementen $b \in B$, für die

$$(7) \qquad b_l a \in \mathfrak{a}, \quad ab_r \in \mathfrak{a}, \quad a(ba'_r)_r \in \mathfrak{a}$$

für alle $a, a' \in A$ erfüllt ist.

Wir beweisen, daß $T(\mathfrak{a})$ *ein Ideal in B ist*. Sind $b_1, b_2 \in T(\mathfrak{a})$, so folgt: $(b_1 - b_2)_l a = b_{1l} a - b_{2l} a \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in A$; $a(b_1 - b_2)_r = ab_{1_r} - ab_{2_r} \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in A$; $a((b_1 - b_2)a'_r)_r = a(b_1 a'_r - b_2 a'_r)_r = a(b_1 a'_r)_r - a(b_2 a'_r)_r \in \mathfrak{a}$ für alle $a, a' \in A$. Also $b_1 - b_2 \in T(\mathfrak{a})$. Ist $c \in B$, dann ist $cb \in T(\mathfrak{a})$ für jedes Element $b \in T(\mathfrak{a})$. Denn $(cb)_l a = c_l(b_l a) \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in A$, weil $\mathfrak{a}$ zulässig ist in A; $a(cb)_r = (ac_r)b_r \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in A$, weil $ac_r \in A$ für alle $a \in A$; und $a((cb)a'_r)_r = a(c(ba'_r) + c(b_l a')_r)_r = (ac_r)(ba'_r)_r + a(c(b_l a')_r)_r$ wobei $(ac_r)(ba'_r)_r \in \mathfrak{a}$ für alle $a, a' \in A$ nach (7) und $a(c(b_l a')_r)_r = -a(c_l(b_l a')) + (ac_r)(b_l a') + (a_l c)_l(b_l a') \in \mathfrak{a}$ für alle $a, a' \in A$ da jeder der Summanden zu $\mathfrak{a}$ gehört, also $a((cb)a'_r)_r \in \mathfrak{a}$ für alle $a, a' \in A$. Hieraus folgt $cb \in T(\mathfrak{a})$ für jedes Element $b \in T(\mathfrak{a})$. Ganz ähnlich sieht man ein, daß $bc \in T(\mathfrak{a})$ für jedes Element $b \in T(\mathfrak{a})$. Da c ein beliebiges Element aus B ist, ist damit gezeigt, daß $T(\mathfrak{a})$ ein Ideal in B ist.

$T(\mathfrak{a})$ *ist auch ein zulässiges Ideal in B* nach Definition 1. Dies bedeutet, daß $a_l b, ba_r \in T(\mathfrak{a})$ für alle $b \in T(\mathfrak{a})$, $a \in A$. Nach (7) haben wir zu zeigen, daß $(a_l b)_l a' \in \mathfrak{a}$, $a'(a_l b)_r \in \mathfrak{a}$, $a'((a_l b)a''_r)_r \in \mathfrak{a}$ für alle $a', a'' \in A$ erfüllt ist, und ähnlich für das Element ba_r. Für das Element $a_l b$ gilt: $(a_l b)_l a' = a(b_l a') + a(ba'_r)_r - (ab_r)a' \in \mathfrak{a}$, weil $b_l a' \in \mathfrak{a}$, $a(ba'_r)_r \in \mathfrak{a}$ und $ab_r \in \mathfrak{a}$; $a'(a_l b)_r = (a'a)b_r - a'(ab_r) \in \mathfrak{a}$, weil $a'a \in A$ und $ab_r \in \mathfrak{a}$; $a'((a_l b)a''_r)_r = (a'(a_l b)_r)a'' + (a'_l(a_l b))_l a'' - a'((a_l b)_l a'') \in \mathfrak{a}$, da $a'(a_l b)_r \in \mathfrak{a}$ und $(a_l b)_l a'' \in \mathfrak{a}$ (soeben bewiesen); daraus folgt $a_l b \in T(\mathfrak{a})$. Für das Element ba_r hat man: $(ba_r)_l a' = b_l(aa') - (b_l a)a' \in \mathfrak{a}$; $a'(ba_r)_r = (a'b_r)a + (a'_l b)_l a - a'(b_l a) \in \mathfrak{a}$, weil $a'_l b \in T(\mathfrak{a})$; $a'((ba_r)a''_r)_r = a'(b(aa'')_r)_r \in \mathfrak{a}$; daraus folgt $ba_r \in T(\mathfrak{a})$. Damit ist bewiesen, daß $T(\mathfrak{a})$ ein zulässiges Ideal in B ist.

Ebenso läßt sich zeigen, daß die Menge $T'(\mathfrak{b})$ von Elementen $a \in A$ für die

$$(8) \qquad a_l b \in \mathfrak{b}, \quad ba_r \in \mathfrak{b}, \quad b(ab'_r)_r \in \mathfrak{b}$$

für alle $b, b' \in B$ erfüllt ist, ein zulässiges Ideal in A bildet, wenn $\mathfrak{b}$ ein derartiges Ideal in B ist. Wir behaupten: $a_l b \in T(\mathfrak{a})$, $ba_r \in T(\mathfrak{a})$, $b(ab'_r)_r \in T(\mathfrak{a})$ für alle $a \in \mathfrak{a}$ $b, b' \in B$ oder $\mathfrak{a} \subseteq T'(T(\mathfrak{a}))$.

