Sur les contractions de l'espace de Hilbert. XI
Transformations unicellulaires

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Une transformation linéaire bornée A de l'espace de Hilbert $\mathbf{H}$ s'appelle *unicellulaire* lorsque pour deux sous-espaces quelconques $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ de $\mathbf{H}$, invariants pour A, on a ou bien $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ ou bien $\mathbf{N} \supseteq \mathbf{M}$. Dans le cas où $\mathbf{H}$ est de dimension finie, ces sont les transformations qui correspondent à une matrice ayant une seule cellule de Jordan. Dans le cas d'un espace $\mathbf{H}$ de dimension infinie, BRODSKY, LIVŠITZ et d'autres (*voir* le rapport [1]) ont étudié le problème d'unicellularité surtout pour les transformations A dont la partie imaginaire $Q = (A - A^*)/2i$ est de rang fini (ou du moins de trace finie) et le spectre $\sigma(A)$ se réduit à un seul point. Ils ont établi notamment une condition suffisante pour l'unicellularité en termes du comportement de la résolvante de A au voisinage du seul point de $\sigma(A)$. *) Dans le cas où Q est de rang 1, ŠMULYAN [3] a caractérisé toutes les transformations A unicellulaires.

Le but de notre Note est d'étudier le problème d'unicellularité d'abord pour les contractions T de $\mathbf{H}$ et cela surtout dans l'hypothèse que les opérateurs de défaut $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$ sont de rang fini. De ces contractions on passe ensuite aux transformations A telles que Q est de rang fini et $Q \geqq O$. On aboutit ainsi à une caractérisation des transformations unicellulaires de ce type qui est intimement liée au comportement du semi-groupe de contractions engendré par $(iA)^{-1}$.

1. Contractions unicellulaires. Premières propositions

1. De la définition de l'unicellularité il résulte immédiatement que si T est unicellulaire dans $\mathbf{H}$, il en est de même pour T^* ainsi que pour toute restriction de T à un sous-espace invariant pour T. De plus il est manifeste que si T est unicellulaire, aucun sous-espace non banal de $\mathbf{H}$ ne peut réduire T. Comme pour tout $h \in \mathbf{H}$ $(h \neq 0)$ il y a un sous-espace séparable de $\mathbf{H}$, qui contient h et réduit T (notamment le sous-espace déterminé par les vecteurs Sh où S parcourt les produits finis formés de T et T^*), il résulte que si T est unicellulaire dans $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}$ doit être séparable. Finalement, si $\dim \mathbf{H} > 1$, il n'y a dans $\mathbf{H}$ aucune transformation normale unicellulaire (conséquence immédiate du théorème spectral).

---

*) G. E. KISILEVSKY et M. S. BRODSKY viennent de démontrer aussi la nécessité de cette condition, leur article apparaîtra dans les *Izvestiya Akad. Nauk SSSR* (communication orale).

Envisageons une *contraction* T de $\mathbf{H}$, où $\dim \mathbf{H} > 1$. Soit $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1$ la décomposition canonique de $\mathbf{H}$ correspondant aux parties unitaire T_0 et complètement non-unitaire T_1 de T. Lorsque $\dim \mathbf{H}_0 > 1$, T_0 (étant unitaire) n'est pas unicellulaire dans $\mathbf{H}_0$, ce qui entraîne que T n'est pas unicellulaire dans $\mathbf{H}$. Lorsque $\dim \mathbf{H}_0 = 1$, $\mathbf{H}_0$ est un sous-espace non banal de $\mathbf{H}$ réduisant T, donc T n'est pas unicellulaire dans $\mathbf{H}$. Donc, si T est unicellulaire dans $\mathbf{H}$, on a nécessairement $\mathbf{H}_0 = \{0\}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$, c'est-à-dire que T est complètement non-unitaire.

Ainsi il est justifié de se borner dans ce qui suit à l'étude des contractions complètement non-unitaires T dans des espaces $\mathbf{H}$ séparables et de dimension >1.

