Corrections et compléments aux Contractions IX

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

1. Dans la Note [IX], Proposition 5. 4 est fausse. Un contre-exemple est fourni par la fonction analytique contractive extérieure $\{E^2, E^1, \Theta(\lambda)\}$ où

$$\Theta(\lambda)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda-1), \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad (cf.\ [IX],\ p.\ 313);$$

pour le vecteur $f=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ on a notamment $\Theta(0)f=0$ sans que $\Theta(\lambda)f$ s'annule identiquement. (On a commis l'erreur lorsqu'on a fait usage, p. 308, de la linéarité de p_f en fonction de f, ce qui, en général, n'est pas le cas.)

Parmi les propositions et théorèmes qui suivent dans [IX], Théorème 3 (sur l'existence d'une variété de sous-espaces invariants pour une certaine classe d'opérateurs), ainsi que sa démonstration, ne dépendent pas de Proposition 5. 4, donc ils ne sont pas touchés par cette erreur. Par contre, Propositions 5. 5 et 5. 6 et Théorèmes 2 et 4 dépendent partiellement de Proposition 5. 4, donc ils doivent être réexaminés. En laissant ouvert le problème de décider s'ils restent valables dans toute leur généralité ou non, nous nous contentons ici de montrer qu'ils subsistent dans le cas d'indices de défaut finis.

2. Observons d'abord que l'énoncé suivant subsiste avec sa démonstration indiquée dans [IX], p. 310—311:

Proposition A. *Pour toute fonction contractive extérieure* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *on a*

(i) $\overline{\Theta(\lambda)\mathfrak{E}}=\mathfrak{E}_*$ *pour tout* $\lambda\in D_0$, [1])

(ii) $\overline{\Theta(e^{it})\mathfrak{E}}=\mathfrak{E}_*$ *pour presque tous les points* $t\in(0, 2\pi)$.

Dans le cas où $\dim\mathfrak{E}_*<\infty$, (i) et (ii) veulent dire le même que $\Theta(\lambda)\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_*$, $\Theta(e^{it})\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_*$. Il s'ensuit que si $\dim\mathfrak{E}_*<\infty$ et $\dim\mathfrak{E}\neq\dim\mathfrak{E}_*$, $\Theta(\lambda)$ ne peut avoir d'inverse pour aucun $\lambda\in D_0$, même pas au sens large.

Pour le cas $\dim\mathfrak{E}=\dim\mathfrak{E}_*=n<\infty$ on a la

Proposition B. *Pour que la fonction analytique contractive matricielle* $\Theta(\lambda)$ *de type* $n\times n$ *soit extérieure, il faut et il suffit que la fonction scalaire bornée* $d(\lambda)=\det\Theta(\lambda)$ *soit extérieure.* (*Cf.* [1], Lecture XI.)

[1]) D_0 est le disque unité ouvert dans le plan des nombres complexes.

Bien entendu, la condition que $d(\lambda)$ soit extérieure veut dire que $\overline{dH^2(E^1)} = H^2(E^1)$; d'après le théorème de BEURLING cela est équivalent à la condition que $\log|d(e^{it})|$ soit intégrable et que la relation suivante soit vérifiée:

$$(1)\qquad d(\lambda) = \varkappa \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda} \log|d(e^{it})|\,dt\right], \qquad |\varkappa| = 1.$$

On a

$$(2)\qquad \Theta(\lambda)^{-1} = \frac{1}{d(\lambda)}\,\Theta^{\mathrm{A}}(\lambda)$$

où $\Theta^{\mathrm{A}}(\lambda)$ est la matrice algébriquement adjointe à $\Theta(\lambda)$. Puisque $\|\Theta(\lambda)\| \leqq 1$, les éléments de $\Theta(\lambda)$ sont bornés dans D_0, d'où il s'ensuit que $\Theta^{\mathrm{A}}(\lambda)$ est aussi bornée dans D_0.

Comme pour $\Theta^{\sim}(\lambda) = \Theta(\bar{\lambda})^*$ le déterminant $d^{\sim}(\lambda)$ est le conjugué complexe de $d(\bar{\lambda})$, $d^{\sim}(\lambda)$ est une fonction extérieure en même temps que $d(\lambda)$. Par conséquent, $\Theta^{\sim}(\lambda)$ est extérieure en même temps que $\Theta(\lambda)$.