Um die Richtigkeit der Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $a_l b \in T(\mathfrak{a})$, $ba_r \in T(\mathfrak{a})$ für alle $a \in \mathfrak{a}$, $b \in B$. Wenn dies der Fall ist, so hat man: $b(ab'_r)_r = (ba_r)b' + (b_l a)_l b' - b(a_l b')$, wobei $ba_r \in T(\mathfrak{a})$, also $(ba_r)b' \in T(\mathfrak{a})$, weil $T(\mathfrak{a})$ zulässig ist. Aus $b_l a \in \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ ist zulässig) folgt $(b_l a)_l b' \in T(\mathfrak{a})$ wegen der Annahme $a_l b \in T(\mathfrak{a})$ für alle $a \in \mathfrak{a}$, $b \in B$. Und da $a_l b' \in T(\mathfrak{a})$ hat man auch $b(a_l b') \in T(\mathfrak{a})$. Damit ist gezeigt, daß $b(ab'_r)_r \in T(\mathfrak{a})$ für alle $a \in \mathfrak{a}$, $b, b' \in B$.

Sei jetzt $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in B$. Wir betrachten erst das Element $a_l b$. Man hat $(a_l b)_l a' = a(b_l a') + a(ba'_r)_r - (ab_r)a'$; $a(b_l a') \in \mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a}$ Ideal in A ist, $a(ba'_r)_r \in \mathfrak{a}$, weil $\mathfrak{a}$ zulässig ist in A und $(ab_r)a' \in \mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a}$ ein zulässiges Ideal in A ist. Also hat man $(a_l b)_l a' \in \mathfrak{a}$ *für alle* $a' \in A$. Und $a'(a_l b)_r = (a'a)b_r - a'(ab_r) \in \mathfrak{a}$ *für alle* $a' \in A$, da $\mathfrak{a}$ ein zulässiges Ideal in A ist. Wegen $a''((a_l b)a'_r)_r = a''(a_l(ba'_r))_r$ und $a''(a_l(ba'_r))_r \in \mathfrak{a}$ (soeben bewiesen), hat man auch $a''((a_l b)a'_r)_r \in \mathfrak{a}$ *für alle* $a'', a' \in A$. Nach (7) folgt hieraus $a_l b \in T(\mathfrak{a})$.

Für das Element ba_r beweist man analog, daß es zu $T(\mathfrak{a})$ gehört nach der Definition von $T(\mathfrak{a})$ in (7). Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Wir fassen die Ergebnisse zusammen in

Satz 1. *Ist $R = A \dotplus B$ eine Szépsche Erweiterung von A und B, dann kann man zu jedem zulässigen Ideal $\mathfrak{a}$ in A ein Ideal $T(\mathfrak{a})$ in B konstruieren nach* (7), *und $T(\mathfrak{a})$ ist ein zulässiges Ideal in B. Umgekehrt gehört zu jedem zulässigen Ideal $\mathfrak{b}$ in B ein zulässiges Ideal $T'(\mathfrak{b})$ in A nach* (8). *Dabei hat man:* $\mathfrak{a} \subseteqq T'(T(\mathfrak{a}))$ *und* $\mathfrak{b} \subseteqq T(T'(\mathfrak{b}))$.

Bemerkung. Anfangend mit einem zulässigen Ideal $\mathfrak{a}$ in A kann man also eine nicht absteigende Kette von zulässigen Idealen in A bilden:

$$\mathfrak{a} \subseteqq T'(T(\mathfrak{a})) \subseteqq T'(T(T'(T(\mathfrak{a})))) \subseteqq \dots .$$

In B hat man dann die nicht absteigende Kette:

$$T(\mathfrak{a}) \subseteqq T(T'(T(\mathfrak{a}))) \subseteqq T(T'(T(T'(T(\mathfrak{a}))))) \subseteqq \dots .$$

Es scheint uns eine interessante Untersuchung zu sein, wenn man den zulässigen Idealen z. B. in A eine Endlichkeitsbedingung auflegt, in der Art, daß die soeben betrachtete Kette von zulässigen Idealen in A im Endlichen abbricht. Dies hat zur Folge, daß auch die korrespondierende Kette von zulässigen Idealen in B im Endlichen abbricht. Gibt es vielleicht Szépsche Erweiterungsringe $R = A \dotplus B$ wofür dies für *jedes* zulässige Ideal in A der Fall ist?

3. Die zulässigen Ideale in A bzw. B der Struktur $T'(\mathfrak{b})$ bzw. $T(\mathfrak{a})$, wo $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ zulässige Ideale in A bzw. B sind, kann man benutzen bei den Untersuchungen über die Ideale in $R = A \dotplus B$.

Es sei wieder R eine Szépsche Erweiterung von A und B und $\mathfrak{a}$ ein gegebenes Ideal in A, das zulässig ist. Wir betrachten die Menge $K(\mathfrak{a})$ von Elementen $b \in B$, für die

$$b_l a \in \mathfrak{a}, \quad ab_r \in \mathfrak{a} \tag{9}$$

für alle $a \in A$ erfüllt ist.

