Einige Beiträge zur Approximationstheorie

Von G. ALEXITS in Budapest

Einleitung

Das allgemeine Approximationsproblem kann etwa folgenderweise gefaßt werden: Auf der Grundmenge G sei eine Funktionsklasse $\mathfrak{K}$ definiert und die Funktionen $f(x)$ aus $\mathfrak{K}$ gehören zu einem Banach-Raum B. Es sei ferner $\{\varphi_n(x)\}$ eine geordnete, abzählbare Menge von Funktionen auf G, die ebenfalls zu B gehören. Bildet man die Linearformen

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(x)$$

mit reellen Koeffizienten a_{nk}, so besteht das allgemeine Approximationsproblem darin, daß man die B-Normen $\|f-\Phi_n\|$ möglichst gut abschätzt und dadurch den „Annäherungsgrad" der Funktionen $f\in\mathfrak{K}$ mit den „Polynomen" $\Phi_n(x)$ im Raum B bestimmt.

Wir geben im § 1 notwendige und hinreichende Bedingungen an, damit eine Operatorenfolge $\{U_n(f)\}$ in einem Banach-Raum B die Elemente f von B bezüglich der B-Metrik in derselben Ordnung approximiert wie die mit den „Polynomen" $\{\Phi_n(x)\}$ erreichbare beste Approximation.

Im § 2 werden die Ergebnisse des § 1 auf die Approximation mit Orthogonalreihen-Mitteln angewendet. Wir werden ferner auch eine notwendige und hinreichende Bedingung für die beste Approximation im starken Sinn angeben. Der hinreichende Teil dieser Bedingung wurde schon von einigen Autoren — ohne die Kenntnis des allgemeinen Satzes — zum Beweis verschiedener Verschärfungen bekannter klassischer Approximationssätze verwendet.

Im § 3 wollen wir uns der Frage von Approximationen mit singulären Integralen in einzelnen Punkten zuwenden. Es wird sich die interessante Tatsache herausstellen, daß man scharf unterscheiden muß, ob es sich um die Approximation von Funktionen handelt, die gewisse Stetigkeitseigenschaften nur in einzelnen Punkten besitzen, oder aber dieselbe in ganzen Intervallen gleichmäßig erfüllen. Denn im ersten Fall hängt die Approximationsgeschwindigkeit nur von der Struktur des Kernes der sog. Lebesgueschen Konstanten ab, während im zweiten Fall die gleichmäßige Approximation im ganzen Intervall auch ohne das Erfülltsein dieser Strukturbedingung noch entsprechend gut sein kann.

§ 1. Allgemeines über die beste Approximation

1.1. Bezeichne G eine Menge, x ein Element von G; auf G seien Funktionen $f(x)$ definiert, die zu einem Banach-Raum B gehören. Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ ein abzählbares, geordnetes System von linear unabhängigen Funktionen [1]), die ebenfalls zu B gehören, und sei Φ die Menge der Linearformen

$$\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{mk}\varphi_k(x)$$

mit reellen a_{mk}. Die Linearform $\Phi_m(x)$ heißt von höchstens n-ter Ordnung, wenn für $k>n$ alle a_{mk} verschwinden.

Wir definieren für jedes $f\in B$ und $n=0, 1, \ldots$ die nicht negativen Zahlen

$$E_n(f, \Phi; B) = \inf_{\Phi_n} \|f-\Phi_n\|,$$

wobei die Bildung des Infimums über alle $\Phi_n(x)$ höchstens n-ter Ordnung zu verstehen ist, und nennen $E_n(f, \Phi; B)$ die mit den Linearformen $\Phi_n\in\Phi$ höchstens n-ter Ordnung erreichbare *beste Approximation* der Funktion $f\in B$.

Bezeichne $\{U_n(f)\}$ eine Folge von linearen, beschränkten Operatoren, welche den Raum B in sich abbilden. $\{U_n(f)\}$ heißt *fast bestapproximierend bezüglich* Φ, wenn es eine von f und n unabhängige positive Konstante K gibt derart, daß für alle $f\in B$ die Abschätzung gilt:

$$\|f-U_n(f)\| \leqq K\cdot E_n(f, \Phi; B) \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Wir sagen ferner: der Operator $U_n(g)$ *reproduziert* die Funktion $g\in B$, wenn

$$\|g-U_n(g)\| = 0$$

ist.

Satz 1. *Ist Φ dicht in B, so ist $\{U_n(f)\}$ bezüglich Φ dann und nur dann fast bestapproximierend, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1° *Die Operatoren $U_m(\Phi_n)$ reproduzieren für $m\geqq n$ alle Linearformen $\Phi_n(x)$ höchstens n-ter Ordnung.*

