# Über die Existenz normaler Komplemente zu gewissen Hallgruppen

Von LUDWIG PROHASKA in Rostock (DDR)

**1.** $G$ sei eine endliche Gruppe, $e$ ihr Einselement. $N \subseteqq| G$ bezeichne einen Normalteiler $N$ von $G$. $N$ heißt *normales Komplement* zu der Untergruppe $U$ von $G$, wenn $G = UN$ mit $U \cap N = \{e\}$ und $N \subseteqq| G$ ist. Hat in der Nebenklassenzerlegung

$$G = \sum_{r_i \in R} U r_i$$

von $G$ nach $U$ das Repräsentantensystem $R$ die Eigenschaft

$$u^{-1} R u = R \quad \text{für jedes } u \in U,$$

so wird $R$ *ausgezeichnetes Repräsentantensystem* genannt [3].

Mit Hilfe dieses Begriffs läßt sich ein bekannter Satz von BURNSIDE [1], S. 327, folgendermaßen aussprechen [3]:

*Eine abelsche Sylowgruppe $P$ von $G$ hat genau dann ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem in $G$, wenn sie in $G$ ein normales Komplement besitzt.*

KOCHENDÖRFFER [3] und ZAPPA [4] zeigten, daß hierin eine geringere Voraussetzung über $P$ an die Stelle von „abelsche Sylowgruppe" treten kann. ZAPPA setzte dafür „nilpotente Hallgruppe" und wies in einer Anmerkung zu [4] darauf hin, daß noch eine weitere Abschwächung möglich ist. Dafür soll in der vorliegenden Arbeit ein Beweis gegeben werden, der sich stützt auf den

Satz (FROBENIUS [2]). *$P$ sei eine $p$-Sylowgruppe von $G$. Für jedes Element $g \in G$ mit zu $p$ teilerfremder Ordnung und für jede Untergruppe $Q$ von $G$, deren Ordnung eine Potenz von $p$ ist, möge gelten: wenn $g$ im Normalisator $N_G(Q)$ von $Q$ in $G$ liegt, dann sogar im Zentralisator $Z_G(Q)$ von $Q$ in $G$.*

*Dann besitzt $P$ in $G$ ein normales Komplement.*

**2.** $\pi$ sei eine Primzahlmenge. Eine Gruppe wird *$\pi$-Gruppe* genannt, wenn jeder Primfaktor ihrer Ordnung in $\pi$ enthalten ist.

Von ZAPPA [4] wurde angegeben das

Lemma. *Sei $H$ eine Hallgruppe von $G$, die in $G$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem $R$ besitzt. $\pi$ bezeichne die Menge der Primteiler der Ordnung $|H|$ von $H$. Für jede Untergruppe $Q \subseteqq H$ gilt dann: $N_G(Q)/Z_G(Q)$ ist eine $\pi$-Gruppe.*

Beweis. $N_G(Q)/Z_G(Q)$ ist isomorph zur Gruppe der Automorphismen, die von Elementen aus $N_G(Q)$ in $Q$ induziert werden. Daher genügt es zu zeigen, daß die Ordnungen aller dieser Automorphismen nur Primteiler aus $\pi$ enthalten. Sei $n \in N_G(Q)$ und $q$ ein beliebiges Element aus $Q$. Es ist $n = hr$ mit $h \in H$ und $r \in R$; $h^{-1}qh = h_1 \in H$; $n^{-1}qn = r^{-1}h^{-1}qhr = r^{-1}h_1 r \in H$. Da $R$ ausgezeichnet ist, gilt weiter $n^{-1}qn = h_1 r_1^{-1} r$, also $r_1^{-1} r = h_2 \in H$ und $r = r_1 h_2 = h_2 r_2$ mit $r_1, r_2 \in R$. Daraus folgt aber $h_2 = e$ und $r_1 = r$. $n$ und $h$ induzieren also denselben Automorphismus in $Q$. Seine Ordnung ist ein Teiler von $|H|$ und enthält deshalb nur Primteiler aus $\pi$.