Es ist klar, daß $T(\mathfrak{a}) \subseteqq K(\mathfrak{a})$. Aus dem Beweis, daß $T(\mathfrak{a})$ ein Ideal in B ist, ergibt sich unmittelbar, daß auch $K(\mathfrak{a})$ ein Ideal in B ist. $K(\mathfrak{a})$ ist aber im allgemeinen nicht zulässig, wie SZENDREI mit einem Beispiel für $\mathfrak{a} = 0$ gezeigt hat. Man kann $K(\mathfrak{a})$ auch als den Kern eines Homomorphismus von B auf einen Ring B^* bekommen wie folgt: Man kann die Funktionen $b_l a, ab_r$ als Operatorprodukte auffassen. In diesem Sinne ist A gleichzeitig ein Links- und Rechtsoperatorenbereich von B. Da $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A ist, kann man den Restklassenring $A/\mathfrak{a}$ bilden und $A/\mathfrak{a}$ als Links- und Rechtsoperatorenbereich sehen nach der Definition:

$$b_l(a+\mathfrak{a}) = b_l a + \mathfrak{a}, \quad (a+\mathfrak{a})b_r = ab_r + \mathfrak{a}. \tag{10}$$

Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der Representanten in $a+\mathfrak{a}$. Ist $a' \equiv a(\mathfrak{a})$, dann gilt $b_l(a'+\mathfrak{a}) = b_l a' + \mathfrak{a}$, aber $b_l(a'-a) = b_l a' - b_l a \in \mathfrak{a}$, weil $a'-a \in \mathfrak{a}$, also $b_l a' + \mathfrak{a} = b_l a + \mathfrak{a}$, und ebenso $a'b_r + \mathfrak{a} = ab_r + \mathfrak{a}$. Aus (10) folgt, daß jedes Element b von B eine Doppelabbildung: $a+\mathfrak{a} \to b_l(a+\mathfrak{a})$, $a+\mathfrak{a} \to (a+\mathfrak{a})b_r$ von $A/\mathfrak{a}$ in sich induziert. Diese durch b induzierte Doppelabbildung von $A/\mathfrak{a}$ in sich bezeichnen wir mit b^* und die Menge von b^* mit B^*. Aus (3) folgt, daß jede

Doppelabbildung b^* ein Doppelendomorphismus von $A/\mathfrak{a}$ ist. Für die Addition und Multiplikation dieser Doppelabbildungen definieren wir:

$$(11) \qquad b^* + b'^* = (b+b')^*, \quad b^*b'^* = (bb')^*.$$

Man kann nun beweisen, daß B^* mit dieser Addition und Multiplikation einen zu B homomorphen Ring bildet: d. h. $B \sim B^*(b \to b^*)$. Also besteht die homomorphe Abbildung einfach darin, daß man jedem Ringelement b die durch b induzierte Doppelabbildung b^* zuordnet. Der Kern dieses Homomorphismus ist die Menge der b mit $b_l(a+\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}, (a+\mathfrak{a})b_r = \mathfrak{a}$ für alle $a \in A$ oder $b_l a \in \mathfrak{a}, ab_r \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in A$, d. h. der Kern ist $K(\mathfrak{a})$, nach der Definition in (9).

Ebenso ist die Menge $K'(\mathfrak{b})$ der Elemente $a \in A$, für die $a_l b \in \mathfrak{b}, ba_r \in \mathfrak{b}$ für alle $b \in B$ erfüllt ist, ein Ideal in A, wenn $\mathfrak{b}$ ein zulässiges Ideal in B ist. Man hat: $T'(\mathfrak{b}) \subseteqq K'(\mathfrak{b})$.

Sind S bzw. T Teilmengen von A bzw. B, dann verstehen wir unter (S, T) die Gesamtheit derjenigen Elemente (a, b) aus R, für die $a \in S, b \in T$ gelten. Wir beweisen den

Satz 2. *$R = A \dotplus B$ sei eine Szépsche Erweiterung von A und B; $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ sind zulässige Ideale in A bzw. B. Dann ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ein Ideal in R dann und nur dann wenn: $\mathfrak{b} \subseteqq K(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{a} \subseteqq K'(\mathfrak{b})$.*

Beweis. Sei $a \in A$ und $b \in B$ und $(a_i, b_j) \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Offenbar gilt in R: $(a_i, b_j) - (a'_i, b'_j) = (a_i - a'_i, b_j - b'_j) \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, wenn $(a'_i, b'_j) \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ da $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ Ideale in A bzw. B sind. Weiter hat man: $(a, 0)(a_i, b_j) = (aa_i + ab_{j_r}, a_l b_j) \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dann und nur dann wenn $ab_{j_r} \in \mathfrak{a}$, weil aa_i bzw. $a_l b_j$ zu $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ gehören; $(0, b)(a_i, b_j) = (b_l a_i, ba_{i_r} + bb_j) \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dann und nur dann wenn $ba_{i_r} \in \mathfrak{b}$, weil $b_l a_i$ bzw. bb_j zu $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ gehören; ebenso $(a_i, b_j)(a, 0) \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leftrightarrow b_{j_l} a \in \mathfrak{a}$, und $(a_i, b_j)(0, b) \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leftrightarrow a_{i_l} b \in \mathfrak{b}$. Die notwendige und hinreichende Bedingung damit für (a_i, b_j) beliebig in $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ auch $(a, b)(a_i, b_j)$ und $(a_i, b_j)(a, b)$ zu $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gehören ist also: $b_{j_l} a, ab_{j_r} \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in A, b_j \in \mathfrak{b}$ und $a_{i_l} b, ba_{i_r} \in \mathfrak{b}$ für alle $b \in B, a_i \in \mathfrak{a}$. Man kann auch sagen: $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ist ein Ideal in R dann und nur dann, falls $b_j \in K(\mathfrak{a})$ für alle $b_j \in \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subseteqq K(\mathfrak{a})$ und $a_i \in K'(\mathfrak{b})$ für alle $a_i \in \mathfrak{a}$, oder $\mathfrak{a} \subseteqq K'(\mathfrak{b})$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir behaupten nun: aus $\mathfrak{a} \subseteqq K'(\mathfrak{b})$ folgt $\mathfrak{a} \subseteqq T'(\mathfrak{b})$. Denn, wenn $b, b' \in B$, $a \in \mathfrak{a} \subseteqq K'(\mathfrak{b})$, so brauchen wir nur noch zu zeigen, daß $b(ab'_r)_r \in \mathfrak{b}$. Man hat aber: $b(ab'_r)_r = (ba_r)b' + (b_l a)_l b' - b(a_l b')$. Da $ba_r \in \mathfrak{b}$ so folgt $(ba_r)b' \in \mathfrak{b}$; da $a_l b' \in \mathfrak{b}$, so ist auch $b(a_l b') \in \mathfrak{b}$; und wegen $b_l a \in \mathfrak{a}$ hat man $(b_l a)_l b' \in \mathfrak{b}$. Hieraus folgt $b(ab'_r)_r \in \mathfrak{b}$ für alle $b, b' \in B$, $a \in \mathfrak{a}$, weshalb $a \in T'(\mathfrak{b})$. Damit ist gezeigt: Wenn $\mathfrak{a}$ ein zulässiges Ideal in A ist und $\mathfrak{a} \subseteqq K'(\mathfrak{b})$, so gilt auch $\mathfrak{a} \subseteqq T'(\mathfrak{b})$. Ebenso: $\mathfrak{b} \subseteqq K(\mathfrak{a})$ impliziert $\mathfrak{b} \subseteqq T(\mathfrak{a})$.

