Zur Quadratbildung von Polynomen

Von HEINZ SEIBT in Potsdam (DDR)

Prof. L. RÉDEI stellte die Frage, ob es Polynome mit Koeffizienten aus dem Körper Δ der reellen Zahlen gibt, deren Quadrate weniger nichtverschwindende Glieder haben als das jeweilige Ausgangspolynom (vgl. [1] und [2]). Man bezeichne mit $f_N(x) \in \Delta[x]$ ein Polynom mit N von 0 verschiedenen Gliedern und mit $Q(f_N(x))$ die Anzahl der nichtverschwindenden Glieder von $f_N^2(x)$. Weiterhin sei

$$Q(N) = \min Q(f_N(x)),$$

worin $f_N(x)$ alle Polynome aus $\Delta[x]$ mit N von 0 verschiedenen Gliedern durchläuft. Das oben genannte Problem entspricht dann der Frage, ob es natürliche Zahlen N gibt, für die

$$Q(N) < N \quad \text{bzw.} \quad q(N) = \frac{Q(N)}{N} < 1$$

gilt.

A. RÉNYI untersucht in [2] weitere Eigenschaften der Funktionen $Q(N)$ bzw. $q(N)$ und zeigt u. a.

$$q(4n+1) \leqq \frac{28}{29} < 1 \quad \text{für} \quad n \geqq 7.$$

Dazu konstruiert er für alle natürlichen Zahlen $N = 4n+1$ Polynome $A_{4n+1}(x)$ mit N von 0 verschiedenen Gliedern, deren Quadrate für $n \geqq 7$ aus weniger als N von 0 verschiedenen Gliedern bestehen. Dabei ist $N = 29$ die kleinste nach [2] bekannte Zahl mit $Q(N) < N$ (vgl. aber Fußnote [1])).

W. VERDENIUS zeigt in [3] durch Konstruktion gewisser Polynome die Abschätzungen

$$Q(N) < \frac{1}{7}(312 \cdot (N-1)^{^{13}\log 8} - 18) \quad \text{bzw.} \quad Q(N) < \frac{1}{5}(162 \cdot (N-1)^{^{9}\log 6} - 12).$$

Daraus folgt $Q(N) < N$ angenähert für $N > 4{,}8 \cdot 10^8$ bzw. für $N > 2{,}3 \cdot 10^8$.

Ziel unserer Ausführungen ist es, den Bereich derjenigen natürlichen Zahlen N, für die $Q(N) < N$ gilt, näher anzugeben. Dazu sprechen wir den folgenden Satz aus.

Satz. *Mit Ausnahme der (nicht geklärten) Zahlen $N = 26, 27, 34$ gilt*

$$Q(N) < N$$

für alle natürlichen Zahlen $N \geqq 21$.

Wir werden den Beweis so führen, daß wir zunächst gewisse Serien von Polynomen $f_N(x)$ mit $Q(f_N(x)) < N$ konstruieren. Diese werden die im Satz genannten Werte für N bereits bis auf wenige Ausnahmen liefern, welche dann durch Einzelbetrachtungen erledigt werden können.*)

1.

Grundlage unserer Untersuchungen sind die folgenden von RÉNYI in [2] eingeführten Polynome $S_n(x)$ und $P_{2n+1}(x)$: Für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ bezeichne $S_n(x)$ die ersten n Glieder der Entwicklung

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \dots,$$

also

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_k = \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot 2^k \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Dann enthält $S_n^2(x)$ genau $n+1$ von 0 verschiedene Glieder, nämlich die mit den Exponenten $0, 1, n, n+1, \dots, 2n-2$. Weiter sei für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$

$$\lambda = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}},$$

und $P_{2n+1}(x)$ sei das aus $2n+1$ Gliedern bestehende Polynom

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j (x^j + x^{2n-j}) + b_n x^n$$

mit

$$b_j = \binom{\frac{1}{2}}{j} \cdot \lambda^j 2^j \qquad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Dabei sind die b_j gerade die Koeffizienten der ersten $n+1$ Glieder der Entwicklung

$$\sqrt{1+2\lambda x} = 1 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots .$$

Das Quadrat $P_{2n+1}^2(x)$ hat genau $2n+1$ von 0 verschiedene Glieder, und zwar diejenigen mit den Exponenten $0, 1, n+2, \dots, 3n-2, 4n-1, 4n$.

2.

