НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НОРМАМИ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

С. Б. СТЕЧКИН (Свердловск)

Пусть $I=(-\infty, \infty)$ или $I=[0, \infty)$, действительная функция $f(x)$ задана и ограничена на I и имеет n—1-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица. Положим

$$M_k(f) = \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)| \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

причем для $k=n$ последнее выражение понимается как верхняя грань производных чисел функции $f^{(n-1)}(x)$.

Неравенства вида

$$(1) \qquad M_k(f) \leqq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n}(f) M_n^{k/n}(f),$$

связывающие величины $M_0(f)$, $M_k(f)$ и $M_n(f)$, мы будем называть *неравенствами Колмогорова*. А. Н. Колмогоров [1] для случая $I=(-\infty, \infty)$ нашел наилучшее значение $C_{n,k}$ в этих неравенствах при всех n и k. В случае $I=[0, \infty)$ известные результаты (Картан, Горный) не являются окончательными. Для нескольких частных значений n и k наилучшие константы были известны и раньше.

Пусть, далее, $p\geqq 1$,

$$\|f\|_p = \left\{\int_I |f(x)|^p \, dx\right\}^{1/p}$$

и если в неравенстве фигурирует $\|f^{(n)}(x)\|$, то предполагается, что функция $f^{(n-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке $[a, b]\subset I$. Харди, Литтльвуд и Полиа [2] отмечают (без доказательства), что для любого $p\geqq 1$ справедливо неравенство

$$(2) \qquad \|f'\|_{(p)} \leqq C_{2,1}(p) \|f\|_{(p)}^{1/2} \|f''\|_{(p)}^{1/2}.$$

Наилучшие значения $C_{2,1}(p)$ известны при $p=\infty, p=2$ и $p=1$ и сведены в таблицу, а аналог неравенства (1) для всех $p\geqq 1$ и всех натуральных n доказан Штейном [3].

f	$I=(-\infty, \infty)$	$I=[0, \infty)$	Авторы
$p=\infty, \quad \lVert f\rVert = \sup\limits_{x\in I} \lvert f(x)\rvert$			
f любого знака	$\sqrt{2}$	2	Ландау, Адамар
$f(x)\geqq 0$	1	$\sqrt{2}$	Оловянишников
$p=2, \quad \lVert f\rVert = \left\{\int\limits_I \lvert f(x)\rvert^2\,dx\right\}^{1/2}$			
f любого знака	1	$\sqrt{2}$	Харди, Литтльвуд и Полиа
$f(x)\geqq 0$	?	?	—
$p=1, \quad \lVert f\rVert = \int\limits_I \lvert f(x)\rvert\,dx$			
f любого знака	$\sqrt{2}$	?	Штейн
$f(x)\geqq 0$	1	$\sqrt{2}$	Новые случаи

Цель настоящей работы — перенести неравенства Колмогорова на абстрактные функции. Пусть K есть линейное нормированное пространство функций $f(x)$, заданных на I и принимающих значения в некотором (действительном или комплексном) банаховом пространстве H. Изучаются неравенства, связывающие нормы функции и ее производных для $f\in K$. При этом, если в некотором неравенстве фигурирует $f^{(n)}(x)$, то предполагается, что для $f(x)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом n-го порядка в интегральной форме.

Теорема. *Пусть для любого t $\|f(x+t)\| = \|f(x)\|$ $(I=(-\infty, \infty))$, или для любого $h\geqq 0$ $\|f(x+h)\| \leqq \|f(x)\|$ $(I=[0, \infty))$. Тогда*

(3) $$\|f^{(k)}\| \leqq C_{n,k}\|f\|^{(n-k)/n}\|f^{(n)}\|^{k/n} \qquad (1\leqq k\leqq n-1).$$

При этом можно положить

$$C_{n,k} = (k+1)\left(\frac{n-1}{k}\right)^{k\ln n} \leqq n^{n-k}.$$

В частности, справедливы следующие неравенства:

$$\|f'\| \leqq \sqrt{2}\|f\|^{1/2}\|f''\|^{1/2} \quad \text{при} \quad I=(-\infty, \infty),$$

$$\|f'\| \leqq 2\|f\|^{1/2}\|f''\|^{1/2} \quad \text{при} \quad I=[0, \infty),$$

$$\|f'\| \leqq \frac{1}{2}\, 3^{2/3}\|f\|^{2/3}\|f'''\|^{1/3} \quad \text{при} \quad I=(-\infty, \infty),$$

$$(*) \qquad \|f'\| \leqq \frac{1}{2}\, 3^{5/3}\|f\|^{2/3}\|f'''\|^{1/3} \quad \text{при} \quad I=[0, \infty),$$

$$\|f''\| \leqq 3^{1/3}\|f\|^{1/3}\|f'''\|^{2/3} \quad \text{при} \quad I=(-\infty, \infty),$$

$$(*) \qquad \|f''\| \leqq 2.3^{1/3}\|f\|^{1/3}\|f'''\|^{2/3} \quad \text{при} \quad I=[0, \infty).$$