La proposition suivante est beaucoup plus délicate:

Proposition 1. 1. *Aucune contraction T de classe C_{11} n'est unicellulaire.*[1])

Démonstration. Soit $T \in C_{11}$. En vertu du théorème 3 de [VII], T est quasi similaire à la partie „résiduelle" $U^0 = U|\mathbf{K}^0$ de la dilatation unitaire minimum U de T; U^0 est unitaire dans $\mathbf{K}^0$ et son spectre est absolument continu. Soit $E^0(\beta)$ la mesure spectrale de U^0, étalée sur la circonférence unité. Cette mesure étant absolument continue, on peut choisir deux sous-ensembles boréliens disjoints de la circonférence unité, soit β_1 et β_2, tels que $E^0(\beta_1)$ et $E^0(\beta_2)$ sont différentes des opérateurs O et I de $\mathbf{K}^0$. En vertu du théorème 3 de [IX] on y peut attacher des sous-espaces non banaux $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ de $\mathbf{H}$, invariants pour T et tels que $T_i = T|\mathbf{H}_i$ est quasi similaire à $U_i^0 = U^0|\mathbf{K}_i^0$ où $\mathbf{K}_i^0 = E^0(\beta_i)\mathbf{K}^0$ $(i = 1, 2)$. Si T était unicellulaire, $\mathbf{H}_1$ ou $\mathbf{H}_2$ devrait contenir l'autre: on peut supposer que

$$\mathbf{H}_1 \subseteqq \mathbf{H}_2. \tag{1.1}$$

En vertu des quasi similitudes il existe une application linéaire continue biunivoque X de $\mathbf{K}_1^0$ sur une variété linéaire dense dans $\mathbf{H}_1$, et une application linéaire continue biunivoque Y de $\mathbf{H}_2$ sur une variété linéaire dense dans $\mathbf{K}_2^0$, telles que

$$T_1 X = X U_1^0, \tag{1.2}$$

$$Y T_2 = U_2^0 Y. \tag{1.3}$$

Soit $Y_1 = Y|\mathbf{H}_1$. $Z = Y_1 X$ sera alors une application linéaire continue biunivoque de $\mathbf{K}_1^0$ dans $\mathbf{K}_2^0$. En vertu de (1. 2) on aura

$$Y_1 T_1 X = Y_1 X U_1^0 = Z U_1^0$$

et en vertu de (1. 1) et (1. 3)

$$Y_1 T_1 X = Y T_2 X = U_2^0 Y X = U_2^0 Y_1 X = U_2^0 Z,$$

donc $Z U_1^0 = U_2^0 Z$. Cela entraîne

$$Z E_1^0(\beta) = E_2^0(\beta) Z \tag{1.4}$$

[1]) Pour la définition des classes $C_{\alpha\beta}$ et C_0 des contractions *voir* [VII].

pour les mesures spectrales attachées aux transformations unitaires U_1^0 et U_2^0, et pour β borélien quelconque. Or, comme

$$E_i^0(\beta) = E^0(\beta)|\mathbf{K}_i^0 = E^0(\beta)|E^0(\beta_i)\mathbf{K}_i^0 = E^0(\beta\cap\beta_i)|\mathbf{K}_i^0,$$

on aura en particulier pour $\beta=\beta_2$:

$$E_1^0(\beta_2) = E^0(\beta_2\cap\beta_1)|\mathbf{K}_1^0 = O_{\mathbf{K}_1^0}, \quad E_2^0(\beta_2) = E^0(\beta_2\cap\beta_2)|\mathbf{K}_2^0 = I_{\mathbf{K}_2^0},$$

donc, en vertu de (1. 4),

$$O=Z.$$

Cela contredit ce que Z est biunivoque [2]). Cette contradiction prouve que T ne peut appartenir à la classe C_{11}.

2. Dans la suite on se restreindra à envisager des contractions complètement non-unitaires T *aux indices de défaut* $\mathbf{d}_T$, $\mathbf{d}_{T^*}$ *finis.* [3])

Pour pareille T, la restriction $T_1=T|\mathbf{H}_1$ à un sous-espace $\mathbf{H}_1\neq\{0\}$, invariant pour T, est de même type; on a notamment

$$\mathbf{d}_{T_1}\leqq\mathbf{d}_T \text{ et } \mathbf{d}_{T_1^*}\leqq\mathbf{d}_T+\mathbf{d}_{T^*};$$

voir [IX]*, proposition C.

Nous commençons par démontrer la suivante

Proposition 1. 2. *Soit T une contraction dans l'espace $\mathbf{H}$ de dimension infinie, aux indices de défaut finis et unicellulaire. Alors $T\in C_0$ et la fonction minimum $m_T(\lambda)$ de T est de la forme* [4])

$$\exp\left(a_T\frac{\lambda+\alpha_T}{\lambda-\alpha_T}\right) \quad \text{où} \quad a_T>0,\ |\alpha_T|=1. \tag{1.5}$$

