Axiomatischer Aufbau eines Systems der deontischen Logik

Von I. RUZSA in Budapest

Zum 60sten Geburtstag von Professor L. Kalmár

Die meisten Arbeiten über deontische Modalität behandeln die deontische Logik in einer der moralisch-juristischen Interpretation angemessenen Form. (S. z. B. [1], [2], [3], [4].) Der vorliegende Aufsatz legt einen axiomatischen Aufbau der deontischen Logik dar, der eine moralisch-juristische Interpretation zwar nicht ausschließt, dabei aber (und vor allem) die Behandlung gewisser Beziehungen einer nicht voll-kausalen Erscheinung zuzulassen scheint.

Das im Nachstehenden entwickelte System — wir wollen es kurz *System* ***D*** nennen — ist unter den übrigen Systemen der deontischen Logik mit dem System *P* von G. H. von Wright [1] nächstverwandt. Seine Haupteigenschaften — im Vergleich mit anderen Systemen der deontischen Logik — können etwa wie folgt zusammengefasst werden:

Das System ***D*** unterscheidet scharf zwischen *Handlungen* (Akten) und *Aussagen* über Handlungen. In der Syntax des Systems sind die ersten *Terme*, die zweiten *Formeln*. Das System ***D*** benutzt ausschließlich *deontische* modale Operatoren. Die Möglichkeit einer Iteration von deontischen Operatoren besteht im System ***D*** nicht (da ein deontischer Operator auf Aussagen sinngemäß nicht bezogen werden kann). — Formeln, die im System ***D*** sinngemäße Äquivalente von in den übrigen Systemen der deontischen Logik herleitbaren Formeln sind, sind im System ***D*** ebenfalls herleitbar. (S. III. 1—10, 13—14, 16, 22, 24.)

Außer den traditionellen Operatoren *O* und *P* (mit der Interpretation *O*: „verpflichtend", *P*: „zuläßig") hat das System ***D*** noch einen Operator *T*, der auf eine Handlung angewandt ausdrücken soll, daß die betreffende Handlung „ausgeführt" ist. Es wird auch eine deontische Implikation unter Handlungen eingeführt, die besagt, daß das Ausgeführtsein des Vorderglieds das Verpflichtendsein des Hinterglieds impliziert (im Sinne des Aussagenkalküls). Diese Art von Implikation erweist sich strenger als die in der deontischen Logik üblicherweise als deontische Implikation interpretierte Formel (die im System ***D*** ebenfalls formalisiert werden kann). Im System ***D*** gibt es eine Anzahl von „quasi-herleitbaren" Implikationsschemen, die im allgemeinen nicht herleitbar sind, falls jedoch in diesen das Vorderglied herleitbar ist, so folgt hieraus auch die Herleitbarkeit des Hinterglieds. (S. III. 20, 26—30.) Das System ***D*** zeigt in dieser Hinsicht eine gewisse Verwandschaft mit dem „strikten" Aussagenkalkül.

Das System ***D*** enthält keine konstanten Handlungen (und auch keine Aussage-Variablen). Das System kann jedoch durch die Aufnahme von konstanten Handlungen und Axiomen über solche erweitert werden. Eine Erweiterung, die das in Betracht Ziehen der temporalen (zeitlichen) Beschaffenheit des Ausgeführtseins der Handlungen erlaubt, ist ebenfalls möglich. Auf die Untersuchung dieser Probleme beabsichtige ich in einem folgenden Aufsatz zurückzukommen.

Im Folgenden geben wir unter I das Begriffsnetz, das Axiomensystem und die Schlußregeln des Systems ***D*** an. Unter II wird die syntaktische Widerspruchsfreiheit (im dreifachen Sinne) des Systems ***D*** nachgewiesen. Unter III wollen wir durch eine Liste von herleitbaren bzw. nicht herleitbaren Formeln den Unterschied zwischen System ***D*** und anderen Axiomensystemen der deontischen Logik veranschaulichen. Endlich beschreiben wir unter IV ein allgemeines Entscheidungsverfahren für die Herleitbarkeit der Formeln im System ***D***.

I.

A. Das Begriffsnetz des Systems D

A. a. *Grundzeichen:*

1. die Variablen; ihre Mitteilungszeichen sind kleine lateinische Buchstaben: $a, b, c, \ldots$;
2. die Operatoren für Handlungen (Akte): $\llcorner$, $\cap$, $\cup$;
3. die Operatoren für Aussagen: $=, T, P, \urcorner, \wedge, \vee$;
4. runde Klammern. (Der Gebrauch der Klammern wird im allgemeinen vermeidet, wo ihre Weglassung kein Mißverständnis verursacht.)

A. b. *Terme:*

1. Jede Variable ist ein Term;
2. ist α ein Term, so ist auch $(\llcorner\alpha)$ ein Term;
3. sind α und β Terme, so sind auch $(\alpha \cap \beta)$ und $(\alpha \cup \beta)$ Terme. Andere Terme gibt es nicht.

A. c. *Primformeln:*

1. Ist α ein Term, so ist $(T\alpha)$, bzw. $(P\alpha)$ eine Primformel.
2. Sind α und β Terme, so ist $(\alpha = \beta)$ eine Primformel. Andere Primformel gibt es nicht.

Semantische Interpretation. Es seien die Variablen (beliebige, veränderliche) *Handlungen (Akte).* Es bedeute Ta die Aussage: „die Handlung a ist *ausgeführt* (transactus, transacted)", Pa die Aussage: „die Handlung a ist *zuläßig* (permitted)", endlich $a = b$ die Aussage: „die Handlungen a und b sind *gleich*". $\llcorner\alpha$ sei die *Komplementär*-Handlung der Handlung α, $\alpha \cap \beta$ sei der *Durchschnitt*, $\alpha \cup \beta$ sei die *Vereinigung* der Handlungen α und β. Also sind alle Terme Handlungen. — $\llcorner\alpha$ ist eine Handlung, die dann und nur dann ausgeführt ist, wenn α nicht ausgeführt ist. $\alpha \cup \beta$ bzw. $\alpha \cap \beta$ ist eine Handlung, die dann und nur dann ausgeführt ist, wenn wenigstens eine bzw. beide der Handlungen α, β ausgeführt ist. $\alpha = \beta$ bedeutet, daß die Handlung α dann und nur dann ausgeführt oder erlaubt ist, wenn die Handlung β ausgeführt bzw. erlaubt ist. — Die folgenden Axiome sind ebenfalls im Einklang mit dieser Interpretation. — Die einfachsten Aussagen über Handlungen sind durch die Primformeln formalisiert.

A. d. *Formeln:*

1. jede Primformel ist eine Formel;
2. ist Γ eine Formel, so ist auch $(\neg\Gamma)$ eine Formel;
3. sind Γ und Δ Formeln, so sind auch $(\Gamma\wedge\Delta)$ und $(\Gamma\vee\Delta)$ Formeln. Andere Formeln gibt es nicht.

Semantische Interpretation: Die Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ werden wie im Aussagenkalkül gebraucht zum Ausdruck der logischen Operationen der Negation, der Konjunktion bzw. der Disjunktion. Folglich sind durch die Formeln *Aussagen* über die Handlungen ausgedrückt.

A. e. *Definierte Zeichen* (Abkürzungen):

1. Die Zeichenfolge „$\Gamma\supset\Delta$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$\neg\Gamma\vee\Delta$"; Γ und Δ sind Formeln. (Implikation.)
2. Die Zeichenfolge „$\Gamma\sim\Delta$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$(\Gamma\supset\Delta)\wedge\wedge(\Delta\supset\Gamma)$"; Γ und Δ sind Formeln. (Äquivalenz.)
3. Die Zeichenfolge „$O\alpha$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$\neg P\llcorner\alpha$"; α ist ein Term.
4. Die Zeichenfolge „$F\alpha$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$\neg P\alpha$"; α ist ein Term.
5. Die Zeichenfolge „$I\alpha$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$P\alpha\wedge P\llcorner\alpha$"; α ist ein Term.
6. Die Zeichenfolge „$\alpha\rightarrow\beta$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$T\alpha\supset O\beta$"; α und β sind Terme.

