Über ein Problem von L. Rédei

Von KURT HAUSCHILD in Berlin und GYÖRGY POLLÁK in Szeged

Im folgenden wird ein angeordneter Körper konstruiert, in dem jede Folge aus positiven Gliedern eine obere Schranke und eine positive untere Schranke besitzt. Damit erledigt sich die Frage nach der Existenz eines derartigen Körpers, die L. RÉDEI in [1] gestellt hat.

Es sei Ω die Menge der Ordinalzahlen der zweiten Zahlklasse; kleine griechische Buchstaben mögen im folgenden immer Elemente von Ω bedeuten.

Es bezeichne R den Körper der rationalen Zahlen, $X=\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ eine Menge transzendenter Elemente der Mächtigkeit $\aleph_1$. Wir betrachten den Körper $R(X)$, der also rein transzendent vom Grade $\aleph_1$ über R ist. Wir führen in $R(X)$ eine Ordnung „$<$" so ein, daß $x_\alpha<x_\beta$ falls $\beta<\alpha$ und $x_\alpha<r$ ist $(\alpha,\beta\in\Omega;\ 0<r\in R)$. Zu diesem Zweck sei erstens

$$(1)\quad x_{\alpha_1}^{k_1}x_{\alpha_2}^{k_2}\dots x_{\alpha_n}^{k_n}<x_{\alpha_1}^{l_1}x_{\alpha_2}^{l_2}\dots x_{\alpha_n}^{l_n}\qquad (\alpha_1>\alpha_2>\dots>\alpha_n;\ l_i,k_i\geqq 0 \text{ für } i=1,\dots,n),$$

wenn

$$k_1=l_1,\dots,\ k_{i-1}=l_{i-1},\ k_i>l_i$$

für ein i mit $1\leqq i\leqq n$ gilt. Für ein Polynom f aus $R[x]$ sei $\max f$ das im Sinne der Ordnung (1) maximale Glied von f, dessen Koeffizient von 0 verschieden ist und bezeichne $r(f)$ diesen Koeffizienten. Nun definieren wir die Ordnung in $R(X)$ durch

$$(2)\qquad \frac{f}{g}>0,\quad\text{falls}\quad \frac{r(f)}{r(g)}>0 \text{ in } R.$$

Es ist klar, daß dabei die Relation (1) sowohl wie $x_\alpha<x_\beta$, $x_\alpha<r$ $(\alpha,\beta\in\Omega,\ \alpha>\beta,\ 0<r\in R)$ erfüllt sind. Ferner, da

$$\max(f_1+f_2)=\max(\max f_1,\max f_2),\qquad \max(f_1f_2)=(\max f_1)(\max f_2)$$

für positive f_1,f_2 gilt und somit für diese auch

$$r(f_1+f_2)=\begin{cases} r(f_1), & \text{falls}\quad \max f_1>\max f_2,\\ r(f_2), & \text{falls}\quad \max f_1<\max f_2,\\ r(f_1)+r(f_2), & \text{falls}\quad \max f_1=\max f_2,\end{cases}\qquad r(f_1f_2)=r(f_1)r(f_2)$$

besteht, so sind die Summe und das Produkt zweier positiver Elemente aus $R(X)$ wieder positiv.

Ist jetzt $y_1, y_2, \ldots$ eine positivgliedrige Folge aus $\ddot{R}(X)$, so können in den y_i nur abzählbar unendlich viele verschiedene x_α vorkommen. Hiermit gibt es ein x_γ, das kleiner als alle vorkommenden x_α, also offensichtlich eine untere Schranke unserer Folge ist. Ebenso ist z. B. x_γ^{-1} eine obere Schranke. Damit ist bewiesen, daß $R(X)$ die gewünschte Eigenschaft hat. [1])

Literatur

[1] L. Rédei, *Algebra* I (Leipzig, 1959).

(Eingegangen am 31. August 1964)

[1]) Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn E. Fried fand er eine ähnliche Lösung des Problems.