Da $T'(\mathfrak{b}) \subseteqq K'(\mathfrak{b})$ auch ein zulässiges Ideal in A ist, so kann man sagen: *$T'(\mathfrak{b})$ ist das größte, in $K'(\mathfrak{b})$ enthaltene zulässige Ideal in A, und ebenso ist $T(\mathfrak{a})$ das größte, in $K(\mathfrak{a})$ enthaltene zulässige Ideal in B.*

Man hat auch: $T'(\mathfrak{b})(T(\mathfrak{a}))$ und $K'(\mathfrak{b})(K(\mathfrak{a}))$ enthalten *dieselbe* zulässige Ideale von $A(B)$. Den Satz 2 kann man nun ersetzen durch:

Satz 2a. *$R = A \dotplus B$ ist eine Szépsche Erweiterung von A und B; $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ sind zulässige Ideale in A bzw. B. Dann ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dann und nur dann ein Ideal in R wenn: $\mathfrak{a} \subseteqq T'(\mathfrak{b})$ und $\mathfrak{b} \subseteqq T(\mathfrak{a})$.*

Einige Spezialfälle des Satzes 2a sind:

a.) $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ ist ein Ideal in R dann und nur dann wenn $\mathfrak{a} \subseteqq T'(T(\mathfrak{a}))$ und $T(\mathfrak{a}) \subseteqq T(\mathfrak{a})$. Da $\mathfrak{a} \subseteqq T'(T(\mathfrak{a}))$ immer gilt, so ist $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ ein Ideal in R. Ebenso ist $(T'(\mathfrak{b}), \mathfrak{b})$ ein ideal in R.

Wenn $(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*)$ ein Ideal in R ist mit $\mathfrak{a}^* \subseteqq \mathfrak{a}$, so hat man $\mathfrak{b}^* \subseteqq T(\mathfrak{a})$. Aus der Definition von $T(\mathfrak{a})$ in (7) ist unmittelbar klar, daß aus $\mathfrak{a}^* \subseteqq \mathfrak{a}$ folgt $T(\mathfrak{a}^*) \subseteqq T(\mathfrak{a})$. Also $\mathfrak{b}^* \subseteqq T(\mathfrak{a}^*) \subseteqq T(\mathfrak{a})$. Bei festem zulässigen Ideal $\mathfrak{a}$ in A gilt also für jedes Ideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^*)$ in R, daß $\mathfrak{b}^* \subseteqq T(\mathfrak{a})$. Ebenso hat man bei festem zulässigen Ideal $\mathfrak{b}$ in B für jedes Ideal $(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b})$ in R, daß $\mathfrak{a}^* \subseteqq T'(\mathfrak{b})$.

b.) $(T'(\mathfrak{b}), T(\mathfrak{a}))$ ist ein Ideal in R dann und nur dann wenn $T'(\mathfrak{b}) \subseteqq T'(T(\mathfrak{a}))$, $T(\mathfrak{a}) \subseteqq T(T'(\mathfrak{b}))$. Dies ist immer der Fall wenn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ Ideal in R ist, denn aus $\mathfrak{b} \subseteqq T(\mathfrak{a})$ folgt $T'(\mathfrak{b}) \subseteqq T'(T(\mathfrak{a}))$ und aus $\mathfrak{a} \subseteqq T'(\mathfrak{b})$ folgt $T(\mathfrak{a}) \subseteqq T(T'(\mathfrak{b}))$.

c.) $(\mathfrak{a}, 0)$ ist ein Ideal in R dann und nur dann wenn $\mathfrak{a} \subseteqq T'(0)$. Da $(T'(0), 0)$ ein Ideal in R ist (sieh a), so folgt, daß jedes Ideal $(\mathfrak{a}, 0)$ in R eine Teilmenge des Ideals $(T'(0), 0)$ ist oder $(T'(0), 0)$ ist das größte in $(A, 0)$ enthaltene Ideal von R. Ebenso ist $(0, T(0))$ das größte in $(0, B)$ enthaltene Ideal von R. Weiter ist $(T'(0), T(0))$ ein Ideal in R, da $(0, 0)$ ein Ideal (das Nullideal) in R ist (sieh b).) Wir bemerken, daß SZENDREI [3] das in c.) gefundene schon in seinem Satz 2 bewiesen hat.

d.) $(0, T(\mathfrak{a}))$ ist ein Ideal in R dann und nur dann wenn $T(\mathfrak{a}) \subseteqq T(0)$ oder $T(\mathfrak{a}) = T(0)$, da $T(0) \subseteqq T(\mathfrak{a})$ für jedes zulässige Ideal $\mathfrak{a}$ in A. Ebenso ist $(T'(\mathfrak{b}), 0)$ ein Ideal in R dann und nur dann wenn $T'(\mathfrak{b}) = T'(0)$.