2° *Die Normen $\|U_n\|$ sind in ihrer Gesamtheit beschränkt.*

Notwendigkeit. Wir bemerken zunächst, daß $E_n(\Phi_n, \Phi; B)=0$ und daher $E_m(\Phi_n, \Phi; B)=0$ für alle $m\geqq n$ ist. Daraus folgt wegen der Annahme, $\{U_n(f)\}$ sei fast bestapproximierend bezüglich Φ, die Beziehung $\|\Phi_n - U_m(\Phi_n)\| = 0$, d. h. $U_m(\Phi_n)$ reproduziert $\Phi_n(x)$ für alle $m\geqq n$ wie es in 1° verlangt wurde. — Was die Bedingung 2° anbetrifft, nehmen wir an, sie sei nicht erfüllt. Dann gibt es nach dem Banach—Steinhausschen Satz eine Funktion $f\in B$, für welche $\limsup \|U_n(f)\| = \infty$ gilt. Aus $\|f-U_n(f)\| \geqq \|U_n(f)\| - \|f\|$ ergibt sich somit $\limsup \|f-U_n(f)\| = \infty$. Das steht aber zur Eigenschaft, $\{U_n(f)\}$ sei fast bestapproximierend, in Widerspruch; denn Φ ist dicht in B, also gilt $E_n(f, \Phi; B)\to 0$ und mithin auch $\|f-U_n(f)\|\to 0$. Die Bedingung 2° ist also notwendig.

[1]) Die lineare Unabhängigkeit ist im Raum B zu verstehen, d. h. $\|c_1\varphi_{\nu_1}(x)+c_2\varphi_{\nu_2}(x)+ +\ldots+c_n\varphi_{\nu_n}(x)\| = 0$ gilt dann und nur dann, wenn alle $c_\nu=0$ sind.

Hinlänglichkeit. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so wählen wir bei festem n eine Linearform $\Phi_n(x)$ höchstens n-ter Ordnung derart, daß $\|f-\Phi_n\| \leqq E_n(f, \Phi; B)+\varepsilon$ ist. Wenn wir beachten, daß in der Dreiecksungleichung

$$\|f-U_n(f)\| \leqq \|f-\Phi_n\|+\|\Phi_n-U_n(\Phi_n)\|+\|U_n(\Phi_n)-U_n(f)\|$$

das mittlere Glied wegen 1° verschwindet, so folgt

$$\|f-U_n(f)\| \leqq E_n(f, \Phi; B)+\varepsilon+\|U_n(\Phi_n-f)\|.$$

Nach 2° gibt es ein $K_1 > 0$ derart, daß

$$\|U_n(\Phi_n-f)\| \leqq K_1\cdot\|\Phi_n-f\| \leqq K_1\cdot[E_n(f, \Phi; B)+\varepsilon]$$

ist. Da ε von n unabhängig und beliebig klein ist, gilt somit

$$\|f-U_n(f)\| \leqq (K_1+1)E_n(f, \Phi; B),$$

wie es behauptet wurde.

1.2. Wir betrachten nun lineare, beschränkte Operatoren $V_n(f)$, die B in sich abbilden und der Bedingung 1°, nicht aber der Bedingung 2° genügen. Wir nehmen jedoch an, daß diese Operatoren die Eigenschaft 1° in folgender verschärfter Form besitzen:

1* *Für jede Linearform* $\Phi_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\Phi_k(x)$ *gilt*

$$V_\nu(\Phi_n)=\sum_{k=0}^{\nu} a_{nk}\varphi_k(x) \qquad (\nu=0, 1, \ldots, n, \ldots).$$

Um aus der nicht fast bestapproximierenden Folge $\{V_n(f)\}$ eine fast bestapproximierende Operatorenfolge zu bilden, sei $\mathfrak{T}$ ein Toeplitzsches lineares Summationsverfahren mit der zeilenfiniten, positiven Matrix

$$M(\alpha)=\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \cdots & \alpha_{0N_0} & 0 \ldots \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N_1} & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad (\alpha_{nk}\geqq 0,\ N_n\geqq n),$$

und bezeichne

$$t_n(f, V)=\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}V_k(f)$$

das n-te Mittel des Verfahrens $\mathfrak{T}$. Da $M(\alpha)$ zeilenfinit ist und die $V_k(f)$ lineare, beschränkte Operatoren sind, ist $t_n(f, V)$ ebenfalls ein linearer, beschränkter Operator.

Satz 2. *Ist Φ in B dicht und genügen die Operatoren $V_n(f)$ der Bedingung 1*, so ist, damit $\{t_n(f, V)\}$ in B fast bestapproximierend bezüglich Φ sei, notwendig und hinreichend, daß die Matrix $M(\alpha)$ den Bedingungen*

$$\alpha_{nk}=0 \quad \text{für} \quad k<n, \tag{1}$$

$$\sum_{k=n}^{N_n}\alpha_{nk}=1 \tag{2}$$

genügt und die Normen $\|t_n\|$ in ihrer Gesamtheit beschränkt sind.

N o t w e n d i g k e i t. Die von n unabhängige Beschränktheit der Normen $\|t_n\|$ folgt unmittelbar aus der Bedingung 2° des Satzes 1, welcher die Operatoren $t_n(f, V)$ zu genügen haben, da sie nach Annahme eine fast bestapproximierende Folge bilden. Um zu sehen, daß auch die Bedingungen (1) und (2) notwendig sind, betrachten wir die folgende Linearform genau n-ter Ordnung:

$$\Phi_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x).$$

Für diese gilt

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) - \left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \Phi_n^* \right\| \leqq$$

$$\leqq \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) + \Phi_n^* \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk} - t_n(\Phi_n^*, V) \right\| + \|t_n(\Phi_n^*, V) - \Phi_n^*\| \leqq$$