Démonstration. Comme T est unicellulaire et $\dim\mathbf{H}>1$, T est complètement non-unitaire et par conséquent a une triangulation de type

$$\begin{bmatrix} C_{\cdot 1} & * \\ O & C_{\cdot 0}\end{bmatrix}$$

où l'on admet aussi l'opérateur O de l'espace $\{0\}$ comme appartenant à toutes les classes $C_{\alpha\beta}$. Donc ou bien $T\in C_{\cdot 0}$, ou bien il existe un sous-espace non banal $\mathbf{H}_1$, invariant pour T et tel que $T_1=T|\mathbf{H}_1\in C_{\cdot 1}$. Dans le second cas, T_1 a aussi ses indices de défaut finis et on peut appliquer le théorème 2* de [IX]*, d'où il résulte qu'ou bien $T_1\in C_{11}$, ou bien tout point λ dans l'intérieur du cercle unité est une valeur propre de T_1: vu la proposition 1. 1 chacune de ces alternatives contredit ce que T_1 est unicellulaire. Donc, seul le cas $T\in C_{\cdot 0}$ est possible. Ce résultat, appliqué à T^* au lieu de T, donne que $T^*\in C_{\cdot 0}$, donc $T\in C_{0\cdot}$. Ainsi $T\in C_{00}$; en vertu de [VIII], n°6, cela entraîne $T\in C_0$.

---

[2]) Notons que $\mathbf{K}_2^0\neq\{0\}$; en effet, T_2 étant quasi similaire à U_2^0, $\mathbf{H}_2$ et $\mathbf{K}_2^0$ ont la même dimension.

[3]) Rappelons que $\mathbf{d}_T=\dim\mathbf{D}_T$ et $\mathbf{d}_{T^*}=\dim\mathbf{D}_{T^*}$ où $\mathbf{D}_T=\overline{D_T\mathbf{H}}$, $\mathbf{D}_{T^*}=\overline{D_{T^*}\mathbf{H}}$ (sous-espaces de défaut).

[4]) Rappelons que la fonction minimum n'est déterminée qu'à un facteur constant près, de module 1.

Soit $m_T(\lambda)$ la fonction minimum de T. Elle ne peut être factorisée en produit de deux facteurs intérieurs non constants, premiers entre eux [5]), parce que, au cas contraire, T admettrait des sous-espaces invariants non banaux $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$, tels que $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \{0\}$ (*voir* [VII], théorème 8 (iii)), ce qui est impossible vu que T est unicellulaire. Par conséquent, la factorisation canonique

$$B(z)\exp\left[-\oint_{|z|=1}\frac{z+\lambda}{z-\lambda}\,d\mu(z)\right] \qquad (\textit{voir}\ [\text{VII}],\ \text{n}^\circ\,6)$$

de la fonction intérieure $m_T(\lambda)$ se réduit ou bien à un seul facteur de Blaschke

$$\left(\frac{\lambda-a}{1-\bar{a}\lambda}\right)^n \tag{1.6}$$

où $|a|<1$ et n est un nombre naturel, ou bien au facteur exponentiel

$$\exp\left[-\oint_{|z|=1}\frac{z+\lambda}{z-\lambda}\,d\mu(z)\right] \tag{1.7}$$

où μ est une mesure non-négative singulière, non nulle, étalée sur la circonférence unité.

Dans le premier cas on a $(T-aI)^n = O$ et par conséquent, pour tout h fixé ($h\in\mathbf{H}$), les vecteurs $h, Th, \ldots, T^{n-1}h$ déterminent un sous-espace $\mathbf{M}(h)$ de dimension $\leqq n$, invariant pour T. Soit h_0 tel que $\mathbf{M}(h_0)$ est de dimension maximum et soit h un vecteur dans $\mathbf{H}$ n'appartenant pas à $\mathbf{M}(h_0)$. [6]) Aucun des sous-espaces $\mathbf{M}(h_0)$, $\mathbf{M}(h)$ ne contient alors l'autre, ce qui contredit ce que T est unicellulaire. Donc seul le cas (1. 7) est possible. Montrons que le support de la mesure μ est constitué d'un seul point $z=\alpha$, $|\alpha|=1$. En cas contraire il y aurait deux arcs complémentaires semi-ouverts de la circonférence unité, soit ω_1 et ω_2, tels que $\mu(\omega_i)>0$ $(i=1,2)$. En remplaçant dans le second membre de (1. 7) la mesure μ par ses restrictions à ω_1 et à ω_2, on obtient deux fonctions intérieures non constantes, premières entre elles, et telles que leur produit est égal à $m_T(\lambda)$. Or, comme nous l'avons déjà remarqué, telle factorisation est impossible vu que T est unicellulaire.

Par conséquent, $m_T(\lambda)$ est nécessairement de la forme (1. 5).