In Verallgemeinerung eines Konstruktionsverfahrens von RÉNYI bilden wir folgende Polynome

$$f(x) = P_{2m+1}(x) \cdot S_n(\mu x^{2m}) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{2mn} x^{2mn},$$

*) Für freundliche Unterstützung beim Entstehen dieser Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. H. WEINERT meinen Dank aussprechen.

die von den natürlichen Zahlen $m \geqq 2$ und $n \geqq 2$ sowie von einem reellen Parameter $\mu \neq 0$ abhängen [1]) und zeigen:

Hilfssatz 1. A) *Das Polynom $f(x)$ hat genau $2mn+1$ von 0 verschiedene Glieder, wenn $\mu \neq \frac{k}{2k-3}$ $(k=1, 2, \dots, n-1)$ gewählt wird; dagegen reduziert sich die Gliederzahl auf $2mn$, wenn μ einen dieser Werte $\frac{k}{2k-3}$ annimmt.*

B) *Unabhängig von der Wahl von μ hat $f^2(x)$ für $m=2$ höchstens $3n+7$, für $m \geqq 3$ höchstens $2mn+2m-3n+5$ von 0 verschiedene Glieder.*

Beweis. A) In $f(x)=P_{2m+1}(x) \cdot S_n(\mu x^{2m})$ erhalten wir die Glieder $1, c_{2mn}x^{2mn}$ und $c_i x^i$ mit $i \not\equiv 0$ $(2m)$ genau einmal, deren Koeffizienten verschwinden also nicht. Für die Koeffizienten der Glieder $c_{2mk}x^{2mk}$ $(k=1, 2, \dots, n-1)$ gilt

$$c_{2mk} = \left[\binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot 2^k \mu^k + \binom{\frac{1}{2}}{k-1} \cdot 2^{k-1} \mu^{k-1}\right] =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}-(k-1)}{k} 2\mu + 1\right) \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k-1} \cdot 2^{k-1} \mu^{k-1} = \frac{(3-2k)\mu + k}{k} \binom{\frac{1}{2}}{k-1} \cdot 2^{k-1} \mu^{k-1}.$$

Offensichtlich verschwindet c_{2mk} genau dann, wenn $(3-2k)\mu + k = 0$ gilt, d. h. für

$$\mu = \frac{k}{2k-3} \qquad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

Wir können daraus ersehen, daß jedes k einen Wert des Parameters μ eindeutig bestimmt und daß verschiedene Werte von k auch verschiedene Werte von μ bedingen. Nur für gewisse Werte von μ aus dem Intervall $[-1, 2]$ verschwindet demnach genau ein Koeffizient c_{2mk}.

Damit hat $f(x)$ je nach der Wahl von μ: genau $2mn+1$ Glieder, falls $\mu \neq \frac{k}{2k-3}$, bzw. genau $2mn$ Glieder, falls für μ einer der Werte $\frac{k}{2k-3}$ gewählt wird.

B) Wie wir bereits erwähnt haben, besteht $P^2_{2m+1}(x)$ nur aus Gliedern mit den Exponenten $0, 1, m+2, \dots, 2m, 1+2m, \dots, m-2+2m, 2m-1+2m, 2m+2m$; in $S^2_n(\mu x^{2m})$ kommen höchstens Glieder mit den Exponenten $2mk$ $(k=0, 1, n, \dots, 2n-2)$ vor. Wir wollen nun die Anzahl der Glieder von $f^2(x)$ bestimmen. Dazu multiplizieren wir der Reihe nach die Glieder von $P^2_{2m+1}(x)$ mit allen Gliedern von $S^2_n(\mu x^{2m})$. Die sich dabei ergebenden Exponenten ordnen wir in einem Schema an, wobei wir die Numerierung der einzelnen Zeilen den Exponenten der Glieder von $P^2_{2m+1}(x)$ entsprechend wählen.

[1]) Rényi betrachtet nur die Polynome mit $m=2$ und (nach einer brieflichen Mitteilung) $\mu=3$, die gemäß dem folgenden Hilfssatz 1 aus $4n+1$ von 0 verschiedenen Gliedern bestehen und deren Quadrate für $n \geqq 7$ weniger als $4n+1$ Glieder besitzen. Durch einen Druckfehler stehen in seiner Arbeit jedoch die Polynome mit $m=2$ und $\mu=1$, die nur $4n$ von 0 verschiedene Glieder haben und deren Quadrate erst für $n \geqq 8$ weniger als $4n$ Glieder aufweisen.

