Numerischer Wertebereich und normale Dilatationen

Von STEFAN HILDEBRANDT in Mainz (Deutschland)

1. Wir wollen für beschränkte lineare Operatoren T in einem komplexen Hilbertraum $\mathfrak{H}$ den numerischen Wertebereich $W(T)$ betrachten, der durch

$$W(T) = \{\lambda : \lambda = (Tx, x),\ \|x\| = 1\}$$

definiert ist. Mit HALMOS bezeichnen wir einen Operator N, der in einem Hilbertraum $\mathfrak{K}$ definiert ist, welcher $\mathfrak{H}$ als Unterraum enthält, als eine Dilatation von T, falls

$$T = PNP$$

ist. Dabei bedeutet P den orthogonalen Projektor von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{H}$. Ferner heißt N starke Dilatation von T, falls sogar

$$T^n = PN^nP \quad \text{für alle } n = 1, 2, \ldots$$

gilt.

In [1] hat HALMOS die folgenden Ergebnisse bewiesen:

(1) Der Abschluß des numerischen Wertebereiches eines Operators in $\mathfrak{H}$ ist der Durchschnitt der Abschlüsse der numerischen Wertebereiche seiner normalen Dilatationen in $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} = 2\mathfrak{H}$.

(2) Der Abschluß des numerischen Wertebereiches jeder normalen Kontraktion T (d. h. $\|T\| \leqq 1$) ist der Durchschnitt der Abschlüsse der numerischen Wertebereiche seiner unitären Dilatationen in $\mathfrak{K} = 2\mathfrak{H}$.

Offengeblieben war unter anderem die Frage, ob (2) für jede Kontraktion richtig bleibt. Immerhin konnte HALMOS durch Kombination von (1) und (2) zeigen, daß (2) für alle Operatoren T mit $\|T\| \leqq \frac{1}{3}$ gilt, falls man alle unitären Dilatationen aus $\mathfrak{K} = 4\mathfrak{H}$ zuläßt.

Im folgenden wollen wir einige Sätze beweisen, die (1) und (2) verschärfen und ein erster Schritt in Richtung des obigen Problems sind, nämlich:

(I) Der Abschluß des numerischen Wertebereichs eines Operators auf $\mathfrak{H}$ ist der Durchschnitt der Abschlüsse der numerischen Wertebereiche seiner starken normalen Dilatationen N von der Form $N = \alpha U + \beta I$, wo U einen unitären Operator, I die Identität und α, β komplexe Zahlen bedeuten.

(II) Der Abschluß $\overline{W(T)}$ des numerischen Wertebereiches eines Operators T ist der Durchschnitt der Abschlüsse der numerischen Wertebereiche seiner unitären Dilatationen, falls sich $\overline{W(T)}$ als Durchschnitt von konvexen, im Einheitskreis

$\{z: |z| \leqq 1\}$ gelegenen Spektralmengen von T (im Sinne von v. NEUMANN) darstellen läßt.

Also gilt (II) insbesondere für Operatoren T, bei denen $\overline{W(T)}$ eine Spektralmenge ist, z. B. für die normalen und subnormalen Operatoren, wo sogar das Spektrum eine Spektralmenge ist. Falls $\mathfrak{H}$ endlichdimensional ist, ist unser Resultat insofern schwächer, als sich über die Dimension des Erweiterungsraumes $\mathfrak{K}$, in dem die Dilatationen betrachtet werden, keine Einschränkungen machen lassen.

Anders als HALMOS stützen wir uns zum Beweis von (I) und (II) auf die v. Neumannsche Theorie der Spektralmengen (vgl. [3] und [4]) und auf die Theorie der starken unitären und normalen. Dilatationen (vgl. [5] und [6]).

Ich danke Herrn Prof. FOIAŞ für die Vereinfachung des Beweises für den folgenden Satz 1, die er mir freundlicherweise mitgeteilt hat, und Herrn Prof. SZ.-NAGY für den Hinweis auf den Gegenstand.

2. Eine abgeschlossene Menge X der komplexen Ebene heißt Spektralmenge des beschränkten linearen Operators T, wenn $\sigma(T) \subseteqq X$ und wenn für jede rationale Funktion $f(\lambda)$ ohne Pole in X (für die dann nach dem Dunfordschen Funktionalkalkül der Operator $f(T)$ definiert ist) die Ungleichung

$$\|f(T)\| \leqq \|f\|_X \overset{\text{def}}{=} \sup\{|f(\lambda)|: \lambda \in X\}$$

erfüllt ist.