Если H есть действительная прямая и $f(x) \geqq 0$, то в правых частях этих неравенств f надо заменить на $f/2$. Неравенства, отмеченные $(*)$, представляются новыми. Константы в неравенствах для $n=2$ и $n=3$ являются наилучшими и достигаются, например, для классического случая, когда $\|f\| = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$.

Метод доказательства, которым я пользуюсь, отличен от метода А. Н. Колмогорова и основан на рассмотрении линейных неравенств, связывающих $\|f\|, \|f^{(k)}\|$ и $\|f^{(n)}\|$, и эквивалентных (3).

Лемма 1. *Пусть* $A>0$, $B>0$

$$C = n\left(\frac{A}{n-k}\right)^{(n-k)/n}\left(\frac{B}{k}\right)^{k/n}.$$

Тогда утверждения:

$$(4) \qquad \|f^{(k)}\| \leqq Ah^{-k}\|f\| + Bh^{n-k}\|f^{(n)}\| \quad \textit{для любого} \quad h>0$$

и

$$(5) \qquad \|f^{(k)}\| \leqq C\|f\|^{(n-k)/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}$$

эквивалентны.

В самом деле, минимизируя неравенство (4) по h, получаем (5). С другой стороны, применяя к (5) неравенство Юнга, выводим (4).

Теперь задача сводится к доказательству неравенства вида (4). Для этого я пользуюсь аппроксимативными соображениями. Пусть $h>0$ и линейный оператор $S_h(f)$, отображающий K в K, приближает $f^{(k)}(x)$ и обладает следующими свойствами:

1. $$\|S_h(f)\| \leqq Ah^{-k}\|f\|,$$

2. $$\|f^{(k)} - S_h(f)\| \leqq Bh^{n-k}\|f^{(n)}\|.$$

Тогда

$$\|f^{(k)}\| \leqq \|S_h(f)\| + \|f^{(k)} - S_h(f)\| \leqq Ah^{-k}\|f\| + Bh^{n-k}\|f^{(n)}\|,$$

т. е. справедливо неравенство (4). Выбирая надлежащим образом оператор $S_h(f)$, получаем все сформулированные выше утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $I=[0, \infty)$ *и пространство* K *удовлетворяет условию: для любого* $h \geqq 0$

(6) $$\|f(x+h)\| \leqq \|f(x)\|.$$

Тогда

(7) $$\|f^{(n-1)}\| \leqq n\|f\|^{1/n}\|f^{(n)}\|^{(n-1)/n} \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Положим

$$S(f)=S_{n-1,h}(f)=h^{-n+1}\Delta_h f(x)=h^{-n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^k f(x+kh)=$$

$$=h^{-n+2}\int_0^h\ldots\int_0^h f^{(n-1)}(x+t_1+\ldots+t_{n-1})\,dt_1\ldots dt_{n-1} \qquad (h>0).$$

Используя условие (6), находим, что

$$\|S(f)\| \leqq h^{-n+1}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\|f(x+kh)\| \leqq h^{-n+1}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\|f(x)\|=\left(\frac{2}{h}\right)^{n-1}\|f\|.$$

Далее, имеем

$$f^{(n-1)}(x)-S(f)=h^{-n+1}\int_0^h\ldots\int_0^h\{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x+t_1+\ldots+t_{n-1})\}\,dt_1\ldots dt_{n-1},$$

откуда по неравенству Минковского

(8) $$\|f^{(n-1)}-S(f)\| \leqq h^{-n+1}\int_0^h\ldots\int_0^h\|f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x+t_1+\ldots+t_{n-1})\|\,dt_1\ldots dt_{n-1}.$$

