# О КОМПОЗИЦИИ АВТОМАТОВ БЕЗ ПЕТЕЛЬ

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)

В работе [3] было доказано невозможность нахождения такого конечного набора автоматов[1]) $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(X, A_i, a_{i0}, X, \delta_i, \lambda_i)$, суперпозицией которых можно было бы индуцировать произвольное автоматное отображение $\psi$, отображающее свободную полугруппу $F(X)$ на себя. В настоящей работе доказывается аналогичное утверждение в случае произвольных автоматов и связи, являющейся более общей чем суперпозиция.

Предполагается знакомство читателя с определениями, обозначениями и результатами работы [3].

Структурной композиции автоматов (см. [1]) в абстрактной теории соответствует произведение автоматов в смысле В. М. Глушкова (см. [2]). Если в некоторую композицию автоматов входят автоматы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ и только они (среди них могут быть и изоморфные), то мы говорим о композиции $\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_r$. Если данная композиция не содержит петлю (см. [1]), то можно ввести частичное упорядочение $R$ в множество $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r\}$, по которому $\mathbf{A}_i > \mathbf{A}_j$ $(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \in \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r\})$ тогда и только тогда, если не меньше чем одич выходной канал автомата $\mathbf{A}_i$, хотя бы через некоторый логический элемент (см. [1]), соединен не меньше чем с одним входным каналом автомата $\mathbf{A}_j$. Композиции $\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_r$ без петель соответствует такое произведение, в котором вместо равенства $\varphi(a_1, \dots, a_r, x)=(x_1, \dots, x_r)$ имеет место равенство $\varphi(a_1, \dots, a_r, x)=(\dots, \varphi_k(a_{kj}, \dots, x), \dots)$ где компоненты $a_{kj}$ элемента $(a_1, \dots, a_r)$ суть элементы автоматов $\mathbf{A}_{kj}$, больших автомата $\mathbf{A}_k$. Такое произведение мы назовем $R$-произведением.

Пусть $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$ произвольное конечное множество автоматов. Мы говорим о произведении $\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_k$ автоматов из множества $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$, если каждый автомат $\mathbf{A}_i$ $(i=1, \dots, r)$ $\mathfrak{A}$-изоморфен некоторому автомату из $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$. Как указано в работе [2], можно найти такое конечное множество $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$ автоматов, что произвольное автоматное отображение $\psi$ индуцируется некоторым произведением автоматов из множества $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$. В настоящей работе показывается невозможность выбора такого конечного множества автоматов, с помощью которых можно было бы осуществить произвольное автоматное отображение при допущении только $R$-произведений.

[1]) Под автоматом понимается конечный автомат и под автоматным отображением — отображение, индуцируемое конечным автоматом.

Пусть $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r$—различные разбиения множества $N$ на подмножества, непересекающиеся друг с другом, а $\pi_0$—разбиение, содержащее единственный класс. Будем считать, что $\pi_i < \pi_j$ $(\pi_i, \pi_j \in \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r\})$, если разбиение $\pi_j$ мельче разбиения $\pi_i$. Разбиение $\pi_i$ опережает разбиение $\pi_j$, если $\pi_i < \pi_j$ и нельзя найти такое разбиение $\pi_l (\in \{\pi_1, \ldots, \pi_r\})$, для которого $\pi_i > \pi_l > \pi_j$. В дальнейшем $m(\pi_i)$ $(i=1, \ldots, k)$ обозначает пересечение разбиений из $\{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k\}$, опережающих разбиение $\pi_i$.