$$\leqq \left\| \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) - t_n(\Phi_n^*, V) \right\| + \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk} \|\Phi_n^* - V_k(\Phi_n^*)\| + \|t_n(\Phi_n^*, V) - \Phi_n^*\| =$$

$$= \|A_n\| + \|B_n\| + \|C_n\|.$$

Nach Definition ist $A_n \equiv 0$, also auch $\|A_n\| = 0$. Da $V_k(\Phi_n)$ nach Annahme für $k \geqq n$ die Linearform Φ_n in B reproduziert, ist $\|\Phi_n - V_k(\Phi_n)\| = 0$ und mithin $\|B_n\| = 0$. Da ferner $\{t_n(\Phi_n, V)\}$ fast bestapproximierend bezüglich Φ angenommen wurde, genügen die Operatoren $t_n(\Phi_n, V)$ der Bedingung 1° des Satzes 1, und daher ist auch $\|C_n\| = 0$. Wir sind somit zum folgenden Ergebnis gelangt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) - \left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \Phi_n^* \right\| = 0. \tag{3}$$

Wegen der Bedingung 1* ist $V_k(\Phi_n^*)$ eine Linearform höchstens k-ter Ordnung aus Φ, also

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_k(x).$$

Ferner gilt, wenn für $k < n$

$$c_k = 1 - \sum_{\nu=n}^{N_n} \alpha_{n\nu}$$

gesetzt wird,

$$\left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \Phi_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x) + \left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \varphi_n(x).$$

Aus (3) folgt somit

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - c_k) \varphi_k(x) - \left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \varphi_n(x) \right\| = 0,$$

was aber wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_\nu(x)$ nur dann möglich ist, wenn sämtliche Koeffizienten der auftretenden $\varphi_\nu(x)$ verschwinden. Es gilt also

$$1-\sum_{k=n}^{N_n}\alpha_{nk}=0,$$

womit die Notwendigkeit der Bedingung (2) bewiesen ist. Dann nimmt aber (3) die Gestalt an:

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{nk}V_k(\Phi_n^*)\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{n-1}b_k\varphi_k(x)\right\|=0. \tag{4}$$

Nach 1* ist $V_k(\Phi_n^*)=\sum_{\nu=0}^{k}\varphi_\nu(x)$, also

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{nk}V_k(\Phi_n^*)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x)\sum_{\nu=k}^{n-1}\alpha_{n\nu},$$

und demzufolge

$$b_k=\sum_{\nu=k}^{n-1}\alpha_{n\nu}.$$

Wegen (4) und der linearen Unabhängigkeit sind alle $b_k=0$, speziell auch

$$b_0=\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_{n\nu}=0,$$

und diese Beziehung ist wegen $\alpha_{nk}\geqq 0$ mit $\alpha_{n\nu}=0$ für $\nu<n$ gleichwertig, wie es eben in (1) verlangt wurde.

H i n l ä n g l i c h k e i t. Die Operatoren $t_n(f, V)=U_n(f)$ erfüllen nach Annahme die Bedingung 2° des Satzes 1. Außerdem gilt nach 1*, (1) und (2) für jede Linearform höchstens n-ter Ordnung $\Phi_n\in\Phi$ und $m\geqq n$

$$\|\Phi_n-t_m(\Phi_n, V)\|=\left\|\Phi_n-\Phi_n\sum_{k=n}^{N_n}\alpha_{nk}\right\|=0.$$

Die Bedingung 1° des Satzes 1 ist also ebenfalls erfüllt. Die Folge $\{t_n(f, V)\}$ ist somit fast bestapproximierend bezüglich Φ, wie wir es behauptet haben.

§ 2. Anwendung auf die Approximation mit Linearformen von Orthonormalfunktionen

2.1. Wir wählen als Grundmenge G ein lineares Intervall $[a, b]$, und verstehen unter $\{\varphi_n(x)\}$ ein Orthonormalsystem, für welches also

$$\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_l(x)\,d\mu(x)=\begin{cases}0 & (k\neq l),\\ 1 & (k=l)\end{cases}$$

gilt, wo $\mu(x)$ eine monoton nicht-abnehmende Funktion mit nicht fast überall verschwindender Ableitung bedeutet. Die Funktion $f(x)$ heißt L_μ^p-integrierbar, wenn sie μ-meßbar ist und das Lebesgue—Stieltjessche Integral

$$\int_a^b |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

existiert. Die n-te Teilsumme der Entwicklung

$$(5) \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad \left(c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\, d\mu(x)\right)$$

bezeichnen wir mit $s_n(f, x)$, wobei die Existenz der Entwicklungskoeffizienten c_n im Fall $1 \leqq p < 2$ natürlich eigens vorausgesetzt werden muß; in diesem Fall setzen wir also stets voraus, daß $\{\varphi_n(x)\}$ zum Gegenraum von L_μ^p gehört.

Satz 3. *Ist B ein Teilraum* [2]) *von L_μ^p, $\{\varphi_n(x)\}$ ein Orthonormalsystem und Φ dicht in B, so sind die Mittel*

$$t_n(f, x) = \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} V_k(f)$$

in B dann und nur dann fast bestapproximierend bezüglich Φ, wenn die Operatoren $V_k(f)$ die Teilsummen $s_k(f, x)$ der Entwicklung (5) *sind, die α_{nk} den Bedingungen* (1) *und* (2) *genügen und für die B-Normen von $t_n(f, x)$ die Beziehung*

$$\|t_n(f, x)\|_B \leqq K \cdot \|f(x)\|_B$$

für alle n besteht.