Satz 1. *Der Abschluß $\overline{W(T)}$ des numerischen Wertebereiches eines beliebigen beschränkten linearen Operators T in $\mathfrak{H}$ ist der Durchschnitt von Kreisscheiben, die sämtlich Spektralmengen von T sind.*

Beweis. Bekanntlich (s. [4], S. 423) ist die Halbebene $\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$ eine Spektralmenge eines Operators T genau dann, wenn $\operatorname{Re}(Tx, x) \geqq 0$ für jeden Vektor x gilt. Daraus sieht man leicht, daß jede konvexe Spektralmenge den numerischen Wertebereich enthält. Daher brauchen wir nur zu zeigen, daß es zu jedem nicht in $\overline{W(T)}$ gelegenen Punkt z_0 eine Kreisscheibe $C_{\gamma,r} = \{z: |z-\gamma| \leqq r\}$ gibt, die ebenfalls z_0 nicht enthält und die Spektralmenge von T ist. Da $\overline{W(T)}$ nach einem Satz von TOEPLITZ und HAUSDORFF konvex ist, gibt es eine Stützgerade g an $\overline{W(T)}$ mit Stützpunkt $s \in \partial W(T)$[1]) derart, daß g den Punkt z_0 von $\overline{W(T)}$ trennt und die Verbindungsgerade h der Punkte z_0 und s auf g senkrecht steht. Da für lineare Abbildungen $p(z) = \alpha z + \beta$ die Beziehung $W(p(T)) = p(W(T))$ gilt und da durch $p(z)$ Spektralmengen in Spektralmengen übergeführt werden, kann man annehmen, daß h mit der reellen und g mit der imaginären Achse zusammenfällt und $z_0 < 0$, $s = 0$ sowie $\operatorname{Re} W(T) \geqq 0$ ist. Dann erhält man für eine reelle Zahl $\gamma > 0$ und für $\|x\| = 1$ die Ungleichung

$$\|Tx - \gamma x\|^2 = \|Tx\|^2 + \gamma^2 \|x\|^2 - 2\gamma \cdot \operatorname{Re}(Tx, x) \leqq \|T\|^2 + \gamma^2,$$

somit

$$\|T - \gamma I\|^2 \leqq \|T\|^2 + \gamma^2.$$

Nach einem bekannten Satz von v. NEUMANN (vgl. [3] oder [4]) ist dann die Kreis-

[1]) Mit ∂M bezeichnen wir den Rand einer Menge M.

scheibe $C_{\gamma,r(\gamma)}$ mit dem Mittelpunkt γ und dem Radius $r(\gamma) = (\|T\|^2+\gamma^2)^{1/2}$ eine Spektralmenge von T. Andererseits gilt

$$r(\gamma)-\gamma = \gamma\cdot\left[\left(1+\frac{\|T\|^2}{\gamma^2}\right)^{1/2}-1\right] = \gamma\cdot O\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\to 0 \quad \text{mit} \quad \gamma\to\infty.$$

Für hinreichend großes γ ist also z_0 nicht in $C_{\gamma,r(\gamma)}$ enthalten. Damit ist der Satz bewiesen.

Im Zusammenhang mit Satz 1 ist vielleicht das folgende Resultat überraschend, das in [2] bewiesen wird:

Satz 2. *Falls für eine Folge $\{z_n\}$ von Extremalpunkten z_n der konvexen Menge $\overline{W(T)}$, die in der Menge aller Extremalpunkte von $\overline{W(T)}$ dicht liegen, eine Folge von Kreisscheiben C_n existiert, so daß $z_n\in\partial C_n$ und C_n Spektralmenge von T für alle $n=1,2,\dots$ ist, so ist $\overline{W(T)}$ gleich der konvexen Hülle des Spektrums von T.*

Bezeichne nun $\mathfrak{N}_1(T)$ die Menge aller starken normalen Dilatationen N des Operators T von der Form $N=\alpha U+\beta I$, wo U ein unitärer Operator, I die Identität und α,β komplexe Zahlen sind.

Satz 3. *Für jeden beschränkten linearen Operator T in $\mathfrak{H}$ gilt*

$$W(T)\subseteqq\bigcap_{N\in\mathfrak{N}_1(T)}W(N)\subseteqq\overline{W(T)}.$$

Beweis. Für eine Dilatation N von T und einen Vektor $x\in\mathfrak{H}$ ist $(Tx,x)=(Nx,x)$, somit $W(T)\subseteqq W(N)$. Daher brauchen wir nur $\bigcap_{N\in\mathfrak{N}_1(T)}W(N)\subseteqq\overline{W(T)}$ zu beweisen. Falls die Kreisscheibe $C_{\gamma,r}=\{z: |z-\gamma|\leqq r\}$ Spektralmenge von T ist, so ist $\|r^{-1}(T-\gamma I)\|\leqq 1$, folglich gibt es nach [5] eine starke unitäre Dilatation U von $r^{-1}(T-\gamma I)$, woraus wegen $T^n=\sum_0^n\binom{n}{k}\gamma^{n-k}(T-\gamma I)^k$ sofort folgt, daß $N=rU+\gamma I$ eine starke normale Dilatation von T ist. Ferner ist für einen normalen Operator der Abschluß des numerischen Wertebereichs gerade die konvexe Hülle seines Spektrums, also $\overline{W(N)}\subseteqq C_{\gamma,r}$. Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von Satz 1 die Behauptung.