Ces résultats établissent la Proposition 5. 5 de [IX] dans le cas où $\mathfrak{E}_*$ est de dimension finie et cela dans la forme précisée suivante:

Proposition 5. 5*. *Soit* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *une fonction analytique contractive extérieure avec* $\dim \mathfrak{E}_* < \infty$. *Il y a alors deux possibilités: ou bien* $\Theta(\lambda)^{-1}$ *existe au sens strict en chaque point de* D_0, *ou bien* $\Theta(\lambda)^{-1}$ *n'existe pour aucun point de* D_0, *même pas au sens large. Le premier cas se présente lorsque* $\dim \mathfrak{E} = \dim \mathfrak{E}_*$, *et le second lorsque* $\dim \mathfrak{E} \neq \dim \mathfrak{E}_*$. *Dans le premier cas la fonction* $\Theta^{\sim}(\lambda)$ *est aussi extérieure.*

On obtient alors Théorème 2 de [IX] dans la forme restreinte suivante:

Théorème 2*. *Soit* $T \in C_{\cdot 1}$, *avec les indices de défaut* $\mathfrak{d}_T, \mathfrak{d}_{T^*}$ [2]) *dont* $\mathfrak{d}_{T^*}$ *est fini. Il y a deux possibilités: ou bien chaque point de* D_0 *est une valeur propre de* T, *ou bien aucun point de* D_0 *n'appartient au spectre de* T: *le premier cas se présente lorsque* $\mathfrak{d}_T \neq \mathfrak{d}_{T^*}$, *et le second lorsque* $\mathfrak{d}_T = \mathfrak{d}_{T^*}$. *Dans le premier cas* $T \notin C_{11}$ *et dans le second cas* $T \in C_{11}$.

Démonstration. En vertu de [VIII], Corollaire, p. 58, $T \in C_{\cdot 1}$ veut dire que la fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ de T est une fonction extérieure; de plus on a $\dim \mathfrak{D}_{T^*} = \mathfrak{d}_{T^*} < \infty$. Le théorème résulte alors, sauf la dernière assertion, de la Proposition 5. 5* et du Théorème 4 de [VIII]. Quant à la dernière assertion, observons que dans le second cas $\Theta_T^{\sim}(\lambda)$ est, toujours en vertu de la Proposition 5. 5*, aussi extérieure, donc $T \in C_1$. et par conséquent $T \in C_{11}$. Dans le premier cas tout point $\lambda \in D_0$ étant une valeur propre, il y a des vecteurs $x_\lambda \neq 0$ tels que $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$, d'où $T^n x_\lambda = \lambda^n x_\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$, ce qui exclut que T appartienne à C_{11}. Cela achève la démonstration.

---

[2]) $\mathfrak{d}_T = \dim \mathfrak{D}_T$ où $\mathfrak{D}_T = \overline{(I - T^*T)^{1/2}\mathfrak{H}}$, et analoguement pour T^*.

3. Proposition 5. 6 de [IX] est valable dans le cas où dim $\mathfrak{E}_* < \infty$:

Proposition 5. 6*. *Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction contractive extérieure telle que* dim $\mathfrak{E}_* < \infty$ *et que $\Theta(e^{it})$ est isométrique pour presque tous les points e^{it} d'un arc ω de la circonférence unité. $\Theta(\lambda)$ se prolonge alors analytiquement au travers de ω à tout l'extérieur du cercle unité.*

Démonstration. De Proposition A (ii) il s'ensuit que $\Theta(e^{it})$ est même unitaire pp. sur ω et que, par conséquent, dim $\mathfrak{E}$ = dim $\mathfrak{E}_* < \infty$. Pour $d(\lambda) = \det \Theta(\lambda)$ on a alors $|d(e^{it})| = 1$ pp. sur ω; en vertu de la formule (1) cela entraîne que

$$\log |d(\lambda)| = \frac{1}{2\pi} \int' P(r, \tau - t) \log |d(e^{it})| \, dt$$

où $\lambda = re^{i\tau}$ $(0 \leqq r < 1)$, $P(r, t)$ est le noyau de Poisson, et l'intégrale est prise sur l'ensemble des points t tels que $e^{it} \in \omega'$ où ω' est l'arc complémentaire à ω. De là il s'ensuit que la fonction $1/d(\lambda)$ est bornée dans tout sous-ensemble de D_0, qui est à distance positive à ω'; en vertu de (2) il en est alors de même pour $\Theta(\lambda)^{-1}$. La démonstration s'achève comme indiquée aux p. 311—312 de [IX], faisant usage du principe de réflexion de Schwarz.

Théorème 4*. *Soit $T \in C_{\cdot 1}$ telle que l'indice de défaut $\mathfrak{d}_{T^*}$ est fini et que $\sigma(T)$ ne recouvre pas la corconférence unité. On a alors $\sigma(T) = \sigma(U^\circ)$.*

(U° est la partie "résiduelle" de la dilatation unitaire minimum de T, envisagée dans Théorème 3.) La démonstration se fait par la méthode indiquée dans [IX], p. 313, faisant usage de la Proposition 5. 6*.