In einem Teilraum B von L_μ^p ist jede bezüglich der B-Metrik konvergente Folge auch bezüglich der L_μ^p-Metrik konvergent, Also gibt es zu jedem $f \in B$ eine Folge $\{\Phi_m(x)\}$ von Linearformen aus Φ, welche im Sinne der L_μ^p-Metrik gegen $f(x)$ stark konvergiert. Dann konvergiert $\{\Phi_m(x)\}$ auch schwach gegen $f(x)$, d. h. der ν-te Koeffizient $a_{m\nu}$ von $\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{mk}\varphi_k(x)$ konvergiert mit zunehmendem m gegen den ν-ten Entwicklungskoeffizient c_ν von $f(x)$. Nach der Eigenschaft 1* des Operators V_n gilt aber

$$V_n(\Phi_m) = \sum_{k=0}^{n} a_{mk}\varphi_k(x),$$

falls nur $m \geqq n$ ist. Für ein festes n ist der Operator V_n im Raum B stetig, also

$$V_n(f) = \lim_{m\to\infty} V_n(\Phi_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{mk}\varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x) = s_n(f, x).$$

Damit ist unsere erste Behauptung bewiesen. Alles übrige folgt unmittelbar aus dem Satz 2.

---

[2]) D. h. ist $f_n, f \in B$ und gilt für die B-Normen $\|f_n - f\|_B \to 0$, dann besteht auch $\|f_n - f\|_{L_\mu^p} \to 0$.

2.2. Aus dem soeben bewiesenen Satz ergibt sich das folgende Korollar:

Für die Orthogonalentwicklung (5) *gibt es außer höchstens der* $(C, 0)$*-Summation (Konvergenz im gewöhnlichen Sinn) kein Toeplitzsches Summationsverfahren* $\mathfrak{T}$ *mit positiver, dreieckiger Matrix* $M(\alpha)$, *dessen Mittel in* L_μ^p *fast bestapproximierend wären.*

Die Dreieckigkeit der Matrix $M(\alpha)$ bedeutet nämlich $\alpha_{nk}=0$ für $k>n$. Die Mittel $t_n(f, x)$ des Verfahrens $\mathfrak{T}$ sind mithin höchstens von der n-ten Ordnung; nach (1) und (2) könnte also nur $\alpha_{nn}=1$, sonst $\alpha_{nk}=0$ sein, was nach Satz 3 so viel bedeutet wie $t_n(f, x)=s_n(f, x)$.

Die Teilsummen $s_n(f, x)$ der Orthogonalentwicklung von $f(x)$ wären also ideale Annäherungsmittel, wenn die Beziehung $\|s_n(f, x)\| \leqq K\cdot\|f(x)\|$ für $n=0, 1, \dots$ gelten würde. Das ist aber nur für sehr spezielle Orthogonalsysteme der Fall. Es wurde für das Haarsche Orthonormalsystem $\{\chi_n(x)\}$ in den Räumen $L^p(0, 1)$ mit $1\leqq p\leqq\infty$ bewiesen, wobei unter $L^\infty(0, 1)$ der Raum $C(0, 1)$ der in $[0, 1]$ stetigen Funktionen zu verstehen ist. Bezeichnet also X die Menge aller mit den $\chi_k(x)$ gebildeten Linearformen $\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\chi_k(x)$, so gilt

$$\|f(x)-s_n(f, x)\|_{L^p} \leqq K\cdot E(f, X;\, L^p) \qquad (1\leqq p\leqq\infty).$$

Eine Beziehung, die für $p=\infty$ von Sz.-Nagy [7], während für $1\leqq p<\infty$ später von Uljanov [8] in anderer Fassung bewiesen wurde.

Die Teilsummen der Haarschen Entwicklungen scheinen also zu Approximationszwecken besonders geeignet zu sein. Das sind sie aber doch nicht, wenn es sich um differenzierbare Funktionen handelt. Für diese würde man nämlich $o(n^{-1})$ als Annäherunsgrad der besten Approximation erwarten, dagegen hat Golubow [5] bewiesen, daß im Raum $C(0, 1)$ der stetigen Funktionen die Beziehung $E_n(f, X;\, C)=o(n^{-1})$ mit $f(x)\equiv$Konst. gleichwertig ist.

2.3. Wir werden nun die Frage der Approximation im starken Sinn untersuchen. Das Approximationsproblem im Raum $C(a, b)$ der in $[a, b]$ stetigen Funktionen wird nämlich wesentlich verschärft, wenn man statt den gewöhnlichen Differenzen

$$|f(x)-t_n(f, x)| = \left|\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}[f(x)-s_k(f, x)]\right|$$

das positive, nicht-lineare Funktional

$$T_n(f, x, p) = \left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}|f(x)-s_k(f, x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (\alpha_{nk}\geqq 0)$$

für ein $p\geqq 1$ betrachtet, und dann die Größenordnung von

$$T_n^*(f, p) = \max_{a\leqq x\leqq b} T_n(f, x, p)$$

untersucht. Wir sagen: Die Folge $\{t_n(f, x)\}$ ist *im starken Sinne fast bestapproximierend bezüglich* Φ, wenn

$$T_n^*(f, p) \leqq K\cdot E_n(f, \Phi;\, C)$$

mit einem von f und n unabhängigen K gilt.