Semantische Interpretation: $O\alpha$ bedeutet: „α ist verpflichtend (obligatory)", $F\alpha$ bedeutet: „α ist verboten (forbidden)", $I\alpha$ bedeutet: „α ist gleichgültig (indifferent)". Man lese $\alpha\rightarrow\beta$: „durch α ist β deontisch impliziert".

B. Axiome:

B. a. *Axiome der Handlungen:*

In den Axiomen B1—B7 sind α, β, γ beliebige *Terme.*

B1. $\alpha\cup\alpha=\alpha$.

B2. $\alpha\cup\beta=\beta\cup\alpha$.

B3. $(\alpha\cup\beta)\cup\gamma=\alpha\cup(\beta\cup\gamma)$.

B4. $\alpha\cup(\beta\cap\gamma)=(\alpha\cup\beta)\cap(\alpha\cup\gamma)$.

B5. $\llcorner(\alpha\cup\beta)=\llcorner\alpha\cap\llcorner\beta$.

B6. $\alpha\cup(\beta\cap\llcorner\beta)=\alpha$.

B7. $\llcorner\llcorner\alpha=\alpha$.

Bemerkung. Diese Gruppe der Axiome drückt aus, daß die Struktur der Handlungen (mit den Operationen $\llcorner$, $\cap$, $\cup$) eine Boolesche Algebra ist. Vermittels der folgenden Schlußregel CI sind alle solchen Gleichheiten, die in jeder Booleschen Algebra gültig sind, aus den Axiomen B1—B7 herleitbar. (Siehe z. B. [5]) Im Aufbau ist es unwesentlich, ob wir das obige oder irgendein anderes Axiomensystem der Booleschen Algebra gebrauchen. — Zum Aufschreiben der übrigen zwei Gruppen der Axiome werden wir der Kürze halber auch einige der in A. e. definierte Zeichen benützen.

B. b. *Deontische Axiome:*

In den Axiomen B8—B11 sind α und β beliebige *Terme.*

B8. $T\alpha\cup\llcorner\alpha$.

B9. $T\alpha\cap\beta\sim(T\alpha\wedge T\beta)$.

B10. $P\alpha\cup\llcorner\alpha$.

B11. $P\alpha\cup\beta\sim(P\alpha\vee P\beta)$.

Bemerkung. Die Axiome B9 bzw. B11 drücken eine Distributivität bezüglich des Operators T bzw. P aus. Ihre Interpretation — sowie die der Axiome B8 und B10 — ist klar. Es ist ebenfalls klar, daß die Annahme der Äquivalenz $P\alpha\cap\beta \sim \sim (P\alpha\wedge P\beta)$ (der Dualen von B11) als Axiom (oder ihre Herleitbarkeit) mit der bisherigen Interpretation unvereinbar wäre, da aus dem Erlaubtsein zweier Handlungen keineswegs das Erlaubtsein *der gemeinsamen Ausführung* beider Handlungen folgt. Unter III wird gezeigt, daß im System $\boldsymbol{D}$ $P\alpha\cap\beta \supset (P\alpha\wedge P\beta)$ herleitbar ist, dagegen ihre Umkehrung $(P\alpha\wedge P\beta) \supset P\alpha\cap\beta$ nicht. — Eine Anerkennung der Dualen von B9, der Äquivalenz $T\alpha\cup\beta \sim (T\alpha\vee T\beta)$ mag bedenklich erscheinen. Im System $\boldsymbol{D}$ ist $(T\alpha\vee T\beta) \supset T\alpha\cup\beta$ wohl herleitbar, ihre Umkehrung $T\alpha\cup\beta \supset \supset (T\alpha\vee T\beta)$ jedoch nicht, folglich ist die besagte Äquivalenz kein Theorem im System $\boldsymbol{D}$. Gegen die Anerkennung dieser Äquivalenz spricht die Erwägung, daß es aus dem *beständigen* Ausgeführtsein der Handlung $\alpha\cup\beta$ keineswegs folgt, daß wenigstens einer der Handlungen α, β *beständig* ausgeführt ist. (Es ist möglich, daß ein Schalter sich fortwährend in einer der Stellungen α, β befindet, jedoch weder fortwährend in der Stellung α noch fortwährend in der Stellung β sich befindet.)

B. c. *Axiome des Aussagenkalküls:*

In den Axiomen B12—B19 sind Γ, Δ, Θ beliebige *Formeln.*

B12. $(\Gamma\vee\Gamma) \sim \Gamma$.

B13. $(\Gamma\vee\Delta) \sim (\Delta\vee\Gamma)$.

B14. $((\Gamma\vee\Delta)\vee\Theta) \sim (\Gamma\vee(\Delta\vee\Theta))$.

B15. $(\Gamma\vee(\Delta\wedge\Theta)) \sim ((\Gamma\vee\Delta)\wedge(\Gamma\vee\Theta))$.

B16. $\neg(\Gamma\vee\Delta) \sim (\neg\Gamma\wedge\neg\Delta)$.

B17. $(\Gamma\vee(\Delta\wedge\neg\Delta)) \sim \Gamma$.

B18. $\neg\neg\Gamma \sim \Gamma$.

B19. $\Gamma\vee\neg\Gamma$.

Bemerkung. Diese Gruppe der Axiome kann durch ein beliebiges anderes Axiomensystem des Aussagenkalküls ersetzt werden (unter etwaiger Modifikation der Schlußregeln).

Um die Angabe der Schlußregeln zu erleichtern, ist es zweckmäßig, den Begriff *der Konstituenten des Terms* bzw. *der Formel* einzuführen, durch die folgende simultane Induktion:

1. Ist α ein Term, so ist α eine *Konstituente* von α, von $\llcorner\alpha$, von $T\alpha$ und von $P\alpha$. 2. Sind α und β Terme, so sind α und β *Konstituente* von $\alpha\cup\beta$, von $\alpha\cap\beta$ und von $\alpha=\beta$. 3. Sind α und β Terme und ist C ein Term oder eine Formel, sowie α eine *Konstituente* von β und β eine *Konstituente* von C, so ist α eine *Konstituente* von C. 4. Ist Γ eine Formel, so ist Γ eine *Konstituente* von Γ und von $\neg\Gamma$. 5. Sind Γ und Δ Formeln, so sind Γ und Δ *Konstituente* von $\Gamma\wedge\Delta$ und von $\Gamma\vee\Delta$. 6. Ist A ein Term oder eine Formel, sind Γ und Δ Formeln, sowie A eine *Konstituente* von Γ und Γ eine *Konstituente* von Δ, so ist A eine *Konstituente* von Δ. — Andere Konstituenten eines Terms bzw. einer Formel als die unter 1—6 definierten gibt es nicht.

Kurz, obgleich weniger exakt: A ist dann und nur dann eine Konstituente von B, wenn A ein Term und B ein Term oder eine Formel ist, oder A und B beide Formeln sind, und die A ausdrückende Zeichenfolge eine konsekutive Teilfolge der B ausdrückenden Zeichenfolge ist.

Wir wollen kurz mit $\Gamma[A]$ bezeichnen, daß Γ eine Formel ist, deren eine Konstituente A ist; dann hat Γ die Form XAY, wo X und Y (eventuell leere) Zeichenfolgen sind. ($\Gamma[A]$ soll also bezeichnen, daß der Term oder die Formel A eine *an einer bestimmten Stelle stehende* Konstituente der Formel Γ ist.) Es bedeute $\Gamma[B]$ die

Formel der Form XBY, wo B ein beliebiger Term oder eine beliebige Formel ist, je nach dem, ob A ein Term oder eine Formel ist. ($\Gamma[B]$ entsteht also aus $\Gamma[A]$, indem im letzteren die an der bestimmten Stelle stehende Konstituente A durch B ersetzt wird, vorausgesetzt, daß A und B beide Terme oder beide Formeln sind.