$$0) \qquad 2mk \quad (k=0, 1, n, \ldots, 2n-2)$$

also $n+1$ Glieder;

$$1) \qquad 1+2mk \quad (k=0, 1, n, \ldots, 2n-2)$$

weitere $n+1$ Glieder;

$$\begin{array}{ll} m+2) & m+2+2mk \quad (k=0, 1, n, \ldots, 2n-2) \\ m+3) & m+3+2mk \quad (k=0, 1, n, \ldots, 2n-2) \\ \vdots & \quad \vdots \\ 2m-1) & 2m-1+2mk \quad (k=0, 1, n, \ldots, 2n-2) \end{array}$$

das sind $m-2$ Zeilen mit je $n+1$ Gliedern, also $(m-2)(n+1)$ Glieder;

$$2m) \qquad 2mk \quad (k=1, 2, n+1, \ldots, 2n-1)$$

außer $k=2$ und $k=2n-1$ sind diese Glieder bereits in der Zeile 0) erfaßt, also 2 weitere Glieder;

$$\begin{array}{ll} 1+2m) & 1+2mk \quad (k=1, 2, n+1, \ldots, 2n-1) \\ & \quad \vdots \\ m-2+2m) & m-2+2mk \quad (k=1, 2, n+1, \ldots, 2n-1), \end{array}$$

das sind $m-2$ Zeilen zu je $n+1$ Gliedern, von denen für $m \geqq 3$ bereits $n-1$ Glieder der Zeile $1+2m$) schon in der Zeile 1) gezählt wurden, also $m=2$: 0 Glieder, $m \geqq 3$: $(m-2)(n+1)-(n-1)$ Glieder;

$$2m-1+2m) \qquad 2m-1+2mk \quad (k=1, 2, n+1, \ldots, 2n-1)$$

von diesen $n+1$ Gliedern sind für $m \geqq 3$ alle außer $k=2$ und $k=2n-1$ bereits in Zeile $2m-1$) gezählt worden, also $m=2$: $n+1$ Glieder, $m \geqq 3$: 2 Glieder;

$$2m+2m) \qquad 2mk \quad (k=2, 3, n+2, \ldots, 2n)$$

das sind weitere 2 Glieder, da alle außer $k=3$ und $k=2n$ schon in Zeile 0) bzw. $2m$) gezählt wurden.

Durch Addition der Gliederzahlen in den einzelnen Zeilen erhalten wir:

$m=2$: $f^2(x)$ hat höchstens $3n+7$ Glieder,
$m \geqq 3$: $f^2(x)$ hat höchstens $2mn+2m-3n+5$ Glieder.

Aus diesem Hilfssatz 1 ergeben sich die folgenden Abschätzungen, die für $n \geqq 2$ gelten:

$m=2$: $Q(4n+1) \leqq 3n+7$ bzw. $Q(4n) \leqq 3n+7$,
$m \geqq 3$: $Q(2mn+1) \leqq 2mn+2m-3n+5$ bzw. $Q(2mn) \leqq 2mn+2m-3n+5$.

Insbesondere gilt dann

$m=2$: $Q(4n+1) < 4n+1$ für $n \geqq 7$ bzw. $Q(4n) < 4n$ für $n \geqq 8$,

$m \geqq 3$: $Q(2mn+1) < 2mn+1$ für $n > \dfrac{2m+4}{3}$ bzw. $Q(2mn) < 2mn$ für $n > \dfrac{2m+5}{3}$.

Dabei lehren die beiden ersten Zeilen, daß für alle Zahlen $N \equiv 0$ (4) bzw. $N \equiv 1$ (4) ab $N=32$ bzw. ab $N=29$ die Beziehung $Q(N) < N$ gilt[2]). Darüber hinaus interessieren uns auf Grund des Folgenden aus den Serien mit $m=3$ nur die Werte $N=24=2\cdot 3\cdot 4$, $N=25=2\cdot 3\cdot 4+1$, $N=30=2\cdot 3\cdot 5$, $N=31=2\cdot 3\cdot 5+1$, $N=42=$ $=2\cdot 3\cdot 7$, $N=43=2\cdot 3\cdot 7+1$, für die ebenfalls die Beziehung $Q(N) < N$ zutrifft.

3.

Um uns einen entsprechenden Überblick über die Zahlen $N \equiv 2$ (4) und $N \equiv 3$ (4) zu verschaffen, betrachten wir die Polynome

$$f(x) = P_5(x^3)\cdot S_n(vx^4) = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_{4(n+2)} x^{4(n+2)},$$

die von der natürlichen Zahl $n \geqq 2$ und einem reellen Parameter $v \neq 0$ abhängen. Dabei verschwinden von vornherein einige der Koeffizienten (etwa d_1, d_2). Wir zeigen

Hilfssatz 2. A) *Das Polynom $f(x)$ hat genau $4n+3$ von 0 verschiedene Glieder, wenn man*

$$v \neq \sqrt[3]{\frac{k(k-1)(k-2)}{(2k-7)(2k-5)(2k-3)}} \qquad (k=3, 4, \ldots, n-1)$$

wählt, hingegen verringert sich die Anzahl der Glieder auf $4n+2$, wenn v einen dieser Werte annimmt.