Satz 4. *Sind die Funktionen des Orthonormalsystems* $\{\varphi_n(x)\}$ *stetig und* Φ *in C dicht, so ist* $\{t_n(f, x)\}$ *dann und nur dann im starken Sinne fast bestapproximierend bezüglich* Φ, *wenn die Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllt sind und außerdem*

$$\max_{a\leqq x\leqq b}\left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}|s_k(f, x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq K_2\cdot\max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)| \tag{6}$$

mit einem von n unabhängigen K_2 *gilt.*

Notwendigkeit. Die Notwendigkeit der Bedingungen (1) und (2) folgt aus dem Satz 3, da die Eigenschaft, fast bestapproximierend im starken Sinne zu sein, die im gewöhnlichen Sinne nach sich zieht. Wir haben also nur noch die Notwendigkeit von (6) zu beweisen. Zunächst ist es ersichtlich, daß

$$\left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}|s_k(f, x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}(|f(x)|+|s_k(f, x)-f(x)|)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq 2^{\frac{p-1}{p}}\left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}|f(x)|^p+\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}|s_k(f, x)-f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq 2^{\frac{p-1}{p}}|f(x)|\left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}\right\}^{\frac{1}{p}}+2^{\frac{p-1}{p}}\left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}|s_k(f, x)-f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

gilt. Daraus folgt nach (1), (2) und der Definition von $T_n^*(f, p)$:

$$\max_{a\leqq x\leqq b}\left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}|s_k(f, x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq 2^{\frac{p-1}{p}}\max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)|+2^{\frac{p-1}{p}}T_n^*(f, p).$$

Die Beziehung (6) wird also bewiesen, wenn wir zeigen, daß es ein von n unabhängiges K_3 gibt, für welches

$$T_n^*(f, p) \leqq K_3\cdot\max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)|$$

besteht. Nun ist zwar $T_n(f, x, p)$ kein additives, also auch kein lineares Funktional, es besitzt aber die folgenden Eigenschaften:

1. $T_n(f, x, p)$ ist stetig im Raum $C(a, b)$,
2. $T_n(f+g, x, p) \leqq T_n(f, x, p)+T_n(g, x, p)$,
3. $T_n(cf, x, p)=cT_n(f, x, p)$, wenn $c\geqq 0$.

Ein Blick auf den üblichen Beweis des Banach—Steinhausschen Satzes zeigt, daß dieser nicht nur für beschränkte, lineare Funktionale gilt, für welche er lediglich ausgesprochen wird, sondern für alle positiven Funktionale, welche die Eigenschaften 1, 2, 3 besitzen. Die Funktionale $T_n(f, x, p)$ können also wegen ihrer Eigenschaft, fast bestapproximierend zu sein, für ein $|f(x)|\leqq 1$ keine unendliche obere Grenze haben, daher besitzen ihre Normen $T_n^*(f, p)$ eine gemeinsame endliche Schranke K_3, was wir eben zu beweisen hatten.

Hinlänglichkeit. Der Beweis ist ganz kurz. Man wähle eine Folge $\{\Phi_n(x)\}$ aus Φ derart aus, daß

$$\max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)-\Phi_n(x)|<E_n(f,\Phi;C)+\varepsilon$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon>0$ gilt. Bei Beachtung von (1), (2) und $s_k(\Phi_n', x)\equiv\Phi_n(x)$ für $k\geqq n$ ergibt sich dann

$$T_n^*(f,p)\leqq\max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)-\Phi_n(x)|+\max_{a\leqq x\leqq b}\left\{\sum_{k=n}^{N_n}\alpha_{nk}|s_k(\Phi_n-f,x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

woraus nach (6) und der Beliebigkeit von ε die Beziehung

$$T_n^*(f,p)\leqq(1+K_3)\cdot E_n(f,\Phi;C)$$

folgt, w. z. b. w.

Die neuesten Ergebnisse bezüglich der starken Approximation mit trigonometrischen oder algebraischen Polynomen (Alexits—Králik [1], [2], Leindler [6]) beruhen im wesentlichen auf dem hinreichenden Teil dieses Satzes. Das Entscheidende in diesen Arbeiten war nämlich stets der Schritt es zu zeigen, daß bei der in der betreffenden Arbeit getroffenen Wahl der Matrix $M(\alpha)$, die Beziehung (6) erfüllt ist.

§ 3. Approximation mit singulären Integralen

3.1. Wir wenden uns der folgenden Frage zu: Wie gestaltet sich die Approximation einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 des Intervalls $[a,b]$ mit einer Folge $\{I_n(f,x)\}$ von Integralen der Gestalt

$$I_n(f,x_0)=\int_a^b f(t)K_n(t,x_0)\,d\mu(t),$$

wenn die L_μ-integrierbare Funktion $f(x)$ nur in x_0 eine vorgeschriebene Stetigkeitseigenschaft hat?