C. Schlußregeln:

Wir beschreiben hier den Sinn, in welchem wir den Ausdruck: „eine Formel ist eine unmittelbare Folge einer oder zweier anderen Formeln" gebrauchen.

C1. Die Formel $\Gamma[\beta]$ ist eine *unmittelbare Folge* der Formeln $\Gamma[\alpha]$ und $\alpha=\beta$ (α und β sind Terme). — *(Umsatz des Terms.)*

C2. Die Formel $\Gamma[\Theta]$ ist eine *unmittelbare Folge* der Formeln $\Gamma[\Delta]$ und $\Delta\sim\Theta$ (Δ und Θ sind Formeln). — *(Umsatz der Formel.)*

C3. Die Formel Δ ist eine *unmittelbare Folge* der Formeln Γ und $\Gamma\supset\Delta$. — *(Abtrennung.)*

C4. Die Formel $O\alpha$ (α ist ein Term) ist eine *unmittelbare Folge* der Formel $T\alpha$. — *(Obligation.)*

Wir nennen die Formel Γ *herleitbar*, wenn sie ein *Axiom* oder eine *unmittelbare Folge herleitbarer Formeln* ist. Andere herleitbare Formeln gibt es nicht.

II.

Das deontische System $\boldsymbol{D}$ wird *syntaktisch widerspruchsfrei* genannt, falls: a) eine Formel Γ in ihm nur dann herleitbar ist, wenn die Formel $\neg\Gamma$ in ihm nicht herleitbar ist, b) eine Formel $T\alpha$ (α ist ein Term) in ihm nur dann herleitbar ist, wenn die Formel $T\llcorner\alpha$ in ihm nicht herleitbar ist, c) eine Formel $O\alpha$ (α ist ein Term) in ihm nur dann herleitbar ist, wenn die Formel $F\alpha$ in ihm nicht herleitbar ist. Also wird hier außer der gewöhnlichen Widerspruchsfreiheitsbedingung noch gefordert, daß eine Handlung und ihre Komplementäre nicht zugleich ausgeführt sein dürfen, und daß eine Handlung nicht zugleich verpflichtend und verboten sein darf.

Es wird nachgewiesen, daß das unter I beschriebene System $\boldsymbol{D}$ — im soeben definierten Sinn — syntaktisch widerspruchsfrei ist. Zum Beweis der Widerspruchsfreiheit wird eine *Wertung* der Terme und der Formeln eingeführt.

Die Wertung „V".

Wir wollen jedem Term bzw. jeder Formel A des System $\boldsymbol{D}$ eine sog. „Wertungsfunktion" $v(A)$ zuordnen, wie es unten folgt.

V1. Es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ die *geordnete* Menge aller verschiedenen Variablen, die in der Term bzw. in der Formel A vorkommen ($n \geqq 1$). Wir definieren zu jeder Konstituente B des Terms bzw. der Formel A eine Funktion $v(B)$. Die Definitionsbereich von $v(B)$ sei die Menge sämtlicher geordneten n-tupeln, die aus den Elementen der Menge $\{0, 1\}$ zu bilden sind, ihr Wertebereich sei die Menge $\{0, 1\}$. Mit $v(B; x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnen wir den durch die Funktion $v(B)$ dem geordneten n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zugeordneten Funktionenwert. (Wo kein Missverständnis droht, werden wir diese Bezeichnung auf $v(B)$ abkürzen.) Durch die folgenden Regeln

V2—V4. wird $v(B)$ induktiv definiert für jede Konstituente B von A, den Fall B identisch mit A miteinbegriffen. So wird durch diese Regeln auch $v(A)$ definiert sein.

V2. Ist a_i das i-te Element von $(a_1, \ldots, a_n)$, so ist

$$v(a_i) \equiv v(a_i; x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

V3. Sind α und β Terme und Konstituente von A, so ist

a) $v(\llcorner\alpha) \equiv 1 - v(\alpha)$;
b) $v(\alpha \cap \beta) \equiv v(\alpha) \cdot v(\beta)$;
c) $v(\alpha \cup \beta) \equiv v(\alpha) + v(\beta) - v(\alpha) \cdot v(\beta)$;
d) $v(\alpha = \beta) \equiv \begin{cases} 1, & \text{wenn } v(\alpha) \equiv v(\beta), \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$
e) $v(P\alpha) \equiv v(\alpha)$;
f) $v(T\alpha) \equiv \begin{cases} 1, & \text{wenn } v(\alpha) \equiv 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

V4. Sind Γ und Δ Formeln und Konstituente von A, so ist
a) $v(\neg\Gamma) \equiv 1 - v(\Gamma)$;
b) $v(\Gamma \wedge \Delta) \equiv v(\Gamma) \cdot v(\Delta)$;
c) $v(\Gamma \vee \Delta) \equiv v(\Gamma) + v(\Delta) - v(\Gamma) \cdot v(\Delta)$.

(In den Regeln V2—V4 werden die Zeichen $\equiv, +, -, \cdot$ im gewöhnlichen arithmetischen Sinne benutzt.)

Durch die Anwendung der Wertungsregeln V1—V4 auf die Axiome ist unmittelbar (und leicht) einzusehen, daß wenn Γ ein Axiom ist, so ist $v(\Gamma) \equiv 1$.

Es ist auch leicht kontrollierbar unter Berücksichtigung der Schluß- und Wertungsregeln, daß wenn $v(\Gamma) \equiv 1$ und $v(\Delta) \equiv 1$ ist, ferner Θ eine unmittelbare Folge von Γ (bzw. von Γ und Δ) ist, so ist auch $v(\Theta) \equiv 1$.

Es ergibt sich aus den beiden Feststellungen:

(1) *Eine Formel Γ kann im System **D** nur dann herleitbar sein, wenn $v(\Gamma) \equiv 1$ ist.*

Daraus ergeben sich folgende Sätze über die Widerspruchsfreiheit:

(2) *Ist die Formel Γ herleitbar, so ist $\neg\Gamma$ nicht herleitbar.*

(3) *Ist α ein Term und ist $T\alpha$ herleitbar, so ist $T\llcorner\alpha$ nicht herleitbar.* — Nämlich nach unserer Voraussetzung und nach (1) ist $v(T\alpha) \equiv 1$, was nach V3 f) nur dann möglich ist, wenn $v(\alpha) \equiv 1$ gilt. Dann ist nach V3 a) $v(\llcorner\alpha) \equiv 0$, somit (wiederum nach V3 f) $v(T\llcorner\alpha) \equiv 0$. Also ist nach Satz (1) $T\llcorner\alpha$ nicht herleitbar.

(4) *Ist α ein Term und ist $O\alpha$ herleitbar, so ist $F\alpha$ nicht herleitbar.* — Nämlich (nach der Definition 3 und 4 in I. A. e)) ist $O\alpha$ bzw. $F\alpha$ die Abkürzung für die Zeichenfolge $\neg P\llcorner\alpha$ bzw. $\neg P\alpha$. Nach unserer Voraussetzung ist $O\alpha$ herleitbar, also nach (1) ist $v(\neg P\llcorner\alpha) \equiv 1$, somit nach V4 a) $v(P\llcorner\alpha) \equiv 0$, d. h. nach V3 e) $v(\llcorner\alpha) \equiv 0$, woraus nach V3 a) $v(\alpha) \equiv 1$. Durch die Anwendung von V3 e) und dann V4 a) ist $v(P\alpha) \equiv 1$ bzw. $v(\neg P\alpha) \equiv 0$, also nach (1) ist $F\alpha$ tatsächlich nicht herleitbar.