Definition 2. Unter einem *echten* Ideal S im Ring R verstehen wir ein Ideal $S \neq 0$ und $\neq R$.

Es sei $R = A \dotplus B$ eine Szépsche Erweiterung von A und B. Ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ein echtes Ideal in R, wobei $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ Ideale in A bzw. B sind, dann sind $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ auch zulässig in A bzw. B. Dabei ist $\mathfrak{a} \neq A$ oder $\mathfrak{b} \neq B$ oder beide und $\mathfrak{a} \neq 0$ oder $\mathfrak{b} \neq 0$ oder beide. Also enthält wenigstens der eine von A und B ein echtes zulässiges Ideal. Umgekehrt, sei $\mathfrak{a}$ ein echtes zulässiges Ideal in A. Dann ist $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ ein Ideal in R und $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a})) \neq (0, 0)$ denn $\mathfrak{a} \neq 0$, $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a})) \neq (A, B)$ denn $\mathfrak{a} \neq A$. Also ist $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ ein echtes Ideal in R.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß R ein echtes Ideal der Form $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ enthält, wo $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ Ideale in A bzw. B sind, ist, daß wenigstens der eine von A und B ein echtes zulässiges Ideal enthält.

Satz 3. *$R = A \dotplus B$ ist eine Szépsche Erweiterung von A und B, in der weder A noch B ein Ideal ist und weder A noch B zulässige Unterringe enthalten. Ist I ein echtes Ideal in R, dann ist I^+ subdirekte Summe von A^+ und B^+.*

Beweis. Ist I ein Ideal von $R = A \dotplus B$ bestehend aus den Elementen $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2, \ldots$ $(a_i \in A, b_i \in B, i = 1, 2, \ldots)$, so bilden die a_i bzw. b_i Unterringe A' bzw. B' von R. ([4], Satz 7). Wenn a ein beliebiges Element von A ist und $(a_i, b_i) \in I$, dann $(a, 0)(a_i, b_i) = (aa_i + ab_{i_r}, a_l b_i) \in I$, und es folgt, daß $a_l b_i \in B'$. Ähnlich folgt aus $(a_i, b_i)(a, 0) = (a_i a + b_{i_l} a, b_i a_r) \in I$ daß $b_i a_r \in B'$. Auf demselben Weg können wir $a_i b_r$, $b_l a_i \in A'$ $(b \in B)$ zeigen. Also sind A' bzw. B' zulässige Unterringe von A bzw. B nach Definition 1. Da A noch B einen echten zulässigen Unterring enthalten, hat man: $A' = 0$ oder $A' = A$ und ebenso $B' = 0$ oder $B' = B$. Man hat also 4 Fälle zu unterscheiden:

a.) $A'=0$ und $B'=0$. In diesem Falle ist $I=0$, also kein echtes Ideal in R. Widerspruch.

b.) $A'=0$ und $B'=B$. Dann ist $I\subseteq(0, B)$ und I ist ein Ideal in $(0, B)$. Wegen $(a, 0)(0, b_i) = (ab_{i_r}, a_l b_i)\in I$ für jedes $a\in A$ hat man $ab_{i_r}=0$ und $(0, a_l b_i)\in I$ für jedes $a\in A$. Ebenso ist $(0, b_i a_r)\in I$ für jedes $a\in A$. I ist also ein zulässiges Ideal in B (oder $(0, B)$). Da nun B keine zulässige Ideale enthält hat man $I=(0, 0)$ oder $I=(0, B)$. Wegen I ist ein echtes Ideal in R und B ist kein Ideal in R, hat man wieder einen Widerspruch.

c.) $A'=A$ und $B'=0$. Dann ist $I\subseteq(A, 0)$ und auf dieselbe Weise wie unter b. zeigt man, daß I ein zulässiges Ideal in A ist. Daraus folgt dann, daß $I=(0, 0)$ oder $I=(A, 0)$, was nicht der Fall ist, also ist auch diese Möglichkeit ausgeschlossen.

d.) $A'=A$ und $B'=B$. Dann ist I^+ ein Untermodul von $R^+ = (A, 0)^+\oplus(0, B)^+$ und durch die Zuordnung $(a_i, b_i)\to(a_i, 0)$ bzw. $(a_i, b_i)\to(0, b_i)$ wird ein Homomorphismus von I^+ auf $(A', 0)$ bzw. $(0, B')$ definiert. Da aber $A'=A$ und $B'=B$, so ist I^+ subdirekte Summe der Untermoduln $(A, 0)$ und $(0, B)$. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Wir beschäftigen uns nun mit denjenigen Ringen $R = A\dotplus B$, für welche

$$\mathfrak{a}=T'(T(\mathfrak{a})) \tag{12}$$

für jedes zulässige Ideal $\mathfrak{a}$ in A erfüllt ist und wobei jedes zulässige Ideal $\mathfrak{b}$ von B in der Form $\mathfrak{b}=T(\mathfrak{a})$ geschrieben werden kann.