Bezeichne zu diesem Zweck $\Omega(\delta)$ eine für $\delta\geqq0$ definierte, stets wachsende, stetige Funktion mit $\Omega(0)=0$ und $\Omega(b-a)\leqq1$. Bezeichne ferner $\mathfrak{K}(\Omega,x_0)$ die Klasse aller L_μ-integrierbaren Funktionen, die in einer festen Umgebung $|x-x_0|\leqq\delta_0$ des Punktes x_0 beschränkt sind und in x_0 den lokalen Stetigkeitsmodul

$$\omega(\delta,f;x_0)=\sup_{0<|x-x_0|\leqq\delta\leqq\delta_0}|f(x)-f(x_0)|$$

von der Größenordnung $\omega(\delta,f;x_0)\leqq M\Omega(\delta)$ haben.

Satz 5. *Existieren die Integrale $I_n(f,x_0)$ für alle L_μ-integrierbaren Funktionen und ist $f\in\mathfrak{K}(\Omega,x_0)$, so gilt die Abschätzung*

$$|f(x_0)-I_n(f,x_0)|\leqq K\Omega\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n=0,1,\ldots)$$

nur dann, wenn die Funktion

$$k_n(t,x_0)=\frac{\Omega(|t-x_0|)}{\Omega(1/n)}K_n(t,x_0)$$

der Bedingung genügt:

$$(7) \qquad \int_a^b |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t) \leqq K_4 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Zum Beweis setze man einfachkeitshalber $[a, b]=[0, 1]$ und $x_0=0$. Wir machen aus der Funktionenmenge $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$ einen Banach-Raum, indem wir die Metrik

$$(8) \qquad \|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, d\mu(x) + \sup_{0 \leqq x \leqq \delta_0} |f(x)| + \sup_{0 < x \leqq \delta_0} \frac{|f(x)-f(0)|}{\Omega(x)}$$

einführen. Es ist klar, daß hierdurch $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$ ein linearer, metrischer Raum geworden ist. Man sieht aber leicht, daß er auch vollständig, also ein Banach-Raum ist. Denn sei $\{f_n(x)\}$ eine Cauchysche Fundamentalfolge aus $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$. Nach (8) existiert die Grenzfunktion $f(x)$ in $[0, 1]$ fast überall, u. zw. ist sie wegen des ersten Gliedes rechts L_μ-integrierbar, wegen des zweiten in $[0, \delta_0]$ beschränkt und in $x_0=0$ stetig, ferner gilt wegen des dritten $\omega(\delta, f; 0) \leqq M\Omega(\delta)$; mithin gehört $f(x)$ zu $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$, das somit ein Banach-Raum ist.

Man betrachte nun die in $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$ definierten Funktionale

$$U_n(f) = \frac{I_n(f, 0) - f(0)}{\Omega(1/n)}.$$

Sie sind linear und einzeln beschränkt, da $I_n(f, 0)$ nach Annahme für alle L_μ-integrierbaren $f(x)$ existiert, weshalb bekanntlich

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqq t \leqq 1} |K_n(t, 0)| = M_n$$

endlich sein muß.[3]) Dann gilt

$$|U_n(f)| \leqq \frac{M_n}{\Omega(1/n)} \int_0^1 |f(t)|\, d\mu(t) + \frac{f(0)}{\Omega(1/n)},$$

aus welcher Abschätzung nach (8)

$$|U_n(f)| \leqq C_n \|f\|$$

folgt, wo C_n eine Konstante bedeutet. Die $U_n(f)$ sind also in $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$ definierte, lineare, beschränkte Funktionale.

Man setze nun

$$f_n(t) = \frac{1}{3} \min\left(1, 1 \Big/ \int_0^1 d\mu(t)\right) \cdot \Omega(t) \operatorname{sign} K_n(t, 0).$$

[3]) Die Bildung des vrai max $|K_n(t, 0)|$ ist bezüglich des μ-Maßes zu verstehen.

Die Funktionen $f_n(t)$ gehören zu $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$, da sie μ-meßbar und beschränkt sind, ferner wegen $\Omega(0)=0$ den lokalen Stetigkeitsmodul

$$\omega(\delta, f; 0) \leqq \sup_{0 \leqq t \leqq \delta} \frac{1}{3} |\Omega(t) \operatorname{sign} K_n(t, 0)| = \frac{1}{3} \Omega(\delta)$$

haben. Außerdem gilt nach (8) wegen $\Omega(\delta) \leqq 1$:

$$\|f_n(t)\| \leqq \frac{1}{3} \min\left(1, 1\Big/\int_0^1 d\mu(t)\right) \cdot \int_0^1 \Omega(t)\, d\mu(t) + \frac{1}{3} \Omega(\delta) + \frac{1}{3} \frac{\Omega(\delta)}{\Omega(\delta)} \leqq 1.$$