Die Sätze (2)—(3)—(4) lassen sich dahin zusammenfassen: *Das System **D** ist syntaktisch widerspruchsfrei.*

Die Wertung „V" ist nicht adäquat, d. h. es gibt Formeln Γ, für welchen $v(\Gamma)\equiv 1$, jedoch Γ im System $\boldsymbol{D}$ nicht herleitbar ist. Solche Formeln sind z. B. die unten III in der Liste „Nicht herleitbare Formeln" mit dem Zeichen (W) bezeichneten; daß diese nicht herleitbar sind, kann man durch die unter IV 4 behandelte Wertung „W" feststellen.

III.

Der Unterschied des Systems $\boldsymbol{D}$ von anderen Systemen der deontischen Logik kann etwa veranschaulicht werden durch die folgende Liste der herleitbaren bzw. nicht herleitbaren Formeln und Schlußregeln. Formeln mit gleichen Nummern in den beiden Listen zeigen gewisse formelle Ähnlichkeit.

Die Herleitung der herleitbaren Formeln ist nicht angegeben. Ihre Herleitbarkeit ist z. B. durch das unter IV zu besprechende Entscheidungsverfahren kontrollierbar. Neben dem nicht herleitbaren Formeln steht in Klammern die Wertung (V oder W), wodurch der Nichtherleitbarkeit festzustellen ist. Das Zeichen (W) bezieht sich auf die unter IV anzugebende Wertung „W".

Wir werden das Meta-Zeichen $\vdash$ als Kurzwort für die herleitbaren Schlußregeln („quasi-herleitbaren Implikationsschemen") einführen. „$\Gamma\vdash\Delta$" bedeutet: „Ist die Formel Γ herleitbar, so ist auch die Formel Δ herleitbar." Später werden wir das Zeichen $\vdash$ auch noch in anderen Bedeutungen anwenden, und zwar: „$\vdash\Gamma$" bedeutet: „Die Formel Γ ist herleitbar"; „$\neg\vdash\Gamma$" bedeutet: „Die Formel Γ ist nicht herleitbar".

Herleitbare Formeln und Schlußregeln *Nicht herleitbare Formeln*
(α, β, γ sind beliebige *Terme*, a, b, c sind *Variablen.*)

1. a)	$P\alpha\vee P\llcorner\alpha$	1*.	$Ta\vee T\llcorner a$	(V)
1. b)	$O\alpha\supset P\alpha$			
2.	$O\alpha\cup\llcorner\alpha$	2*.	$Oa\vee O\llcorner a$	(W)
3.	$F\alpha\cap\llcorner\alpha$	3*.	$\neg Ta\cap\llcorner a$	(W)
4.	$P\alpha\cap\llcorner\alpha\supset I\alpha$	4*.	$Pa\cap\llcorner a\sim Ia$	(W)
5. a)	$\neg(O\alpha\cup\beta\wedge F\alpha\wedge F\beta)$	5*.	$\neg(Oa\cup b\wedge\neg Ta\wedge\neg Tb)$	(V)
5. b)	$\neg(P\alpha\cup\beta\wedge F\alpha\wedge F\beta)$			
6.	$\neg O\alpha\sim P\llcorner\alpha$	6*. a)	$T\llcorner a\supset\neg Ta$	(W)
7.	$O\alpha\cap\beta\sim(O\alpha\wedge O\beta)$	6*. b)	$\neg Ta\supset T\llcorner a$	(V)
8.	$(O\alpha\vee O\beta)\supset O\alpha\cup\beta$	8*.	$Oa\cup b\supset(Oa\vee Ob)$	(W)
9.	$O\llcorner\alpha\cup\beta\supset(O\alpha\supset O\beta)$			
10.	$P\alpha\cap\beta\supset(P\alpha\wedge P\beta)$	10*.	$(Pa\wedge Pb)\supset Pa\cap b$	(W)
11.	$(T\alpha\vee T\beta)\supset T\alpha\cup\beta$	11*.	$Ta\cup b\supset(Ta\vee Tb)$	(W)
12.	$T\alpha\cap\beta\supset T\alpha$			
13.	$(O\alpha\wedge O(\llcorner\alpha\cup\beta))\supset O\beta$			
14.	$(P\alpha\wedge O(\llcorner\alpha\cup\beta))\supset P\beta$			
15. a)	$(T\alpha\wedge\alpha\rightarrow\beta)\supset O\beta$	15*. a)	$(Oa\wedge a\rightarrow b)\supset Ob$	(V)
15. b)	$(T\alpha\wedge\alpha\rightarrow\beta)\supset P\beta$	15*. b)	$(Pa\wedge a\rightarrow b)\supset Pb$	(V)
16.	$(F\beta\wedge O(\llcorner\alpha\cup\beta))\supset F\alpha$			
17.	$(F\beta\wedge\alpha\rightarrow\beta)\supset\neg T\alpha$	17*.	$(Fb\wedge a\rightarrow b)\supset Fa$	(V)
18.	$O\alpha\supset\beta\rightarrow\alpha$	19*. a)	$T\llcorner a\supset a\rightarrow b$	(W)

19.	$\neg T\alpha \supset \alpha\to\beta$	19*. b)	$Fa \supset a\to b$	(W)
20. a)	$O\alpha\wedge\alpha\to\beta\vdash O\beta$			
20. b)	$P\alpha\wedge\alpha\to\beta\vdash P\beta$			
21.	$\alpha\to\beta \supset (T\alpha\supset P\beta)$	21*. a)	$a\to b \supset (Oa\supset Ob)$	(V)
22.	$O\llcorner\alpha\cup\beta\cup\gamma \wedge F\beta\wedge F\gamma\vdash F\alpha$	21*. b)	$a\to b \supset (Oa\supset Pb)$	(V)
23.	$(\alpha\to\beta\cup\gamma\wedge F\beta\wedge F\gamma) \supset \neg T\alpha$	23*.	$(a\to b\cup c\wedge Fb\wedge Fc) \supset Fa$	(V)
24.	$(O\alpha\wedge O\llcorner\alpha\cup\llcorner\beta\cup\gamma) \supset O\llcorner\beta\cup\gamma$			
25.	$(\alpha\cap\beta\to\gamma \wedge T\alpha) \supset \beta\to\gamma$	25*.	$(a\cap b\to c\wedge Oa) \supset (Ob\supset Oc)$	(V)
26.	$T\alpha\vdash O\alpha$	26*. a)	$Ta \supset Oa$	(W)
		26*. b)	$Oa \supset Ta$	(V)
27. a)	$T\alpha\vdash P\alpha$	27*. a)	$Ta \supset Pa$	(W)
27. b)	$T\llcorner\alpha\vdash F\alpha$	27*. b)	$T\llcorner a \supset Fa$	(W)
27. c)	$O\alpha\vdash P\alpha$	27*. c)	$Pa \supset Ta$	(V)
		27*. d)	$\neg Ta \supset P\llcorner a$	(V)
		27*. e)	$\neg Oa \supset T\llcorner a$	(V)
		27*. f)	$Fa \supset \neg Ta$	(W)
		27*. g)	$Fa \supset T\llcorner a$	(V)
28.	$T\llcorner\alpha\vdash\llcorner\alpha\to\alpha \supset O\alpha$	28*.	$\llcorner a\to a\supset Oa$	(V)
29.	$T\llcorner\alpha\cup\beta\vdash O\alpha \supset O\beta$	29*.	$T\llcorner a\cup b \supset (Oa\supset Ob)$	(W)
30. a)	$T\alpha\cap\beta\vdash O\alpha$			
30. b)	$T\alpha\cap\beta\vdash P\alpha\wedge P\beta$			

IV.

Wir wollen ein Verfahren darlegen, wodurch die Herleitbarkeit einer beliebigen Formel des Systems **D** in endlich vielen Schritten zu entscheiden ist.