4. Finalement, le Corollaire à la p. 315 de [IX] découle, dans le cas où $T \in C_{11}$ a ses deux indices de défaut finis, des Théorèmes 3 et 4* de la manière indiquée l. c., si l'on fait usage encore du fait que les opérateurs T_β y envisagés ont aussi leurs indices de défaut finis. Cela résulte de la proposition suivante qui présente un complément au n° 4 de [IX], intéressant en soi-même:

Proposition C. *Soit T une contraction complètement non-unitaire de $\mathfrak{H}$, aux indices de défaut (finis ou non) $\mathfrak{d}_T$ et $\mathfrak{d}_{T^*}$. Soit $\mathfrak{H}_1$ $(\neq \{0\})$ un sous-espace de $\mathfrak{H}$, invariant pour T. L'opérateur $T_1 = T|\mathfrak{H}_1$ a alors ses indices de défaut $\mathfrak{d}_{T_1}$, $\mathfrak{d}_{T_1^*}$ tels que*

$$\mathfrak{d}_{T_1} \leqq \mathfrak{d}_T \text{ et } \mathfrak{d}_{T_1^*} \leqq \mathfrak{d}_T + \mathfrak{d}_{T^*}.$$

Démonstration. Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive qui coïncide avec la fonction caractéristique de T et soit $\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ la factorisation de cette fonction en produit de deux fonctions analytiques contractives, $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$, correspondant au sous-espace invariant $\mathfrak{H}_1$ au sens du Théorème 1 de [IX]. On sait, *cf.* [IX], p. 295 et Proposition 4. 4, que l'application

$$\Delta(t)g \to \Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})g \oplus \Delta_1(t)g \qquad (g \in \mathfrak{E})$$

est isométrique et se prolonge par continuité à une application unitaire de $\overline{\Delta(t)\mathfrak{E}}$

sur $\overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} \oplus \overline{\Delta_1(t)\mathfrak{E}}$, pour presque tous les t. Cela entraîne $\dim \overline{\Delta(t)\mathfrak{E}} = \dim \overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} + \dim \overline{\Delta_1(t)\mathfrak{E}}$ pp. et par conséquent

(3) $$\dim \overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} \leqq \dim \overline{\Delta(t)\mathfrak{E}} \leqq \dim \mathfrak{E} = \mathfrak{d}_T \quad \text{pp.}$$

D'autre part, de la relation

$$I_{\mathfrak{F}} = \Delta_2(t)^2 + \Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it}) \quad \text{pp.}$$

il s'ensuit que, pour presque tous les t, $\mathfrak{F}$ est sous-tendu par $\Delta_2(t)\mathfrak{F}$ et $\Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it})\mathfrak{F}$, donc

(4) $$\dim \mathfrak{F} \leqq \dim \overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} + \dim \overline{\Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it})\mathfrak{F}}.$$

Comme $\Theta_2(e^{it})\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}_*$, on a $\dim \overline{\Theta_2(e^{it})\mathfrak{F}} \leqq \dim \mathfrak{E}_* = \mathfrak{d}_{T^*}$; par conséquent

(5) $$\dim \overline{\Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it})\mathfrak{F}} \leqq \dim \overline{\Theta_2(e^{it})\mathfrak{F}} \leqq \mathfrak{d}_{T^*}.$$

Ainsi, de (3), (4) et (5) il résulte:

(6) $$\dim \mathfrak{F} \leqq \mathfrak{d}_T + \mathfrak{d}_{T^*}.$$

Or, on sait (*cf.* Proposition 4. 3 de [IX]) que la fonction caractéristique de T_1 coïncide avec la partie pure $\{\mathfrak{E}^\circ, \mathfrak{F}^\circ, \Theta_1^\circ(\lambda)\}$ de $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ où $\mathfrak{E}^\circ \subset \mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}^\circ \subset \mathfrak{F}$. De là il résulte que

$$\mathfrak{d}_{T_1} = \dim \mathfrak{E}^\circ \leqq \dim \mathfrak{E} = \mathfrak{d}_T,$$

$$\mathfrak{d}_{T_1^*} = \dim \mathfrak{F}^\circ \leqq \dim \mathfrak{F} \leqq \mathfrak{d}_T + \mathfrak{d}_{T^*},$$

ce qui achève la démonstration de Proposition C.

Ouvrages cités

[I] H. Helson, *Lectures on invariant subspaces* (New York—London, 1964).
[VIII] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 38—71.
[IX] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 283—316).

(Reçu le 10 février 1965)