Для доказательства высказанного утверждения нам понадобится следующая

Лемма. *Если автомат* $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ $\mathfrak{A}$*-изоморфен* $R$*-произведению* $\mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_r$, *то для произвольного* $x_i (\in X)$ *и произвольного* $a (\in A)$ *автомат* $\mathbf{A}^{(a,i)}$ *имеет такое множество допустимых разбиений* $\pi_k^*$ $(k=0, \ldots, s)$, *что число классов разбиения* $\pi_k^*$ $(1 \leqq k \leqq s)$, *входящих в некоторый класс разбиения* $m(\pi_k^*)$ *не превосходит* $l$, *где* $l = \max\limits_{1 \leqq j \leqq r} \overline{\overline{A_j}}$; *далее* $\bigcap\limits_k \pi_k^*$ *тривиально.*

Лемма доказывается аналогично лемме работы [3], только определение допустимых разбиений здесь следующее: $(a_1, \ldots, a_r)$ и $(a_1', \ldots, a_r')$ принадлежат одному и тому же классу по $\pi_j$ тогда и только тогда, если $a_j = a_j'$ и $a_{j_u} = a_{j_u}'$, где компоненты $a_{j_u}$ и $a_{j_u}'$ элементов $(a_1, \ldots, a_r)$ и $(a_1', \ldots, a_r')$ соотв. — элементы автоматов $\mathbf{A}_{j_u}$, больших автомата $\mathbf{A}_j$.

После этого покажем, что имеет место следующая

Теорема. *Не существует такого конечного множества* $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v\}$, *что произвольное автоматное отображение индуцировалось бы некоторым* $R$*-произведением автоматов из* $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное конечное множество автоматов $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v\}$. Пусть $l = \max\limits_{1 \leqq j \leqq v} \overline{\overline{B_j}}$, $p(>l)$ простое число и пусть дана некоторая нетождественная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1' & \ldots & n' \end{pmatrix}$.

Рассмотрим автомат $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X, A, a_0, X, \delta, \lambda)$, где

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\}; \quad \overline{\overline{X}} = n (\geqq 2),$$

$$\delta(a_k, x_i) = \begin{cases} a_{k+1}, & \text{если } 0 \leqq k \leqq p-2 \\ a_0, & \text{если } k = p-1, \end{cases}$$

$$\lambda(a_k, x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{если } 0 \leqq k \leqq p-2 \\ x_{i'}, & \text{если } k = p-1. \end{cases}$$

Пусть $\psi$—отображение, индуцируемое автоматом $\mathbf{A}$. Покажем, что никакой автомат $\mathbf{B} = \mathbf{B}(X, B, b_0, X, \delta', \lambda')$, индуцирующий $\psi$ не $\mathfrak{A}$-изоморфен никакому $R$-произведению автоматов из $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v\}$.

Как видно из работы [3], автомат $\mathbf{B}$ имеет такое состояние $b_0 q$ $(q \in F(X))$, что автомат $\mathbf{B}^{(b_0 q, i)}$ без выходных сигналов изоморфен следующему автомату $\mathbf{C}=\mathbf{C}(x_i, C, c_0, \delta'')$ без выходных сигналов:

$$C = \{c_0, c_1, \dots, c_{tp-1}\}; \ t \geqq 1,$$

$$\delta''(c_j, x_i) = \begin{cases} c_{j+1}, & \text{если } 0 \leqq j \leqq tp-2, \\ c_0, & \text{если } j = tp-1. \end{cases}$$

Между допустимыми разбиениями автомата $\mathbf{C}$ и делителями числа $tp$ можно установить взаимно однозначное соответствие так, что число классов разбиения $\pi_i$, соответствующего числу $t_i$ $(t_i|tp)$ равно $t_i$. Действительно, для мощности $f_i$ и числа $t_i$ классов произвольного разбиения $\pi_i$ автомата $\mathbf{C}$ имеют место $f_i|tp$ и $t_i|tp$. Далее, нетрудно показать, что $c_k \equiv c_l(\pi_i)$ $(c_k, c_l \in C)$ тогда и только тогда, если $k \equiv l (\mathrm{mod}\, t_i)$. Обратно, если $t_i|tp$ и $\pi_i$ означает разбиение автомата $\mathbf{C}$, для которого $c_k \equiv c_l(\pi_i) \Leftrightarrow k \equiv l(\mathrm{mod}\, t_i)$, то $\pi_i$ является допустимым и число классов по $\pi_i$ равно $t_i$. Итак, наше утверждение доказано. В качестве результата получается также, что для разбиений $\pi_i, \pi_j$ автомата $\mathbf{C}$ $\pi_i > \pi_j$ тогда и только тогда, если $t_i|t_j$.