Но при $t \geqq 0$

$$f^{(n-1)}(x+t)-f^{(n-1)}(x)=\int_0^t f^{(n)}(x+u)\,du$$

и, в силу (6),

$$\|f^{(n-1)}(x+t)-f^{(n-1)}(x)\| \leqq \int_0^t\|f^{(n)}(x+u)\|\,du \leqq t\|f^{(n)}(x)\|.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (8) получаем:

$$\|f^{(n-1)}-S(f)\| \leqq h^{-n+1}\int_0^h\ldots\int_0^h(t_1+\ldots+t_{n-1})\,dt_1\ldots dt_{n-1}\|f^{(n)}\|=$$

$$=(n-1)h^{-n+1}\int_0^h\ldots\int_0^h t_1\,dt_1\ldots dt_{n-1}\|f^{(n)}\|=(n-1)\frac{h}{2}\|f^{(n)}\|.$$

Из этих оценок вытекает, что

$$\|f^{(n-1)}\| \leqq \left(\frac{2}{h}\right)^{n-1} \|f\| + (n-1)\frac{h}{2}\|f^{(n)}\|,$$

а отсюда, согласно лемме I, следует (7), и лемма 2 доказана.

Очевидно, эта лемма остается справедливой и в том случае, когда $I=(-\infty, \infty)$ и для всех t $\|f(x+t)\| = \|f(x)\|$.

Теперь для завершения доказательства теоремы остается провести индукцию.

Лемма 3. *Пусть* $M_k \geqq 0$ *и*

(9) $$M_{n-1} \leqq C_n M_0^{1/n} M_n^{(n-1)/n} \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Тогда

(10) $$M_k \leqq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n} \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1;\ n=2, 3, \ldots),$$

где

(11) $$C_{n,k}^{1/k} = \prod_{p=k}^{n-1} C_{p+1}^{1/p}.$$

Для $n=2$ утверждения (9) и (10) совпадают. Пусть для некоторого $n \geqq 2$ уже установлено, что

(12) $$M_k \leqq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n},$$

где $C_{n,k}$ имеет вид (10). Используя неравенство (9) с заменой n на $n+1$ имеем:

$$M_n \leqq C_{n+1} M_0^{1/(n+1)} M_{n+1}^{n/(n+1)}.$$

Подставляя это неравенство в (12), получаем

$$M_k \leqq C_{n,k} C_{n+1}^{k/n} M_0^{(n+1-k)/(n+1)} M_{n+1}^{k/(n+1)}.$$

Таким образом, можно положить

$$C_{n+1,k} = C_{n,k} C_{n+1}^{k/n},$$

откуда

$$C_{n+1,k}^{1/k} = C_{n,k}^{1/k} C_{n+1}^{1/n} = \prod_{p=k}^{n-1} C_{p+1}^{1/p} C_{n+1}^{1/n} = \prod_{p=k}^{n} C_{p+1}^{1/p},$$

и лемма доказана.

В интересующем нас случае $C_n = n$. Поэтому в неравенстве (3) можно положить

$$C_{n,k} = \exp\left\{k \sum_{p=k}^{n-1} \frac{1}{p} \ln(p+1)\right\}.$$

Оценим это выражение. Имеем

$$\sum_{p=k}^{n-1}{}' \frac{1}{p}\ln(p+1) \leqq \frac{1}{k}\ln(k+1) + \sum_{p=k+1}^{n-1}{}' \frac{1}{p}\ln(p+1) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{k}\ln(k+1) + \ln\frac{n-1}{k}\ln n.$$

Отсюда

$$C_{n,k} \leqq \exp\left\{\ln(k+1) + k\ln\frac{n-1}{k}\ln n\right\} = (k+1)\left(\frac{n-1}{k}\right)^{k\ln n},$$

и теорема доказана.

В заключение заметим, что для доказательства неравенств ($*$) следует соответственно положить

$$S_h(f) = \frac{1}{6h}\{-8f(x)+9f(x+h)-f(x+3h)\} \qquad (k=1)$$

и

$$S_h(f) = \frac{1}{3h^2}\{2f(x)-3f(x+h)+f(x+3h)\} \qquad (k=2).$$

Эти формулы являются наилучшими формулами численного дифференцирования для $n=3$.

Литература

[1] А. Н. Колмогоров, О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, *Ученые записки МГУ*, **30**, *Математика*, **3** (1939), 3—16.
[2] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа, *Неравенства* (Москва, 1948).
[3] E. M. Stein, Functions of exponential type, *Annals of Math.*, (2) **65** (1957), 582—592.

(Поступило 20. IX. 1964)