B) *Unabhängig von der Wahl von v hat $f^2(x)$ höchstens $3n+13$ von 0 verschiedene Glieder.*

Beweis. A) Das Polynom $P_5(x^3)$ hat nur Glieder mit den Exponenten $0, 3, 6 \equiv 2(4)$, $9 \equiv 1(4)$ und $12 \equiv 0(4)$; das Polynom $S_n(vx^4)$ hat nur Glieder mit den Exponenten $4k$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$). Für $f(x)$ erhalten wir damit zunächst je n Glieder $d_i x^i$ mit $i \equiv 3(4)$, bzw. $i \equiv 2(4)$, bzw. $i \equiv 1(4)$. Hinzu kommen die Glieder $c_{4k}x^{4k}$ mit $k=0, 1, 2, n, n+1, n+2$. Das sind insgesamt $3n+6$ Glieder mit nichtverschwindenden Koeffizienten. Für die Koeffizienten der restlichen $n-3$ Glieder $d_{4k}x^{4k}$ mit $k=3, 4, \ldots, n-1$ gilt

$$d_{4k} = \left[\binom{\frac{1}{2}}{k-3} 2^{k-3} v^{k-3} + \binom{\frac{1}{2}}{k} 2^k v^k\right] =$$

$$= \left[1 + \frac{(\frac{1}{2}-(k-3))(\frac{1}{2}-(k-2))(\frac{1}{2}-(k-1))}{(k-2)(k-1)k}\cdot 2^3 v^3\right]\binom{\frac{1}{2}}{k-3} 2^{k-3} v^{k-3} =$$

$$= \frac{(k-2)(k-1)k + (7-2k)(5-2k)(3-2k)v^3}{k(k-1)(k-2)}\binom{\frac{1}{2}}{k-3} 2^{k-3} v^{k-3}.$$

---

[2]) Das Ergebnis $Q(4n+1) \leqq 3n+7 < 4n+1$ für $n \geqq 7$ ist gemäß der vorstehenden Fußnote bereits bei Rényi in [2] zu finden.

Demnach verschwindet d_{4k} genau dann, wenn

$$k(k-1)(k-2)+(7-2k)(5-2k)(3-2k)v^3 = 0$$

gilt, d. h. für

$$v = \sqrt[3]{\frac{k(k-1)(k-2)}{(2k-3)(2k-5)(2k-7)}} \qquad (k=3,4,\dots,n-1).$$

Diese Formel lehrt, daß jeder der in Frage kommenden Werte von k einen Wert des Parameters v bestimmt und daß zu verschiedenen k auch verschiedene v gehören. Es verschwindet also nur für gewisse Werte v aus dem Intervall $\left[-\sqrt[3]{2}, \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right]$ genau ein Koeffizient d_{4k}. Somit hat das Polynom $f(x)$ entsprechend der Wahl von v genau $4n+3$ bzw. genau $4n+2$ von 0 verschiedene Glieder.

B) Nach dem Vorigen besitzt $P_5^2(x^3)$ nur Glieder mit den Exponenten 0, 3, $12=4\cdot 3$, $3\cdot 7=21=1+4\cdot 5$, $3\cdot 8=24=4\cdot 6$; dagegen hat $S_n^2(vx^4)$ höchstens Glieder mit Exponenten $4k$ $(k=0,1,n,\dots,2n-2)$. Entsprechend Beweisteil B) von Hilfssatz 1 verschaffen wir uns in einem Schema einen Überblick über die Glieder von $f^2(x)$:

0) $\qquad 4k \qquad (k=0,1,n,\dots,2n-2)$,

das sind $n+1$ Glieder;

3) $\qquad 3+4k \qquad (k=0,1,n,\dots,2n-2)$,

also weitere $n+1$ Glieder;

4·3) $\qquad 4k \qquad (k=3,4,n+3,\dots,2n+1)$,

das sind höchstens 5 weitere Glieder, nämlich die für $k=3,4,2n-1,2n,2n+1$;

1+4·5) $\qquad 1+4k \qquad (k=5,6,n+5,\dots,2n+3)$,

also $n+1$ weitere Glieder;

4·6) $\qquad 4k \qquad (k=6,7,n+6,\dots,2n+4)$,

das sind höchstens 5 weitere Glieder, und zwar die mit $k=6,7,2n+2,2n+3,2n+4$.