Un complément utile est fourni par la

Proposition 1. 3. *Soit T complètement non-unitaire et aux indices de défaut finis. Pour que T soit de classe C_0 et que $m_T(\lambda)$ ait la forme* (1. 5), *il faut et il suffit que le spectre $\sigma(T)$ soit constitué du seul point α_T, $|\alpha_T|=1$.*

Démonstration. La nécessité de la condition résulte immédiatement du théorème 7 de [VII]. Quant à sa suffisance, les corollaires à p. 125 de [V] assurent que $T\in C_{00}$; en vertu du théorème 5 de [VIII] on a donc $T\in C_0$. Comme $\sigma(T)=$ $=\{\alpha_T\}$ il résulte, toujours du théorème 7 de [VII], que $m_T(\lambda)$ doit avoir la forme (1. 5); en effet, c'est la seule fonction intérieure qui n'a pas de zéros dans l'intérieur du cercle unité et qui est analytique même sur la circonférence unité sauf au point α_T.

---

[5]) C'est-à-dire n'ayant pas de diviseur commun intérieur non constant.

[6]) Tel vecteur existe parce qu'on a supposé que $\mathbf{H}$ est de dimension infinie.

2. Deux lemmes et une application aux contractions unicellulaires

1. Nous avons besoin de quelques relations entre la fonction minimum d'une contraction T et les sous-espaces invariants pour T. Ces relations complètent celles démontrées dans [VII], nº 7.

Lemme 1. *Soit T une contraction de $\mathbf{H}$, de classe C_0, et soit $\mathbf{H}_1$ un sous-espace non banal de $\mathbf{H}$, invariant pour T. Soit*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & * \\ O & T_2 \end{bmatrix}$$

la triangulation de T correspondant à la décomposition $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$. T_1 et T_2 appartiennent alors à la classe C_0; $m_{T_1}(\lambda)$ et $m_{T_2}(\lambda)$ sont des diviseurs de $m_T(\lambda)$, et $m_T(\lambda)$ est un diviseur de $m_{T_1}(\lambda)\, m_{T_2}(\lambda)$.

Démonstration. Toutes les assertions sauf la dernière ont été établies dans [VII], nº 7. 2. Pour démontrer que $m_T(\lambda)$ est un diviseur de $m_{T_1}(\lambda)\, m_{T_2}(\lambda)$, rappelons que pour toute fonction $u(\lambda) \in H^\infty$ on a

$$u(T_1) = u(T)|\mathbf{H}_1 \quad \text{et} \quad u(T_2) = P_2 u(T)|\mathbf{H}_2 \tag{2. 1}$$

où P_2 désigne la projection orthogonale sur $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_1$. Il s'ensuit que pour $h_1 \in \mathbf{H}_1$

$$(m_{T_1} m_{T_2})(T) h_1 = (m_{T_1} m_{T_2})(T_1) h_1 = m_{T_1}(T_1) m_{T_2}(T_1) h_1 = 0$$

et pour $h_2 \in \mathbf{H}_2$

$$0 = m_{T_2}(T_2) h_2 = P_2 m_{T_2}(T) h_2, \quad \text{donc} \quad h_1' = m_{T_2}(T) h_2 \in \mathbf{H}_1;$$

par conséquent

$$(m_{T_1} m_{T_2})(T) h_2 = m_{T_1}(T) m_{T_2}(T) h_2 = m_{T_1}(T) h_1' = m_{T_1}(T_1) h_1' = 0.$$

Ainsi $(m_{T_1} m_{T_2})(T) h = 0$ pour tout h appartenant à $\mathbf{H}_1$ ou à $\mathbf{H}_2$; comme $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$ il en résulte que $m_T(\lambda)$ est un diviseur de $m_{T_1}(\lambda) m_{T_2}(\lambda)$.

Lemme 2. *Soit $m_1(\lambda)$ un diviseur intérieur non constant de la fonction minimum $m_T(\lambda)$ d'une contraction T de $\mathbf{H}$, de classe C_0.*

$$\mathbf{H}_1 = \{h \colon h \in \mathbf{H}, m_1(T) h = 0\} \tag{2. 2}$$

est alors un sous-espace invariant pour T, de plus $\mathbf{H}_1 \neq \{0\}$ et $T_1 = T|\mathbf{H}_1$ a sa fonction minimum égale à $m_1(\lambda)$. Lorsque, dans la factorisation $m_T(\lambda) = m_1(\lambda) m_2(\lambda)$, aucun des facteurs n'est constant, on a aussi $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_1 \neq \{0\}$ et $T_2 = (T^*|\mathbf{H}_2)^*$ a sa fonction minimum égale à $m_2(\lambda)$.