Hieraus erhält man den

Satz 1. *Die Sylowgruppe $P$ von $G$ habe in $G$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem. Dann besitzt $P$ in $G$ ein normales Komplement.*

Beweis. Es sei $|P| = p^\lambda$ und $Q$ eine Untergruppe von $G$ mit $p$-Potenzordnung. Dann gibt es ein Element $x \in G$ mit $x^{-1}Qx \subseteq P$. Die Ordnung $|g|$ des Elements $g \in G$ sei nicht durch $p$ teilbar. Liegt $g$ in $N_G(Q)$, so $x^{-1}gx$ in $N_G(x^{-1}Qx)$. Nach dem Lemma ist dann $(x^{-1}gx)^{p^\lambda}$ in $Z_G(x^{-1}Qx)$. Da $(p, |g|) = 1$, liegt auch $x^{-1}gx$ in $Z_G(x^{-1}Qx)$ und daher $g \in Z_G(Q)$. Nach dem Satz von Frobenius existiert deshalb ein normales Komplement zu $P$ in $G$.

3. $G$ heißt *Gruppe mit Sylowturm*, wenn sie eine Untergruppenkette

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{r-1} \supset G_r = \{e\}$$

besitzt, in der $G_i \subseteq | G$ und $G_{i-1}/G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ einer Sylowgruppe von $G$ isomorph ist.

Ist $G$ eine Gruppe mit Sylowturm und $U$ eine Untergruppe von $G$, so erkennt man bei Betrachtung der Durchschnitte $U_i = G_i \cap U$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$, daß auch $U$ eine Gruppe mit Sylowturm ist.

Offenbar besitzt jede nilpotente Gruppe einen Sylowturm. Auch jede überauflösbare Gruppe hat einen Sylowturm, denn zu jeder überauflösbaren Gruppe existiert eine Hauptreihe, in der die Indizes der Größe nach geordnet sind.

Satz 2. *Die Hallgruppe $H$ von $G$ habe in $G$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem. $H$ sei eine Gruppe mit Sylowturm. Dann besitzt $H$ in $G$ ein normales Komplement.*

Beweis. Ist $|H|$ durch genau $n$ verschiedene Primzahlen teilbar, so enthält $H$ als Sylowturmgruppe sicher eine invariante Hallgruppe $H_m$, deren Ordnung durch genau $n - m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ verschiedene Primzahlen teilbar ist. $H$ enthält als auflösbare Gruppe eine Hallgruppe $H^{(m)}$ mit $H = H_m H^{(m)}$, $H_m \cap H^{(m)} = \{e\}$. $H^{(m)}$ hat das ausgezeichnete Repräsentantensystem $H_m$ in $H$ und seine Ordnung ist durch genau $m$ verschiedene Primzahlen teilbar.

Besitzt $H$ in $G$ das ausgezeichnete Repräsentantensystem $R$ und die Untergruppe $U$ von $H$ das ausgezeichnete Repräsentantensystem $T$ in $H$, so bilden die Elemente des Komplexes $TR$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem für $U$ in $G$. Wir betrachten nun die Sylowgruppen von $H$. Sie sind gleichzeitig Sylowgruppen von $G$. Diejenigen, die ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem in $H$ haben, haben auch eines in $G$. Nach Satz 1 besitzen sie ein normales Komplement in $G$.

Jetzt machen wir die Induktionsannahme: Jede Hallgruppe von $H$, die in $H$ und daher auch in $G$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem hat und deren

Ordnung höchstens durch $m$ $(1 \leqq m < n)$ verschiedene Primzahlen teilbar ist, besitzt in $G$ ein normales Komplement. Behauptung: Dann besitzt auch jede Hallgruppe von $H$, die in $H$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem hat und deren Ordnung durch genau $m+1$ verschiedene Primzahlen teilbar ist, ein normales Komplement in $G$.

Diese Behauptung wird folgendermaßen bewiesen:

Sei $U$ eine Hallgruppe von $H$ mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem, deren Ordnung durch genau $m+1$ verschiedene Primzahlen teilbar ist. $U$ ist eine Gruppe mit Sylowturm.

$$U = U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_m \supset U_{m+1} = \{e\}$$

sei die entsprechende Untergruppenkette.