1. Herleitbarkeit von Primformeln.

(5) *Die Primformel $\alpha=\beta$ (α und β sind Terme) ist im System* **D** *dann und nur dann herleitbar, wenn $v(\alpha=\beta)\equiv 1$ ist.*

Nämlich nach den Axiomen B1—B7 bilden die Terme in **D** eine Boolesche Algebra, und es ist bekannt, daß durch die Regeln V1, V2, V3 a)—c) die Herleitbarkeit einer beliebigen Gleichheit der Booleschen Algebra entscheidbar ist.

(6) *Die Primformel $T\alpha$ bzw. $P\alpha$ und die Formel $O\alpha$ (α ist ein Term) ist im System* **D** *dann und nur dann herleitbar, wenn $\alpha = a\cup\llcorner a$ herleitbar ist.*

Beweis 1. „Dann." Es sei $\alpha = a\cup\llcorner a$ herleitbar. Aus diesem und dem Axiom B8 mit der Schlußregel C1 ist $T\alpha$, weiter aus dem letzten mit der Schlußregel C4. ist $O\alpha$ herleitbar. Die Formel $P\alpha\cup\llcorner\alpha \sim (P\alpha\vee P\llcorner\alpha)$ auf Grund des Axioms B11 ist herleitbar. Unter Anwendung der Schlußregel C2 auf die letztere Formel und auf das Axiom B10, erhält man die Formel $P\alpha\vee P\llcorner\alpha$ (vgl. III. 1. a); diese kann auch in der Form $\neg P\llcorner\alpha \supset P\alpha$ oder $O\alpha\supset P\alpha$ (vgl. III. 1.b) geschrieben werden. Aus der letzteren und der schon hergeleiteten Formel $O\alpha$ gewinnt man mit der Schlußregel C3 die Formel $P\alpha$.

2. „Nur dann." Setzen wir voraus, daß $\alpha = a\cup\llcorner a$ nicht herleitbar ist. Nach der Regel V3 d) und (5) ist dann $v(\alpha)\not\equiv v(a\cup\llcorner a)$. Wegen $v(a\cup\llcorner a)\equiv 1$ ist $v(\alpha)\not\equiv 1$. Folglich nach V3 f) bzw. e) ist $v(T\alpha)\equiv 0$ bzw. $v(P\alpha)\not\equiv 1$. Nach Satz (1) sind dann weder $T\alpha$ noch $P\alpha$ herleitbar. Sind also $T\alpha$ oder $P\alpha$ herleitbar, so ist es unmöglich, daß $\alpha = a\cup\llcorner a$ nicht herleitbar sei. Da $P\alpha$ aus $O\alpha$ herleitbar ist, darum zieht die Herleitbarkeit von $O\alpha$ die Herleitbarkeit von $\alpha = a\cup\llcorner a$ nach sich.

Auf Grund der Sätze (5)—(6) kann man sagen, daß durch die Regeln V1—3 der Wertung „V" die Herleitbarkeit aller Primformeln und Formeln der Form $O\alpha$ in endlich vielen Schritten entscheidbar ist.

2. Die Atome der Formel.

Wir nennen die herleitbaren Primformeln sowie die herleitbaren Formeln der Form $O\alpha$ *die konstanten Atome.*

Die Konstituenten einer Formel, die entweder selbst oder ihre Negierten konstante Atome sind, nennen wir *die konstanten Konstituenten der Formel.* Die zu den konstanten Konstituenten einer Formel gehörenden konstanten Atomen nennen wir *die konstanten Atome der Formel.* Infolge der Definitionen und der Sätze (5)—(6) ist es klar, daß man über eine beliebige Konstituente einer Formel in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob sie ein konstantes Atom ist oder nicht.

Man setze voraus, daß die Menge $\{a_1, \ldots, a_p\}$ sämtliche im Term α vorkommenden Variablen enthält. Der Term $\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_k$ mit $\alpha_i = c_{i1} \cup \ldots \cup c_{ip}$ und $c_{ij} = a_j$ oder $c_{ij} = \llcorner a_j$ $(j=1, \ldots, p; i=1, \ldots, k)$ wird *die perfekte konjunktive Normalform von α über den Variablen $a_1, \ldots, a_p$* genannt, vorausgesetzt, daß die Terme $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ alle verschieden sind und $\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_k = \alpha$ herleitbar ist. Es ist bekannt, daß ein jeder Ausdruck α der Booleschen Algebra (also jeder Term α des Systems $\boldsymbol{D}$) ihre perfekte konjunktive Normalform hat — den Fall der Herleitbarkeit von $\alpha = a \cup \llcorner a$ ausgenommen —, und wenn die Menge $\{a_1, \ldots, a_p\}$ fixiert ist, ist die perfekte konjunktive Normalform von α „wesentlich" eindeutig. Die Ausnahmestellung des Falls $\alpha = a \cup \llcorner a$ kann aufgehoben werden, wenn der „leere" Term als die perfekte konjunktive Normalform von α zugelassen wird. (Dieser Fall erweist sich aber in Weiteren als uninteressant für uns.)

Die Duale der perfekten konjunktiven Normalform ist *die perfekte disjunktive Normalform.* Vertauschen wir die Rollen der Operatoren $\cup$ und $\cap$ in der obigen Definition, so entsteht die Definition der Letzteren. Jeder Term α, wenn die obige Menge $\{a_1, \ldots, a_p\}$ fixiert ist, ist mit einer „wesentlich" eindeutig bestimmten perfekten disjunktiven Normalform gleich (im Fall der Herleitbarkeit von $\alpha = a \cap \llcorner a$ den „leeren" Terms als die perfekte disjunktive Normalform von α betrachtet — dieser Fall ist aber für uns auch uninteressant).

Es sei:

$T\alpha$ eine *nicht konstante Konstituente* der Formel Γ,

$\{a_1, \ldots, a_n\}$ die Menge der Variablen, die wenigstens in einer nicht konstanten Konstituenten der Form $T\beta$ in der Formel Γ vorkommen, die Elemente dieser Menge nennen wir die T-variablen der Formel Γ.

$\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_k$ die perfekte *konjunktive* Normalform des Terms α über den Variablen $a_1, \ldots, a_n$ (es ist leicht einzusehen, daß diese nicht „leer" sein wird).

Unter diesen Voraussetzungen nennen wir die Primformeln $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_k$ *die Γ-Atome* der Primformel $T\alpha$. — Es ist eine Folge des Axioms B9, daß $\vdash T\alpha \sim \sim (T\alpha_1 \wedge \ldots \wedge T\alpha_k)$ ist. Die rechte Seite dieser Äquivalenz wird *die Normalform der Primformel $T\alpha$ bezüglich Γ* genannt. Es ist klar, daß diese Normalform von $T\alpha$ durch $T\alpha$ und durch die Menge der T-variablen der Formel Γ eindeutig bestimmt ist.

Es sei weiter:

$P\alpha$ eine nicht konstante Konstituente der Formel Γ,

$\{b_1, \ldots, b_m\}$ die Menge der Variablen, die wenigstens in einer nicht konstanten Konstituenten der Form $P\beta$ in der Formel Γ vorkommen, die Elemente dieser Menge nennen wir die P-variablen der Formel Γ,

$\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_r$ die perfekte *disjunktive* Normalform des Terms α über den Variablen $b_1, \ldots, b_m$ (diese wird auch nicht „leer" sein).

Wir nennen die Primformeln $P\alpha_1, \ldots, P\alpha_r$ *die Γ-Atome* der Primformeln $P\alpha$. — Es ist eine Folge des Axioms B11, daß $\vdash P\alpha \sim (P\alpha_1 \vee \ldots \vee P\alpha_r)$ ist. Die rechte Seite dieser Äquivalenz wird *die Normalform der Primformel $P\alpha$ bezüglich Γ* genannt. Diese ist durch $P\alpha$ und durch die Menge der P-variablen der Formel Γ ebenfalls eindeutig bestimmt.