3. Schließlich bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(T)$ die Menge der unitären Dilatationen eines Operators T.

Satz 4. *Wenn sich $\overline{W(T)}$ als Durchschnitt von konvexen Spektralmengen des Operators T darstellen läßt, die sämtlich im Einheitskreis $\{z: |z|\leqq 1\}$ liegen, so gilt*

$$(*)\qquad W(T)\subseteqq\bigcap_{U\in\mathfrak{U}(T)}W(U)\subseteqq\overline{W(T)}.$$

Beweis. Aus demselben Grunde wie in Satz 3 genügt es, $\bigcap_{U\in\mathfrak{U}(T)}W(U)\subseteqq\overline{W(T)}$ zu zeigen. Sei also $z_0\notin\overline{W(T)}$ und $|z_0|\leqq 1$. Dann gibt es eine konvexe und kompakte, ganz in der Einheitskreisscheibe $C_{0,1}=\{z: |z|\leqq 1\}$ gelegene Spektralmenge X von T, die z_0 nicht enthält. Eine geeignete Stützgerade g an X trennt dann X von z_0. Die Gerade g teilt $C_{0,1}$ in zwei Teile. Wir betrachten davon den (abgeschlossenen)

Teil S, der X enthält, aber nicht z_0. Der Rand ∂S ist von der Form $\partial S = J \cup B$, wobei J eine Strecke auf g und B ein Bogen auf dem Einheitskreis $\partial C_{0,1}$ ist. Mit X ist auch S eine Spektralmenge von T. Auf Grund des Satzes 6 in Sz.-NAGY—FOIAŞ [6] gibt es eine (starke) normale Dilatation N von T mit $\sigma(N) \subseteqq \partial S$. Nach dem Spektraltheorem kann man N in eine orthogonale Summe $N = N_1 \oplus U_2$ von normalen Operatoren N_1 und U_2 mit

$$\text{(i)} \quad \sigma(N_1) \subseteqq J, \qquad \text{(ii)} \quad \sigma(U_2) \subseteqq B$$

zerlegen. Aus (ii) folgt sofort, daß U_2 unitär ist, und aus (i) ergibt sich, daß für eine lineare Abbildung $p(z) = \alpha z + \beta$, die J auf das Intervall $\{\lambda : 0 \leqq \lambda \leqq 1\}$ abbildet, der durch $A_1 = p(N_1)$ definierte Operator selbstadjungiert und $0 \leqq A_1 \leqq I$ ist. Mittels einer einfachen Konstruktion (vgl. [4]) findet man einen Projektor P_1 als Dilatation von A_1. Das Spektrum eines Projektors besteht höchstens aus den Punkten 0 und 1. Der Operator N_1 besitzt daher die normale Dilatation $U_1 = q(A_1)$, $\left(q(z) = \dfrac{z-\beta}{\alpha}\right)$, deren Spektrum höchstens aus den Endpunkten der Strecke J besteht, also auf dem Rande des Einheitskreises liegt. Dann ist U_1 aber unitäre Dilatation von N_1 und hierauf $U = U_1 \oplus U_2$ unitäre Dilatation von $N = N_1 \oplus U_2$ und damit erst recht von T, und $\sigma(U) = \sigma(U_1) \cup \sigma(U_2) \subseteqq B \subseteqq \partial S$. Hieraus folgt $\overline{W(U)} =$ konvexe Hülle von $\sigma(U) \subseteqq S$. Damit haben wir für den Punkt $z_0 \notin \overline{W(T)}$ mit $|z_0| \leqq 1$ eine unitäre Dilatation U von T gefunden, so daß $z_0 \notin \overline{W(U)}$ ist. Da der numerische Wertebereich eines unitären Operators im Einheitskreis $C_{0,1}$ liegt, erhält man hieraus $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(T)} W(U) \subseteqq \overline{W(T)}$, womit alles gezeigt ist.

Zusatz bei der Korrektur: DR. C. BERGER hat mir inzwischen mitgeteilt, daß er die Richtigkeit von $(*)$ für alle Kontraktionen T bewiesen hat. Ferner hat er — unabhängig von mir und noch nicht veröffentlicht — ebenfalls die Ergebnisse von Satz 1, 3 gefunden.

Literaturverzeichnis

[1] P. R. HALMOS, Numerical ranges and normal dilations, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 1—5.
[2] S. HILDEBRANDT, *Numerischer Wertebereich und Spektralmengen* (zu erscheinen).
[3] J. VON NEUMANN, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 258—281.
[4] F. RIESZ—B. SZ.-NAGY, *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (Berlin, 1956).
[5] B. SZ.-NAGY, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.
[6] B. SZ.-NAGY—C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26—45.

(Eingegangen am 12. Oktober 1964)