$U$ ist als Gruppe mit Sylowturm auflösbar und besitzt daher eine Hallgruppe $U^{(m)}$, für die gilt

$$U = U^{(m)} U_m \quad \text{mit } U^{(m)} \cap U_m = \{e\} \text{ und } U_m \subseteqq | U.$$

$U$ hat ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem in $H$. $U_m$ ist ausgezeichnetes Repräsentantensystem für $U^{(m)}$ in $U$. Daher hat $U^{(m)}$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem in $H$. Ferner ist $U^{(m)}$ Hallgruppe von $H$. $|U^{(m)}|$ ist genau durch $m$ verschiedene Primzahlen teilbar. Nach der Induktionsannahme besitzt $U^{(m)}$ also ein normales Komplement $M_m$ in $G$:

$$G = U^{(m)} M_m.$$

Da $M_m$ Normalteiler von $G$ ist, liegt die Sylowgruppe $U_m$ von $G$ in $M_m$.

$\pi$ bezeichne die Menge der Primteiler von $|U|$, $\pi'$ die komplementäre Menge. Ist $|U_m| = p_{m+1}^{\mu}$, so ist $p_{m+1}$ die einzige Primzahl aus $\pi$, die $|M_m|$ teilt. Daher liegen alle $\pi$-Untergruppen von $M_m$ in $U_m$ oder einer dazu konjugierten Untergruppe. Sei $W$ eine $\pi$-Untergruppe von $M_m$. Dann gibt es ein Element $y \in M_m$ mit $y^{-1} W y = W^* \subseteqq U_m$. Nach dem Lemma ist $N_G(W^*)/Z_G(W^*)$ eine $\pi$-Gruppe. Die Ordnungen der Automorphismen von $W^*$, die durch die Elemente von $N_{M_m}(W^*) \subseteqq N_G(W^*)$ induziert werden, enthalten nur Primteiler aus $\pi$. Andererseits muß die Ordnung jedes durch ein Element aus $N_{M_m}(W^*)$ erzeugten Automorphismus von $W^*$ ein Teiler von $|M_m|$ sein. Deshalb ist $N_{M_m}(W^*)/Z_{M_m}(W^*)$ eine $p_{m+1}$-Gruppe.

Die Ordnung des Elements $Z \in M_m$ sei nicht durch $p_{m+1}$ teilbar. Liegt $z$ in $N_{M_m}(W)$, so $y^{-1} z y$ in $N_{M_m}(y^{-1} W y) = N_{M_m}(W^*)$ und $(y^{-1} z y)^{p_{m+1}^{\mu}}$ in $Z_{M_m}(W^*)$. Da $(p_{m+1}, |Z|) = 1$, ist auch $y^{-1} z y \in Z_{M_m}(W^*)$ und daher $z \in Z_{M_m}(W)$. Nach dem Satz von FROBENIUS existiert deshalb ein normales Komplement $M$ zu $U_m$ in $M_m$:

$$M_m = U_m M.$$

$M$ ist als Erzeugnis aller Sylowgruppen von $M_m$, die zu den Primzahlen aus $\pi'$ gehören, charakteristische Untergruppe von $M_m$ und daher Normalteiler von $G$. Es ist

$$G = U^{(m)} M_m = U^{(m)} U_m M = UM \quad \text{mit } U \cap M = \{e\}.$$

$M$ ist also normales Komplement zu $U$ in $G$.

Dieser Induktionsschluß beweist den Satz 2.

## Literatur

[1] W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, 2. ed. (Cambridge, 1911).
[2] G. FROBENIUS, Über auflösbare Gruppen. V, *Sitzungsber. preuß. Akad. Wiss.*, **1901**, 1324—1329.
[3] R. KOCHENDÖRFFER, Ein Satz über Sylowgruppen, *Math. Nachr.*, **17** (1959), 189—194.
[4] G. ZAPPA, Generalizzazione di un teorema di Kochendörffer, *Le Matematiche*, Catania, **13**, (1958), 61—64.

*(Eingegangen am 5. Juni 1964)*