Wir betrachten die Abbildung $T\colon \mathfrak{a}\to T(\mathfrak{a})$, die jedem zulässigen Ideal in A ein zulässiges Ideal in B zuordnet. Diese Abbildung ist eineindeutig. Es ist klar, daß wenn $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$, dann auch $T(\mathfrak{a})=T(\mathfrak{a}')$ ist nach der Definition in (7). Umgekehrt, wenn $\mathfrak{b}=T(\mathfrak{a})=T(\mathfrak{a}')$, dann folgt $\mathfrak{a}=T'(T(\mathfrak{a}))=T'(\mathfrak{b})$ und $\mathfrak{a}'=T'(T(\mathfrak{a}'))=T'(\mathfrak{b})$, also $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$. Für jedes zulässige Ideal $\mathfrak{b}$ in B gilt: aus $\mathfrak{b}=T(\mathfrak{a})$ folgt $T'(\mathfrak{b})=T'(T(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}$, also ist $\mathfrak{b}=T(T'(\mathfrak{b}))$ für jedes zulässige Ideal $\mathfrak{b}$ in B. Die Abbildung $T'\colon \mathfrak{b}\to T'(\mathfrak{b})$, die jedem zulässigen Ideal in B ein zulässiges Ideal in A zuordnet, ist also die inverse von T: $T'(\mathfrak{b})\to T(T'(\mathfrak{b}))=\mathfrak{b}$.

Da aus $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}'$ die Relation $T(\mathfrak{a})\subseteq T(\mathfrak{a}')$ folgt, ist die Abbildung T ordnungbehaltend. Der Durchschnitt $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'$ von zwei zulässigen Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ in A ist wieder ein zulässiges Ideal in A. Man kann also $T(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}')$ bilden. Aus der Definition in (7) folgt, daß $T(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}') = T(\mathfrak{a})\cap T(\mathfrak{a}')$. Auch die Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'$ von zwei zulässigen Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ in A ist wieder ein derartiges Ideal in A. Aus $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}'\subseteq\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'$ folgt $T(\mathfrak{a})\subseteq T(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}')$ und $T(\mathfrak{a}')\subseteq T(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}')$, also $T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{a}')\subseteq T(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}')$. Aus $T(\mathfrak{a})\subseteq T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{a}')$ folgt $T'(T(\mathfrak{a}))\subseteq T'(T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{a}'))$ oder $\mathfrak{a}\subseteq T'(T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{a}'))$. Ebenso $\mathfrak{a}'\subseteq T'(T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{a}'))$. Wegen $T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{a}')\subseteq T(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}')$ hat man $T'(T(\mathfrak{a})+ +T(\mathfrak{a}'))\subseteq\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'$. Setzen wir $T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{a}') = T(\mathfrak{b})$, so ist $T'(T(\mathfrak{b})) = \mathfrak{a}+\mathfrak{a}'$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}+\mathfrak{a}'$, und $T(\mathfrak{b}) = T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{a}') = T(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}')$.

Wir betrachten die Menge aller zulässigen Ideale $\mathfrak{a}$ in A. Mit der Relation der Inklusion ist diese Menge eine teilweise geordnete Menge. Es ist ein Verband in bezug auf die Operationen $\cap$ und $+$ wobei $\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2$ der Durchschnitt und $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2$ die Summe der Idealen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bedeutet. Dieser Verband wird bezeichnet mit $L(A)$. Das Nullideal ist das kleinste und A das größte Element von $L(A)$. Aus unseren Betrachtungen folgt nun:

Satz 4. *Wenn die Ideale von $L(A)$ der Bedingung* (12) *genügen und jedes zulässige Ideal* $\mathfrak{b}$ *in* B *das Bild eines zulässigen Ideals* $\mathfrak{a}$ *in* A *unter die Abbildung* $T: \mathfrak{a} \to T(\mathfrak{a})$ *von* $L(A)$ *auf* $L(B)$ *ist, dann ist die Abbildung* $T: \mathfrak{a} \to T(\mathfrak{a})$ *ein Verbandsisomorphismus von* $L(A)$ *auf* $L(B)$.

Man kann auch jedem zulässigen Ideal $\mathfrak{a}$ in A das eindeutig bestimmte Ideal $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ von R zuordnen. Aus $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}'$ folgt $T(\mathfrak{a}) \subseteqq T(\mathfrak{a}')$, also $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a})) \subseteqq (\mathfrak{a}', T(\mathfrak{a}'))$. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ Elemente von $L(A)$ so ist $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a})) \cap (\mathfrak{a}', T(\mathfrak{a}')) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}', T(\mathfrak{a}) \cap \cap T(\mathfrak{a}')) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}', T(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'))$ und $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a})) \cup (\mathfrak{a}', T(\mathfrak{a}')) = (\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a})) + (\mathfrak{a}', T(\mathfrak{a}')) = = (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}', T(\mathfrak{a}) + T(\mathfrak{a}')) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}', T(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}'))$. Es folgt:

Satz 5. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 4 ist die Abbildung* $\mathfrak{a} \to (\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ *ein Verbandsisomorphismus von* $L(A)$ *auf den Verband aller Ideale der Form* $(\mathfrak{a}, T(\mathfrak{a}))$ *in* R.