Es sei die Formel Γ eine Konstituente der Formel Δ (den Fall Γ identisch mit Δ einbegriffen). Wir bezeichnen als die *Δ-Atome* der Formel Γ:

die in Γ vorkommenden nicht konstanten Primformeln der Form $\alpha = \beta$ (die Menge dieser Typen der Atome ist offenbar unabhängig von Δ),

die Δ-Atome der in Γ vorkommenden nicht konstanten Primformeln der Form $T\alpha$ bzw. $P\alpha$ (die Menge dieser Typen der Atome hängt schon ab von Δ, ist aber durch die besagten Primformeln und durch Angabe der Menge der T- bzw. P-variablen eindeutig bestimmt).

3. Merkwürdige Gestalten der Formel.

Es sei die Formel Γ eine Konstituente der Formel Θ (den Fall Γ identisch mit Θ einbegriffen). Man ersetze in Γ alle nichtkonstanten Konstituenten der Form $T\alpha$ und $P\alpha$ mit ihrer Normalform *bezüglich* Θ. Die so entstandene Formel wird *die Normalform der Formel Γ bezüglich Θ* genannt und mit Γ^n_Θ bezeichnet. Anstatt Γ^n_Γ schreiben wir kurz Γ^n. Auf Grund der Axiome B9, B11 und der Schlußregel C2 ist es klar, daß $\Gamma^n_\Theta \sim \Gamma$ herleitbar ist. Die Normalform von Γ bezüglich Δ ist durch Γ und durch Angabe der Menge der T- bzw. P-variablen (also ohne Δ *in concreto* zu kennen) auch eindeutig bestimmt.

Es sei $\{A_1, \ldots, A_k\}$ die Menge der konstanten Atome und der Γ^n-Atome der Formel Γ^n. Wir betrachten die Elemente dieser Menge als Variable des Aussagenkalküls. Dadurch wird Γ^n eine Formel des Aussagenkalküls, die sich, wie bekannt, in *perfekter* („ausgezeichneter") *disjunktiver Normalform* über ihren Variablen $A_1, \ldots, A_k$ herstellen läßt. Die perfekte disjunktive Normalform von Γ^n über den Atomen $A_1, \ldots, A_k$ als Variablen wird *die absolute Normalform* der Formel Γ^n (und auch der Formel Γ) genannt und mit Γ^a bezeichnet. Es ist klar, daß $\vdash \Gamma^a \sim$ $\sim \Gamma^n \sim \Gamma$.

Lassen wir aus Γ^a diejenigen Disjunktionsglieder weg, in welchen irgendein *negiertes* konstantes Atom vorkommt, und bezeichnen wir die zurückbleibende Formel mit Γ^+. Ist A ein konstantes Atom, dessen Negation in Γ^a vorkommt, so ist (da A herleitbar ist) $A \sim (A \vee \neg A)$ herleitbar (wie im Aussagekalkül), ebenso $\neg A \sim (A \wedge \neg A)$, ferner $(\neg A \wedge \Theta) \sim (A \wedge \neg A \wedge \Theta) \sim (A \wedge \neg A)$. Folglich ist ein jedes weggelassene Disjunktionsglied äquivalent mit $A \wedge \neg A$. Die Disjunktion solcher Glieder ist ebenfalls äquivalent mit $A \wedge \neg A$. Folglich

$$\vdash \Gamma^a \sim (\Gamma^+ \vee (A \wedge \neg A)) \sim \begin{cases} \Gamma^+, & \text{wenn } \Gamma^+ \text{ nicht leer ist,} \\ (A \wedge \neg A) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist im Falle $\vdash \Gamma^a \sim (A \wedge \neg A)$ die Formel Γ^a (und so auch Γ) nicht herleitbar, wegen der Widerspruchsfreiheit des Systems $\boldsymbol{D}$ (dagegen ist in diesem Fall $\neg \Gamma$ offensichtlich herleitbar).

In Γ^+ (falls es nicht leer ist) figurieren schon alle konstanten Atome unnegiert. Lassen wir aus Γ^+ die konstanten Atome weg. Ist die zurückbleibende Formel leer, so ist Γ^+ (und wegen $\vdash \Gamma^+ \sim \Gamma^a$ auch Γ^a) herleitbar, denn sie ist eine Disjunktion von Konjunktionen konstanter Atome (d. h. herleitbarer Formeln).

Die Formel, die aus der nicht leeren Formel Γ^+ durch Weglassung der konstanten Atome entsteht, wird *die Reduzierte* der Formel Γ (und auch der Formel Γ^a) genannt und mit Γ^r bezeichnet. Ist Γ^+ leer, so hat Γ keine Reduzierte. Ist Γ^r leer, so ist Γ herleitbar, wie es soeben gezeigt wurde. Ist Γ^r nicht leer, so ist $\vdash \Gamma^+ \sim \sim (\Gamma^r \wedge A_{i_1} \wedge \ldots \wedge A_{i_r})$, wo $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ die aus Γ^+ weggelassenen konstanten Atome bezeichnen. Da ihre Konjunktion herleitbar ist, so ist $\vdash (\Gamma^r \wedge A_{i_1} \wedge \ldots \wedge A_{i_r}) \sim \Gamma^r$, also $\vdash \Gamma^r \sim \Gamma^+ \sim \Gamma^a \sim \Gamma^n \sim \Gamma$. — Zusammenfassend:

(7) *Hat die Formel Γ keine Reduzierte, so ist sie nicht herleitbar, es ist aber dann $\neg \Gamma$ herleitbar. — Ist die Reduzierte von Γ leer, so ist Γ herleitbar. — Ist die Reduzierte von Γ nicht leer, so ist $\vdash \Gamma \sim \Gamma^r$.*

Im letzten Fall kommt die Herleitbarkeit von Γ auf die Herleitbarkeit von Γ^r hinaus.

4. Die Wertung „W".

Bei dieser Wertung kommen nur Normalformen in Betracht (im Unterschied von der Wertung „V" werden also hier die Terme nicht gewertet). Die Wertungsvorschriften sind sonst dieselben, wie im Aussagenkalkül (dem logischen Wert „wahr" entspricht 1, dem Wert „falsch" entspricht 0, die nichtkonstanten Atome spielen die Rollen der Aussagenvariablen, die konstanten Atome figurieren als Konstante). Ausführlicher:

W1. Vorausgesetzt, daß die Formel Γ eine Konstituente der Formel Θ ist, sei $(A_1, \ldots, A_n)$ die geordnete Menge aller verschiedenen Θ-Atome der Formel Γ $(n \geqq 0)$. Wir werden für jede solche Konstituente Δ der Formel Γ^n_Θ eine Funktion $w(\Delta)$ definieren, die selbst eine Formel ist. Der Definitionsbereich von $w(\Delta)$ sei die Menge sämtlicher geordneten n-tupeln, die aus den Elementen der Menge $\{0, 1\}$ zu bilden sind, ihr Wertebereich sei die Menge $\{0, 1\}$. Wir bezeichnen mit $w(\Delta; x_1, \ldots, x_n)$ (oder, wo kein Missverständnis droht, kurz mit $w(\Delta)$) den durch die Funktion $w(\Delta)$ dem geordneten n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zugeordneten Funktionenwert. Durch die Regeln W2—W4 wird $w(\Delta)$ induktiv definiert für jede solche Konstituente Δ von Γ^n_Θ, die selbst eine Formel ist, den Fall Δ identisch mit Γ^n_Θ einbegriffen. So wird durch diese Regeln auch $w(\Gamma^n_\Theta)$ definiert sein.