Durch Addition der jeweiligen Gliederzahlen ergibt sich die Behauptung: $f^2(x)$ hat höchstens $3n+13$ Glieder.

Damit erhalten wir aus Hilfssatz 2 die folgenden Abschätzungen für $Q(N)$, die für $n\geqq 2$ gelten:

$$Q(4n+3) \leqq 3n+13, \quad Q(4n+2) \leqq 3n+13.$$

Daraus folgt insbesondere

$$Q(4n+3) < 4n+3 \quad \text{für } n\geqq 11,$$

$$Q(4n+2) < 4n+2 \quad \text{für } n\geqq 12.$$

Die beiden letzten Zeilen bestätigen die Richtigkeit der Beziehung $Q(N)<N$ somit für alle Zahlen $N\equiv 2(4)$ bzw. $N\equiv 3(4)$ ab $N=50$ bzw. ab $N=47$.

4.

Um den Beweis unseres Satzes abzuschließen, geben wir nun noch für die durch die beiden Hilfssätze nicht erfaßten Zahlen N geeignete Polynome an, die auch für diese Zahlen die Beziehung $Q(N) < N$ bestätigen:

$$
\begin{array}{lll}
N=46: & f_{46}(x)=P_5(x^3)\cdot P_{11}\left(\sqrt[6]{\dfrac{125}{168}}\,x^4\right) & \text{mit}\quad Q(f_{46}(x))\leqq 45,\\
N=39: & f_{39}(x)=P_5(x^3)\cdot P_9\,(x^4) & \text{mit}\quad Q(f_{39}(x))\leqq 37,\\
N=38: & f_{38}(x)=P_5(x^3)\cdot P_9\left(\sqrt[6]{\dfrac{4}{7}}\,x^4\right) & \text{mit}\quad Q(f_{38}(x))\leqq 37,\\
N=35: & f_{35}(x)=P_5(x)\cdot P_7\,(x^7) & \text{mit}\quad Q(f_{35}(x))\leqq 27,\\
N=28: & f_{28}(x)=P_5(x)\cdot P_7\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,x^4\right) & \text{mit}\quad Q(f_{28}(x))\leqq 27,\\
N=23: & f_{23}(x)=P_5(x^3)\cdot P_5\,(x^4) & \text{mit}\quad Q(f_{23}(x))\leqq 21,\\
N=22: & f_{22}(x)=P_5(x^3)\cdot P_5\,(-\sqrt[6]{2}\,x^4) & \text{mit}\quad Q(f_{22}(x))\leqq 21,\\
N=21: & f_{21}(x)=P_5(x)\cdot P_5\left(\dfrac{7}{4}\sqrt{2}x\right) & \text{mit}\quad Q(f_{21}(x))\leqq 20.
\end{array}
$$

Die in dieser Tabelle enthaltenen Behauptungen über N und $Q(f_N(x))$ lassen sich mit ähnlichen Gedankengängen wie in den Beweisen zu unseren Hilfssätzen zeigen; wir verzichten jedoch darauf, dieses auszuführen. Übrigens lassen sich auch zu diesen Polynomen gewisse Serien aufstellen. Diese Serien sind aber auf Grund der mit ihnen erfaßten Zahlen N zu einem Beweis unseres Satzes weniger geeignet, dagegen liefern sie im allgemeinen bessere Abschätzungen für $Q(N)$ bzw. $q(N)$. Beispielsweise gewinnt man aus $P_5(x)\cdot P_9(x^7)$ die Abschätzung $q(45)\leqq\frac{33}{45}$, während das Polynom $P_5(x)\cdot S_{11}(3x^4)$ aus Hilfssatz 1 nur $q(45)\leqq\frac{40}{45}$ ergibt.

Literatur

[1] L. RÉDEI, *Algebra*. I (Leipzig, 1959), S. 271.

[2] A. RÉNYI, On the minimal number of terms of the square of a polynomial, *Acta Math. Hung.*, **1** (1947), 30–34.

[3] W. VERDENIUS, On the number of terms of the square and the cube of polynomials, *Indag. Math.*, **11** (1949), 459–465.

[4] P. ERDŐS, On the number of terms of the square of a polynomial, *Nieuw Arch. Wisk.*, **23** (1949), 63–65.

(Eingegangen am 21. Dezember 1963)