5. Es sei $R = A \dotplus B$ eine Szépsche Erweiterung von A und B. (Die Bedingung (12) setzen wir nicht voraus.) Die Ideale $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ sind zulässige Ideale in A bzw. B, und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ein Ideal in R. Wir wollen nun den Restklassenring $R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ untersuchen. Wir können eine Szépsche Erweiterung von $A/\mathfrak{a}$ und $B/\mathfrak{b}$ konstruieren, wenn wir definieren:

$$(a_1 + \mathfrak{a}, b_1 + \mathfrak{b}) + (a_2 + \mathfrak{a}, b_2 + \mathfrak{b}) = (a_1 + a_2 + \mathfrak{a}, b_1 + b_2 + \mathfrak{b}),$$

$$(a_1 + \mathfrak{a}, b_1 + \mathfrak{b})(a_2 + \mathfrak{a}, b_2 + \mathfrak{b}) =$$

$$= \big(a_1 a_2 + (b_1 + \mathfrak{b})_l (a_2 + \mathfrak{a}) + (a_1 + \mathfrak{a})(b_2 + \mathfrak{b})_r, (a_1 + \mathfrak{a})_l (b_2 + \mathfrak{b}) + (b_1 + \mathfrak{b})(a_2 + \mathfrak{a})_r + b_1 b_2\big),$$

wobei

$$(b_1 + \mathfrak{b})_l (a_2 + \mathfrak{a}) = b_{1_l} a_2 + \mathfrak{a}, \quad (a_1 + \mathfrak{a})(b_2 + \mathfrak{b})_r = a_1 b_{2_r} + \mathfrak{a},$$

$$(a_1 + \mathfrak{a})_l (b_2 + \mathfrak{b}) = a_{1_l} b_2 + \mathfrak{b}, \quad (b_1 + \mathfrak{b})(a_2 + \mathfrak{a})_r = b_1 a_{2_r} + \mathfrak{b}.$$

Aus der Tatsache, daß $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ zulässige Ideale in A bzw. B sind, kann man leicht beweisen, daß diese Definitionen der Funktionen unabhängig von der speziellen Wahl der Representanten von $A/\mathfrak{a}$ bzw. $B/\mathfrak{b}$ sind. Da $R = A \dotplus B$ eine Szépsche Erweiterung von A und B ist, so folgt daß die Funktionen $b_l a$, $ab_r (\in A)$ und $a_l b$, $ba_r (\in B)$ den Bedingungen (1)—(6) unterworfen sind. Deswegen genügen auch die oben eingeführten Funktionen in $A/\mathfrak{a}$ und $B/\mathfrak{b}$ den Bedingungen (1)—(6). Damit haben wir eine Szépsche Erweiterung R^* von $A/\mathfrak{a}$ und $B/\mathfrak{b}$ gefunden und es ist klar, daß die Abbildung $(a, b) \to (a + \mathfrak{a}, b + \mathfrak{b})$ ein Homomorphismus von $R = A \dotplus B$ auf R^* ist. Der Kern dieses Homomorphismus ist das Ideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Wir haben bewiesen den

Satz 6. *Ist* $R = A \dotplus B$ *eine Szépsche Erweiterung von* A *und* B *und* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *ein Ideal in* R, *wobei* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *zulässige Ideale in* A *bzw.* B *sind, dann ist* $R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cong \cong A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$.

Bemerkung. Im spezialen Fall $\mathfrak{a} = T'(0)$ und $\mathfrak{b} = T(0)$, hat man Satz 1 meiner Arbeit [1] gefunden.

Ist insbesondere $A = K'(\mathfrak{b})$ und $B = K(\mathfrak{a})$ für das Ideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in R, dann gilt: $R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cong A/\mathfrak{a} \oplus B/\mathfrak{b}$ (direkte Summe). Denn $A = K'(\mathfrak{b})$ bedeutet, daß $b_l a, ab_r \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ erfüllt ist, und das hat zur Folge, daß $(b + \mathfrak{b})_l (a + \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, $(a + \mathfrak{b})(b + \mathfrak{b})_r = \mathfrak{a}$, für alle $b \in B$ und $a \in A$ gilt. Ebenso folgt aus $B = K(\mathfrak{a})$, daß

$(a+\mathfrak{a})_l(b+\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ und $(b+\mathfrak{b})(a+\mathfrak{a})_r = \mathfrak{b}$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ erfüllt ist. Für die Multiplikation in $R^* = R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ hat man dann: $(a_1+\mathfrak{a}, b_1+\mathfrak{b})(a_2+\mathfrak{a}, b_2+\mathfrak{b}) = (a_1 a_2+\mathfrak{a}, b_1 b_2+\mathfrak{b})$, woraus die Behauptung unmittelbar vorgeht.

Umgekehrt entsteht nun das Problem: Es seien A und B gegebene Ringe und $A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$ ist eine gegebene Szépsche Erweiterung von $A/\mathfrak{a}$ und $B/\mathfrak{b}$. Dabei sind $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ Ideale in A bzw. B. Kann man eine Szépsche Erweiterung $R = A \dotplus B$ von A und B konstruieren, derart, daß $\mathfrak{a}^+ \oplus \mathfrak{b}^+$ Ideal in R ist und $R/(\mathfrak{a}^+ \oplus \mathfrak{b}^+) \cong A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$ ist?

Eine teilweise Lösung dieses Problems wird gegeben in

Satz 7. *A und B sind gegebene Ringe und $R' = A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$ ist eine Szépsche Erweiterung von $A/\mathfrak{a}$ und $B/\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ sind Ideale in A bzw. B. Eine hinreichende Bedingung, damit es eine Szépsche Erweiterung R von A und B gibt, in der $\mathfrak{a}^+ \oplus \mathfrak{b}^+$ ein Ideal ist und derart, daß $R/\mathfrak{a}^+ \oplus \mathfrak{b}^+ \cong A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$ ist, daß die Restklassenringe $A/\mathfrak{a}$ bzw. $B/\mathfrak{b}$ je einen Repräsentantensystem enthalten, das einen Ring bildet.*