W2. Ist A_i das i-te Element von $(A_1, \ldots, A_n)$, so ist

$$w(A_i) \equiv w(A_i; x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

W3. Ist C ein konstantes Atom von Γ, so ist

$$w(C) \equiv 1.$$

W4. Sind Δ und Λ Formeln und Konstituente von Γ^n_Θ, so ist

a) $w(\neg \Delta) \equiv 1 - w(\Delta)$;

b) $w(\Delta \wedge \Lambda) \equiv w(\Delta) \cdot w(\Lambda)$;

c) $w(\Delta \vee \Lambda) \equiv w(\Delta) + w(\Lambda) - w(\Delta) \cdot w(\Lambda)$.

(8) *Ist die Formel Γ eine Konstituente der Formel Θ, so ist $w(\Gamma^n)\equiv 1$ dann und nur dann, wenn $w(\Gamma^n_\Theta)\equiv 1$ ist.*

Beweis. Auf Grund der in IV 2 und in dem ersten Absatz von IV 3 gegebenen Definitionen und der anschließenden Bemerkungen kann man voraussetzen, daß statt der Formel Θ die Menge T_Θ bzw. P_Θ der in Θ vorkommenden T- bzw. P-variablen gegeben ist. Es ist klar, daß die Menge T_Γ (bzw. P_Γ) der T- (bzw. P-) variablen von Γ eine Teilmenge von T_Θ (bzw. P_Θ) ist.

Ist $T_\Theta=T_\Gamma$ und $P_\Theta=P_\Gamma$, so ist offenbar die Menge der Γ-Atome und die der Θ-Atome der Formel Γ identisch, ferner sind auch Γ^n und Γ^n_Θ identisch. In diesem Fall ist die Behauptung des Satzes trivial.

a) Wir setzen nun voraus, daß $P_\Theta=P_\Gamma$ ist, ferner daß T_Θ außer den in T_Γ vorkommenden T-variablen nur die einzige Variable b enthält. Auf Grund der Definitionen der Normalformen und der der Atome der nichtkonstanten Primformeln der Form $T\alpha$ ist es klar, daß in unserem Falle Γ^n_Θ aus Γ^n vermittels Ersetzen der in ihm vorkommenden Γ-Atome der Form $T\beta$ durch $T\beta\cup b\wedge T\beta\cup \llcorner b$ — d. h. durch die Konjunktion zweier Θ-Atome der Form $T\beta'$ — entsteht. Die übrigen Γ-Atome von Γ sind in diesem Fall zugleich Θ-Atome. Für das Nachfolgende wird es wesentlich, daß die neuen Θ-Atome voneinander und auch von der in der Formel Γ^n_Θ als Θ-Atome zurückbleibenden Γ-Atome verschieden sind.

b) Ganz analog ist der Fall, daß $T_\Theta=T_\Gamma$ ist und die Menge der P-variablen sich durch eine einzige neue Variable erweitert; man hat natürlich in a) P statt T, $\cap$ statt $\cup$ und $\vee$ statt $\wedge$ zu setzen.

Nun ist es klar, daß es hinreicht, den Satz für die besagten zwei Spezialfälle zu beweisen; ist nämlich der Satz wahr z. B. für den Fall, daß die Menge der T-variablen durch r, die Menge der P-variablen durch s neue Elemente sich erweitert — wir wollen diesen als Fall (r, s), bezeichnen — dann folgt die Wahrheit des Satzes für die Fälle $(r+1, s)$, $(r, s+1)$ aus der Wahrheit des Satzes für die Spezialfälle.

c) Wir beweisen den Satz für den Spezialfall a). Ist T_Γ leer, d. h. gibt es in Γ keine nicht herleitbare Primformel der Form $T\alpha$, so ist wiederum Γ^n mit Γ^n_Θ identisch, und die Behauptung des Satzes ist trivial.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Anzahl der Γ-Atome der Form $T\alpha$ von Γ^n p $(\geqq 1)$ ist; es seien diese Atome $C_1, \ldots, C_p$. Wie es schon gezeigt wurde, Γ^n_Θ entsteht unter unseren Voraussetzungen aus Γ^n vermittels Ersetzen der Γ-Atome $C_1, \ldots, C_p$ durch die Konjunktion je zweier Θ-Atome — es seien diese der Reihe nach A_1 und $B_1, \ldots, A_p$ und B_p —. Wir definieren die Formeln $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$ wie folgt: Δ_0 sei mit Γ^n identisch, Δ_1 entstehe aus Δ_0 vermittels Ersetzen von C_1 durch $A_1\wedge B_1$, überhaupt entstehe Δ_q aus Δ_{q-1} vermittels Ersetzen von C_q durch $A_q\wedge B_q$ $(q=1, 2, \ldots, p)$. Als „die Atome von Δ_q" (für die Wertung „W") betrachten wir die Θ-Atome $A_1, \ldots, A_q$ und $B_1, \ldots, B_q$, die Γ-Atome $C_{q+1}, \ldots, C_p$, ferner alle Γ-Atome von Γ^n, die nicht die Form $T\alpha$ haben. Es ist klar, daß (für den Nachweis unseres Satzes für den Spezialfall a)) der Beweis des Folgenden hinreicht: $w(\Delta_{q-1})\equiv 1$ ist dann und nur dann, wenn $w(\Delta_q)\equiv 1$ ist $(q=1, 2, \ldots, p)$. Die Wahrheit dieser Behauptung ist aber auf folgender einfacher Weise einzusehen:

d) Es sei die geordnete Menge der Atome Δ_{q-1} bzw. Δ_q $(D_1, \ldots, D_k)$ bzw. $(A, B, D_2, \ldots, D_k)$, d. h. entstehe Δ_q aus Δ_{q-1} vermittels Ersetzen von D_1 durch $A\wedge B$ (A und B sind voneinander und von jedem der $D_2, \ldots, D_k$ verschieden). Es sei $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ bzw. $(x, y, z_2, \ldots, z_k)$ ein Element des Definitionsbereichs von

$w(\Delta_{q-1})$ bzw. $w(\Delta_q)$. Es folgt aus den Regeln W1—4:

$$w(\Delta_{q-1}; 1, z_2, \ldots, z_k) \equiv w(\Delta_q; 1, 1, z_2, \ldots, z_k);$$
$$w(\Delta_{q-1}; 0, z_2, \ldots, z_k) \equiv w(\Delta_q; 0, 1, z_2, \ldots, z_k) \equiv$$
$$\equiv w(\Delta_q; 1, 0, z_2, \ldots, z_k) \equiv w(\Delta_q; 0, 0, z_2, \ldots, z_k).$$

Infolge dieser Identitäten, wenn im Wertebereich einer der $w(\Delta_{q-1})$, $w(\Delta_q)$ nur die Zahl 1 figuriert, so ist das auch für die andere der Fall. — Damit ist unser Satz für den Fall a) nachgewiesen.

Die Diskussion des Falles b) ist völlig analog mit der des Falles a).

Wir bemerken, daß aus dem Satz (8) unmittelbar seine nachstehende allgemeinere Form folgt: Gibt es für die Formel Γ eine Formel Δ, wovon Γ eine Konstituente ist und für welche $w(\Gamma^n_\Delta) \equiv 1$ ist, so ist für jede Formel Θ, wovon Γ eine Konstituente ist, $w(\Gamma^n_\Theta) \equiv 1$.

Im Folgenden wird die Behauptung „$w(\Gamma^n) \equiv 1$" manchmal in der Form „der Wert von Γ ist identisch 1" ausgedrückt; infolge des Satzes (8) kann daraus kein Mißverständnis entstehen.

(9) *Ist Γ ein Axiom, so ist $w(\Gamma^n) \equiv 1$.*

Beweis. Die Axiome B1—B8 und B10 sind herleitbare Primformeln, ihr Wert ist also nach W3 identisch 1. Die Normalformen der beiden Seiten den Äquivalenzen in den Axiomen B9 und B11 sind offenbar identisch (beiderseits kommen dieselben Variablen vor), woraus sofort folgt, daß ihr Wert identisch 1 ist. Die Wahrheit der Behauptung bestätigt sich unmittelbar auch bei den Axiomen B12—B19.