Пользуясь этими результатами покажем, что для автомата $\mathbf{B}$ не выполняются условия леммы. Этим теорема будет доказана. Обозначим через $T = \{\pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_s^*\}$ произвольное множество различных допустимых разбиений автомата $\mathbf{C}$, содержащее разбиение $\pi_0^*$, которое имеет единственный класс. В множестве $T$ введем частичное упорядочение $R$, по которому $\pi_k^* > \pi_l^*$ $(\pi_k^*, \pi_l^* \in T)$ тогда и только тогда, если разбиение $\pi_l^*$ мельче разбиения $\pi_k^*$. Пусть $T_1$ — множество максимальных элементов множества $T$ и вообще $T_i$ $(i \geqq 2)$ — множество максимальных элементов множества $T - \{T_1 + \dots + T_{i-1}\}$. Предположим, что для произвольного $\pi_i^* (\in \{T - \pi_0^*\})$ — $g_i = \dfrac{f_i^*}{f_i} < p$, где $f_i^*$ — мощность классов по $m(\pi_i^*)$, т. е. число $g_i$ классов разбинения $\pi_i^*$, содержащихся в некотором классе $m(\pi_i^*)$, меньше числа $p$. Покажем, что в этом случае можно найти такое нетривиальное допустимое разбиение $\pi^*$ автомата $\mathbf{C}$, что $\pi_i^* \geqq \pi^*$ для всех $\pi_i^* (\in T)$, то есть пересечение $\pi_0^* \cap \pi_1^* \cap \dots \cap \pi_s^*$ — нетривиально. Действительно, в качестве $\pi^*$ можно выбрать разбиение, соответствующее числу $t$. Проведем индукцию по индексам множеств $T_i$. Если $\pi_i^* \in T_1$, то $t_i|t$, поскольку $t_i|tp$ и $t_i < p$. Это значит, что $\pi_i^* > \pi^*$. Предположим, что утверждение уже доказано для всех индексов, меньших числа $j$ и пусть $\pi_j^* \in T_j$. По индукционному предположению $m(\pi_j^*) \geqq \pi^*$. Таким образом, для числа $t_j^*$ классов по $m(\pi_j^*)$ выполняется $t_j^*|t_j$, то есть $f_j^* = up$. Далее, $g_j|up$ и $g_j < p$, значит $p|f_j$ и следовательно $t_j|t$, то есть $\pi_j^* \geqq \pi$. Аналогичные утверждения имеют место для $\mathbf{B}^{(b_0 q, i)}$, так как автоматы без выходных сигналов $\mathbf{B}^{(b_0 q, i)}$ и $\mathbf{C}$ изоморфны. Тем самым теорема доказана. Утверждение теоремы значит, что нельзя найти такое конечное множество автоматов, что произвольное автоматное отображение индуцировалось бы в некоторой композиции без петель из этого множества.

Из доказательства видно, что если автоматы $\mathbf{B}_j$ $(j=1, \dots, v)$ фигурирующие там имеют общее множество $X$ входных и выходных сигналов, далее, они индуцируют взаимно однозначные отображения свободной полугруппы $F(X)$ на себя, и вместе с автоматом $\mathbf{B}_j$ в выбранные автоматы входит и обратный ему автомат, то получается доказательство теоремы работы [3].

## Литература

[1] В. М. Глушков, *Синтез цифровых автоматов* (Москва, 1962).
[2] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи Матем. Наук*, **16**:5 (1961), 3—63.
[3] Ф. Гечег, О группе взаимно однозначных преобразований, определенных конечными автоматами, *Кибернетика*, 1 (1965), 37—40.

*(Поступило 30 XI. 1964 г.)*