Beweis. Die Elemente von $R' = A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$ sind die Paare $(a+\mathfrak{a}, b+\mathfrak{b})$ $(a+\mathfrak{a} \in A/\mathfrak{a},\ b+\mathfrak{b} \in B/\mathfrak{b})$ mit der Addition

$$(a+\mathfrak{a}, b+\mathfrak{b})+(a'+\mathfrak{a}, b'+\mathfrak{b}) = (a+a'+\mathfrak{b}, b+b'+\mathfrak{b})$$

und der Multiplikation

$$(a+\mathfrak{a}, b+\mathfrak{b})(a'+\mathfrak{a}, b'+\mathfrak{b}) =$$
$$=\big(aa'+(b+\mathfrak{b})_l(a'+\mathfrak{a})+(a+\mathfrak{a})(b'+\mathfrak{a})_r,\ (a+\mathfrak{a})_l(b'+\mathfrak{b})+(b+\mathfrak{b})(a'+\mathfrak{a})_r+bb'\big),$$

wobei die Funktionen $(b+\mathfrak{b})_l(a'+\mathfrak{a})$, $(a+\mathfrak{a})(b'+\mathfrak{b})_r$ $(\in A/\mathfrak{a})$ und $(a+\mathfrak{a})_l(b'+\mathfrak{b})$, $(b+\mathfrak{b})(a'+\mathfrak{a})_r$ $(\in B/\mathfrak{b})$ den Bedingungen (D), (1)—(6) unterworfen sind. Es sei nun $f(a+\mathfrak{a})$ $(\in a+\mathfrak{a})$ bzw. $g(b+\mathfrak{b})$ $(\in b+\mathfrak{b})$ ein Repräsentantensystem in $A/\mathfrak{a}$ bzw. $B/\mathfrak{b}$, das einen Ring bildet; d. h.

$$f(a+\mathfrak{a})+f(a'+\mathfrak{a}) = f(a+a'+\mathfrak{a});\ f(\mathfrak{a})=0;$$

$f(a+\mathfrak{a})f(a'+\mathfrak{a}) = f(aa'+\mathfrak{a})$ und ähnlich für $g(b+\mathfrak{b})$. Die Restklassen mod $\mathfrak{a}$ lassen sich also mit den sämtlichen Elementen eines Unterringes von A repräsentieren, d. h. A „zerfällt" in eine schlichte Summe des Ideals $\mathfrak{a}$ und des Unterringes der $f(a+\mathfrak{a})$. Ebenso zerfällt B in die Summe des Ideals $\mathfrak{b}$ und des Unterringes der $g(b+\mathfrak{b})$. Die „Funktionenvierer" $b_l a$, ab_r $(\in A)$, $a_l b$, ba_r $(\in B)$ für die Szépsche Erweiterung $R = A \dotplus B$ definieren wir wie folgt:

$$b_l a = f\big((b+\mathfrak{b})_l(a+\mathfrak{a})\big),\ ab_r = f\big((a+\mathfrak{a})(b+\mathfrak{b})_r\big),$$

$$a_l b = g\big((a+\mathfrak{a})_l(b+\mathfrak{b})\big),\ ba_r = g\big((b+\mathfrak{b})(a+\mathfrak{a})_r\big).$$

Ist $b^* \equiv b \pmod{\mathfrak{b}}$ und $a^* \equiv a \pmod{\mathfrak{a}}$, dann ist $b_l^* a^* = f\big((b^*+\mathfrak{b})_l(a^*+\mathfrak{a})\big) = f\big((b+\mathfrak{b})_l(a+\mathfrak{a})\big) = b_l a$ und ähnlich für ab_r, $a_l b$ und ba_r. Wegen $f(\mathfrak{a})=0$ und $g(\mathfrak{b})=0$ genügen die Funktionen der Bedingung (D). Man hat nun $(b+b')_l a = f\big((b+b'+\mathfrak{b})_l(a+\mathfrak{a})\big) = f\big((b+\mathfrak{b})_l(a+\mathfrak{a})+(b'+\mathfrak{b})_l(a+\mathfrak{a})\big) = f\big((b+\mathfrak{b})_l(a+\mathfrak{a})\big)+ f\big((b'+\mathfrak{b})_l(a+\mathfrak{a})\big) = b_l a+b'_l a$ und wenn man benutzt, daß die Repräsentanten $f(a+\mathfrak{a})$ bzw. $g(b+\mathfrak{b})$ einen Ring in A bzw. B bilden, beweist man die übrigen Formeln von (1) und auch (2)—(6) auf dieselbe Weise. Damit hat man eine Szépsche

Erweiterung $R = A \dotplus B$ von A und B konstruiert. Es ist klar, daß die Abbildung $(a, b) \to (a + \mathfrak{a}, b + \mathfrak{b})$ ein Homomorphismus von R auf R' ist, dessen Kern das Ideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in R ist. Also ist $R/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cong R'$ und der Satz bewiesen.

Man kann noch bemerken, daß das Ideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ hier die direkte Summe der Ideale $(\mathfrak{a}, 0)$ und $(0, \mathfrak{b})$ in $(A, 0)$ und $(0, B)$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] L. C. A. van Leeuwen, On ring extensions of Szép, *Nederl. Akad. Wet. Proc.*, ser. A, **67** (1964), 40–47.
[2] L. Rédei, *Algebra*. I (Leipzig, 1959).
[3] J. Szendrei, Über die Szépschen Ringerweiterungen, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 166–172.
[4] J. Szép, Über eine neue Erweiterung von Ringen. I, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 51–62.
[5] J. Szép, Über eine neue Erweiterung von Ringen. II, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 202–214.

(Eingegangen am 18. April 1964)