(10) *Der Wert einer unmittelbaren Folge von Formeln, die selbst identisch den Wert* 1 *haben, ist ebenfalls identisch* 1.

Beweis.

Fall der Schlußregel C1. Es seien die Werte von $\Gamma[\alpha]$ und von $\alpha = \beta$ identisch 1. (Jede Normalform der letzteren Formel ist ihr selbst identisch.)

Ist der Term α eine Konstituente eines konstanten Atoms $A[\alpha]$, so ist $A[\alpha]$ und wegen $\vdash \alpha = \beta$ auch $A[\beta]$ herleitbar, also ist auch $A[\beta]$ ein konstantes Atom. In diesem Fall hat der Umsatz des Terms keinen Einfluß auf den Wertebereich der Formel, es ist also auch der Wert von $\Gamma[\beta]$ identisch 1.

Ist dagegen α eine Konstituente eines nicht konstanten Atoms $\gamma[\alpha] = \delta$, so kann auch $\gamma[\beta] = \delta$ kein konstantes Atom sein (wäre es nämlich konstant, so wäre auf Grund des im vorigen Absatz Gesagten auch $\gamma[\alpha] = \delta$ konstant). Der Umsatz des Terms hat auch in diesem Fall keinen Einfluß auf den Wertebereich der Formel.

Es sei endlich α eine Konstituente einer nicht konstanten Primformel der Form $P\gamma[\alpha]$ oder $T\gamma[\alpha]$. Bilden wir die Normalform der Formeln $\Gamma[\alpha]$ und $\Gamma[\beta]$ bezüglich der Formel $\Gamma[\alpha] \wedge \Gamma[\beta]$; wir wollen sie kurz $\Gamma^*[\alpha^*]$ bzw. $\Gamma^*[\beta^*]$ bezeichnen. In beiden Formeln mit Sternen kommen alle Variablen von α und β vor, somit sind wegen $\vdash \alpha = \beta$ die perfekten disjunktiven (bzw. konjunktiven) Normalformen von $\gamma[\alpha]$ und $\gamma[\beta]$ identisch, die zwei Formeln mit Sternen sind also identisch. Wegen der Voraussetzung und des Satzes (8) ist der Wert von $\Gamma^*[\alpha^*]$ — und desgleichen der der damit identischen Formel $\Gamma^*[\beta^*]$ — identisch 1, und laut desselben Satzes ist auch der Wert von $(\Gamma[\beta])^n$ identisch 1.

Fall der Schlußregel C2. Es seien die Werte der Formeln $\Gamma[\Delta]$ und $\Delta \sim \Theta$ identisch 1. Bilden wir die Normalform beider Formeln bezüglich der Formel $\Gamma[\Delta] \wedge (\Delta \sim \Theta)$, wir wollen sie kurz $\Gamma^*[\Delta^*]$ und $\Delta^* \sim \Theta^*$ bezeichnen (Δ^*, bzw. Θ^* wird hier die in diesen Formeln statt Δ bzw. statt Θ auftretenden Konstituenten bezeichnen; offensichtlich tritt in beiden Formeln dasselbe Δ^* für Δ ein). Wiederum nach Satz (8) ist der Wert der Formeln $\Gamma^*[\Delta^*]$ und $\Delta^* \sim \Theta^*$ identisch 1. Letzteres kann aber in Folge der W-Regeln nur gelten, falls $w(\Delta^*) \equiv w(\Theta^*)$. In diesem Falle verändert aber das Umsetzen von Θ^* für Δ^* den Wertebereich von Γ^* nicht, es ist also auch der Wert von $\Gamma^*[\Theta^*]$ identisch 1, und laut Satz (8) auch der von $(\Gamma[\Theta])^n$.

Fall der Schlußregel C3. Voraussetzung: der Wert von Γ und $\Gamma \supset \Theta$ ist identisch 1. Es bezeichne Γ^* bzw. Θ^* die Normalform von Γ bzw. Θ bezüglich der Formel $\Gamma \supset \Theta$. Es ist klar, daß $(\Gamma \supset \Theta)^n$ identisch mit $\Gamma^* \supset \Theta^*$ ist. Laut Satz (8) ist der Wert von Γ^* und $\Gamma^* \supset \Theta^*$ identisch 1, folglich ist laut der W-Regeln auch der Wert von Θ^* identisch 1, laut Satz (8) also auch der von Θ^n.

Fall der Schlußregel C4. Voraussetzung: der Wert von $T\alpha$ ist identisch 1. Ist $T\alpha$ kein konstantes Atom, so hat seine Normalform die Gestalt $T\alpha_1 \wedge \ldots \wedge T\alpha_k$, wobei $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_k$ verschiedene $T\alpha$-Atome sind; dann kann aber nach den W-Regeln der Wert von $T\alpha$ nicht identisch 1 sein. Also kann $T\alpha$ nur ein konstantes Atom, d. h. herleitbar sein. Dann ist nach C4 auch $O\alpha$ herleitbar, also auch ein konstantes Atom, sein Wert ist folglich identisch 1.

Korollar der Sätze (9) und (10): *Der Wert der Normalform einer beliebigen herleitbaren Formel ist identisch* 1.

(11) *Ist* $w(\Gamma^n) \equiv 1$, *so ist* Γ *herleitbar.*

Beweis. Es ist klar, daß unter den Voraussetzungen der Wert von Γ^a ebenfalls identisch 1 ist. Dann existiert Γ^r gewiß, denn — wie es im Satz (7) gezeigt worden ist — existierte Γ^r nicht, so wäre $\neg \Gamma$ herleitbar und darum nach obigem Korollar der Wert von $(\neg \Gamma)^n$ identisch 1, woraus der Wert von Γ^n identisch 0 wäre, im Gegensatz zur Voraussetzung. Ist Γ^r leer, so ist Γ schon nach (7) herleitbar. Ist Γ^r nicht leer, so ist sein Wert offenbar identisch 1, weil es aus Γ^a unter Weglassung „identisch 0-wertiger" Disjunktionsglieder und „identisch 1-wertiger" Konjunktionsglieder entstanden ist. Es seien $B_1, \ldots, B_r$ die in Γ^r zurückgebliebenen Γ-Atome. Es ist klar, daß Γ^r eine perfekte disjunktive Normalform des Aussagenkalküls über den Variablen $B_1, \ldots, B_r$ ist, und da ihr Wert identisch 1 ist, ist sie *vollständig*. Γ^r ist also *im Aussagenkalkül* herleitbar. Dann ist es aber offenbar auch im System $\boldsymbol{D}$ herleitbar, da ja das System $\boldsymbol{D}$ die Axiome und die Schlußregeln des Aussagekalküls enthält. Da $\vdash \Gamma^r \sim \Gamma$ ist, folgt aus der Herleitbarkeit von Γ^r auch die Herleitbarkeit von Γ.

Die Sätze (9), (10) und (11) in Betracht gezogen, zeigt es sich, daß eine Formel Γ im System $\boldsymbol{D}$ dann und nur dann herleitbar ist, wenn gemäß der Wertung „W" der Wert von Γ^n identisch 1 ist. Die Bildung der Normalform und die Wertung „W" ergibt also ein Entscheidungsverfahren.

Literatur

[1] G. H. v. WRIGHT, *An Essay in Modal Logic* (Amsterdam, 1951).
[2] A. R. ANDERSON, The Logic of Norms, *Logique et Analyse*, **2** (1958), 84–91.
[3] A. LENNART, A Binary Primitive in Deontic Logic, *Logique et Analyse*, **5** (1962), 90–97.
[4] B. PEKLO, Einige Bemerkungen zu den deontischen Systemen, etc., *Logique et Analyse*, **5** (1962), 98–123.
[5] H. A. SCHMIDT, *Mathematische Gesetze der Logik*. I (Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1960).

(Eingegangen am 15. Dezember 1964)