Wir nehmen nun an, (7) sei nicht erfüllt, daß also

$$\limsup_{n \to \infty} \int_0^1 |k_n(t, 0)|\, d\mu(t) = \infty$$

gilt, und leiten daraus einen Widerspruch her. Denn $\Omega(t)$ ist positiv, daher $\operatorname{sign} K_n(t, 0) = \operatorname{sign} k_n(t, 0)$, folglich gilt wegen $f_n(0)=0$

$$U_n(f_n) = \frac{1}{\Omega(1/n)} \int_0^1 f_n(t) K_n(t, 0)\, d\mu(t) =$$

$$= \frac{\min\left(1, 1\Big/\int_0^1 d\mu(t)\right)}{3\Omega(1/n)} \int_0^1 \Omega(t) \operatorname{sign} k_n(t, 0) \cdot \frac{\Omega(1/n) k_n(t, 0)}{\Omega(t)}\, d\mu(t) =$$

$$= \frac{\min\left(1, 1\Big/\int_0^1 d\mu(t)\right)}{3} \int_0^1 |k_n(t, 0)|\, d\mu(t),$$

und mithin

$$\limsup_{n \to \infty} |U_n(f_n)| = \infty.$$

Es gibt dann nach dem Banach—Steinhausschen Satz auch ein festes Element $f \in \mathfrak{K}(\Omega, 0)$ mit $\limsup |U_n(f)| = \infty$. Das bedeutet nach der Definition von $U_n(f)$ so viel wie

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|I_n(f, 0) - f(0)|}{\Omega(1/n)} = \infty.$$

Diese Beziehung steht aber zu unserer Annahme

$$\frac{|f(0) - I_n(f, 0)|}{\Omega(1/n)} \leqq K$$

in Widerspruch.

3.2. Der soeben bewiesene Satz bildet die Grundlage zur systematischen Untersuchung der Approximation mit singulären Integralen. Wir setzen voraus, daß $I_n(f, x_0)$ *konstantentreu* ist, worunter wir folgendes verstehen:

$$\int_a^b K_n(t, x_0)\, d\mu(t) = 1 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Satz 6. *Sind die Integrale $I_n(f, x_0)$ konstantentreu und ist die μ-meßbare Funktion $f(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ beschränkt und in x_0 stetig mit einem lokalen Stetigkeitsmodul $\omega(\delta, f; x_0) \leqq M\Omega(\delta)$, so gilt*

$$|f(x_0)-I_n(f, x_0)| \leqq K\Omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

dann und nur dann, wenn die Kerne $K_n(t, x_0)$ der Integrale $I_n(f, x_0)$ so beschaffen sind, daß die Bedingung (7) erfüllt ist.

Die Notwendigkeit wurde soeben bewiesen, es bleibt noch zu zeigen, daß (7) auch hinreichend ist. Beachten wir hierzu, daß

$$|f(x_0)-I_n(f, x_0)| \leqq \left(\int_a^{x_0-\delta_0} + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} + \int_{x_0+\delta_0}^{b}\right) |f(x_0)-f(t)|\, |K_n(t, x_0)|\, d\mu(t) \leqq$$

$$\leqq \Omega(1/n) \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \frac{|f(x_0)-f(t)|}{\Omega(|t-x_0|)} |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t) +$$

$$+\frac{\Omega(1/n)}{\Omega(\delta_0)} \left(\int_a^{x_0-\delta_0} + \int_{x_0+\delta_0}^{b}\right) |f(x_0)-f(t)|\, |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t)$$

ist. Wegen der Beschränktheit von $f(t)$ gilt

$$|f(x_0)-f(t)| \leqq 2 \sup_{t\in[a, b]} |f(t)| = 2\bar{M},$$

ferner besteht für $|t-x_0| \leqq \delta_0$ die Beziehung

$$|f(x_0)-f(t)| \leqq \omega(|t-x_0|, f; x_0) \leqq M\Omega(|t-x_0|).$$

Wir erhalten somit die Abschätzung

$$|f(x_0)-I_n(f, x_0)| \leqq M\Omega(1/n) \int_a^b |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t) + \frac{4\bar{M}}{\Omega(\delta_0)}\, \Omega(1/n) \int_a^b |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t),$$

woraus wegen (7) die behauptete Beziehung

$$|f(x_0)-I_n(f, x_0)| \leqq K\Omega(1/n)$$

mit $K = K_4(M+4\bar{M}/\Omega(\delta_0))$ folgt.

3.3. Aus dem Beweis des hinreichenden Teiles stellt sich heraus, daß der Annäherungsgrad $K \cdot \Omega(1/n)$ im Teilintervall $[c, d]$ von $[a, b]$ gleichmäßig erreicht wird, wenn die im Satz 6 gestellten Bedingungen nicht nur für einen Punkt x_0, sondern für alle $x \in [c, d]$ gleichmäßig erfüllt sind, also gilt der folgende

Satz 7. *Sind die Integrale $I_n(f, x)$ für alle $x \in [c, d]$ konstantentreu und ist $f(x)$ in $[a, b]$ beschränkt und μ-meßbar, in $[c, d]$ stetig mit einem Stetigkeitsmodul*

$$\omega(\delta, f; c, d) = \sup_{\substack{0 \leqq |t-x| \leqq \delta \\ t, x \in [c, d]}} |f(t) - f(x)| \leqq M\Omega(1/n),$$

besteht ferner die Beziehung

$$\int_a^b |k_n(t, x)| \, d\mu(t) \leqq K_5$$

für alle $x \in [c, d]$, so gilt bei jedem $\varepsilon > 0$

$$\sup_{c+\varepsilon \leqq x \leqq d-\varepsilon} |f(x) - I_n(f, x)| \leqq K\Omega(1/n).$$

3.4. Es ist recht interessant, daß die Bedingungen des Satzes 7 für die gleichmäßige Approximation von der Größenordnung $\Omega(1/n)$ hinreichend, *nicht aber notwendig* sind, obwohl sie für die Approximation in einzelnen Punkten nach Satz 5 sowohl notwendig wie auch hinreichend sind. Diese Tatsache läßt sich an dem Beispiel der (C, β)-Mittel der Fourierreihe illustrieren. Die Kerne $K_n^\beta(t, x_0)$ der (C, β)-Mittel der Fourierreihe genügen nämlich für $0 < \beta \leqq 1$ den folgenden Bedingungen (vgl. Zygmund [9], S. 94):

$$|K_n^\beta(t, x_0)| \leqq K_6 n \qquad (0 \leqq |t - x_0| \leqq 1/n),$$

$$|K_n^\beta(t, x_0)| \leqq \frac{K_7}{n^\beta |t - x_0|^{1+\beta}} \qquad (1/n \leqq |t - x_0| \leqq \pi).$$

Wählt man $\Omega(\delta) = \delta^\alpha$ und $\omega(\delta, f; x_0) \leqq M\delta^\alpha$, d. h. genügt $f(x)$ in x_0 einer lokalen Lipschitzbedingung α-ter Ordnung, so ergeben sich für $k_n(t, x_0)$ die Abschätzungen

$$|k_n(t, x_0)| \leqq K_6 n^{1+\alpha} |t - x_0|^\alpha \qquad \left(0 \leqq |t - x_0| \leqq \frac{1}{n}\right),$$

$$|k_n(t, x_0)| \leqq \frac{K_7}{n^{\beta-\alpha} |t - x_0|^{1+\beta-\alpha}} \qquad \left(\frac{1}{n} \leqq |t - x_0| \leqq \pi\right).$$

Ist $0 < \alpha < \beta$, so folgt daraus

$$\int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} |k_n(t, x_0)| \, dt \leqq K_6 n^{1+\alpha} \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} |t - x_0|^\alpha \, dt \leqq 2K_6,$$

ferner

$$\left(\int_0^{x_0 - \frac{1}{n}} + \int_{x_0 + \frac{1}{n}}^{\pi} \right) |k_n(t, x_0)| \, dt \leqq \frac{K_7}{n^{\beta-\alpha}} \left(\int_0^{x_0 - \frac{1}{n}} + \int_{x_0 + \frac{1}{n}}^{\pi} \right) \frac{dt}{|t - x_0|^{1+\beta-\alpha}} \leqq K_8.$$

Die Bedingung (7) ist also erfüllt, daher approximieren die (C, β)-Mittel $\sigma_n^\beta(f, x)$ im Punkt x_0 laut Satz 6 mit der Geschwindigkeit

$$f(x_0)-\sigma_n^\beta(f, x_0) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Die Abschätzungen für $K_n^\beta(t, x_0)$ und mithin auch die für $k_n(t, x_0)$ lassen sich aber nicht wesentlich verbessern (vgl. ZYGMUND [9], S. 95), also gilt für $\beta \leqq \alpha$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^\pi |k_n(t, x_0)|\, dt = \infty.$$

Nach Satz 5 gibt es daher eine um x_0 beschränkte, integrierbare Funktion, die in x_0 einer lokalen Lipschitzbedingung α-ter Ordnung genügt, und für welche

$$\limsup_{n\to\infty} |f(x_0)-\sigma_n^\beta(f, x_0)| = \infty$$

gilt. Wenn aber $f(x)$ *im ganzen Intervall* $[0, 2\pi]$ *gleichmäßig einer Lipschitzbedingung α-ter Ordnung mit* $0<\alpha<1$ *genügt*, so gilt für jedes $\beta>0$, also auch für ein $\beta \leqq \alpha$, gleichmäßig die Beziehung

$$f(x)-\sigma_n^\beta(f, x) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

(FLETT [4]).

Der Grund dieser Erscheinung besteht darin, daß die Größenordnung der Lebesgueschen Konstanten für die Größenordnung der gleichmäßigen Approximation im ganzen Intervall nicht unbedingt ausschlaggebend ist. Diese Tatsache wurde für die Approximation mit Interpolationspolynomen von ERDŐS—TURÁN [3] ausdrücklich betont.

Schriftenverzeichnis

[1] G. ALEXITS—D. KRÁLIK, Über die Approximation mit starken de la Vallée—Poussinschen Mitteln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 43—50.
[2] ——— Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 93—102.
[3] P. ERDŐS—P. TURÁN, On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 47—65.
[4] T. M. FLETT, On the degree of approximation to a function by the Cesàro means of its Fourier Series, *Quarterly J. Math.*, (2) **7** (1956), 81—95.
[5] B. I. GOLUBOW, *Iswestia Akad. Nauk SSSR.* (Im Erscheinen.)
[6] L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 255—262.
[7] B. SZ.-NAGY, Approximation properties of orthogonal expansions, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953—54), 31—37.
[8] P. L. ULJANOW, Über Reihen, die nach dem Haarschen System fortschreiten, *Math. Sbornik*, (3) **63** (1964), 356—391. (Russisch.)
[9] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*. Bd. I (Cambridge, 1959).

(Eingegangen am 4. November 1964)