Démonstration. Dans le cas où $m_1(\lambda) = m_T(\lambda)$ on a $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ et il n'y a rien plus à démontrer. Reste le cas où la factorisation $m_T(\lambda) = m_1(\lambda) m_2(\lambda)$ n'est pas banale. Le fait que $\mathbf{H}_1$ est alors un sous-espace non banal de $\mathbf{H}$, invariant pour T, a été démontré dans [VII], nº 7, mais là on n'a établi les relations $m_{T_1}(\lambda) = m_1(\lambda)$, $m_{T_2}(\lambda) = m_2(\lambda)$ que dans l'hypothèse additionnelle que les facteurs intérieurs $m_1(\lambda)$, $m_2(\lambda)$ sont premiers entre eux. Le raisonnement suivant porte sur le cas général.

En vertu de (2. 1) et de la définition (2. 2) de $\mathbf{H}_1$, on a $m_1(T_1)=m_1(T)|\mathbf{H}_1=O$. Par conséquent $m_{T_1}(\lambda)$ est un diviseur de $m_1(\lambda)$, donc $m_1(\lambda)=m_{T_1}(\lambda)p(\lambda)$ avec un facteur intérieur $p(\lambda)$.

D'autre part, pour tout $h\in\mathbf{H}$ on a $m_1(T)m_2(T)h=m_T(T)h=0$, donc $h'=m_2(T)h\in\mathbf{H}_1$. En appliquant (2. 1) on obtient pour $h\in\mathbf{H}_2$

$$m_2(T_2)h=P_2m_2(T)h=P_2h'=0.$$

Ainsi, $m_2(T_2)=O$ et par conséquent $m_{T_2}(\lambda)$ est un diviseur de $m_2(\lambda)$, donc $m_2(\lambda)=m_{T_2}(\lambda)q(\lambda)$ avec un facteur intérieur $q(\lambda)$.

En réunissant ces résultats nous obtenons

$$m_T(\lambda)=m_1(\lambda)m_2(\lambda)=m_{T_1}(\lambda)p(\lambda)m_{T_2}(\lambda)q(\lambda)=m_{T_1}(\lambda)m_{T_2}(\lambda)\cdot p(\lambda)q(\lambda).$$

D'autre part, $m_T(\lambda)$ est, en vertu du lemme 2. 1, un diviseur de $m_{T_1}(\lambda)m_{T_2}(\lambda)$. Par conséquent on a nécessairement $p(\lambda)q(\lambda)=1$, donc $p(\lambda)=1$, $q(\lambda)=1$ et par suite $m_{T_1}(\lambda)=m_1(\lambda)$, $m_{T_2}(\lambda)=m_2(\lambda)$ (tout cela, bien entendu, à des facteurs constants près, de module 1).

Lemme 2 se trouve démontré.

Nous allons appliquer ce lemme au cas des fonctions intérieures

$$u_a(\lambda) = \exp\left(a\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) \qquad (a\geqq 0). \tag{2. 3}$$

Pour a donné, les seuls diviseurs intérieurs de $u_a(\lambda)$ sont les fonctions $u_b(\lambda)$ où $0\leqq b\leqq a$.

Proposition 2. 1. *Soit T une contraction dans l'espace $\mathbf{H}$, de classe C_0 et telle que $m_T(\lambda)=u_{a_T}(\lambda)$ où $a_T>0$. Les sous-espaces*

$$\mathbf{H}_a=\{h\colon h\in\mathbf{H},\, u_a(T)h=0\} \qquad (0\leqq a\leqq a_T) \tag{2. 4}$$

sont invariants pour T et on a

$$\mathbf{H}_0=\{0\};\quad \mathbf{H}_{a_1}\subsetneqq\mathbf{H}_{a_2} \quad \textit{pour} \quad 0\leqq a_1<a_2\leqq a_T;\quad \mathbf{H}_{a_T}=\mathbf{H}; \tag{2. 5}$$

$$\bigcap_{x>a}\mathbf{H}_x=\mathbf{H}_a \quad \textit{pour} \quad 0\leqq a<a_T; \tag{2. 6}$$

$$\overline{\bigcup_{x<a}\mathbf{H}_x}=\mathbf{H}_a \quad \textit{pour} \quad 0<a\leqq a_T. \tag{2. 7}$$

Donc les projections orthogonales correspondantes E_a forment une famille spectrale dans l'intervalle $[0, a_T]$, strictement croissante et continue. Si de plus T est unicellulaire, il n'y a pas d'autres sous-espaces invariants pour T.

Démonstration. Posons $T_a=T|\mathbf{H}_a$ $(0\leqq a\leqq a_T)$. D'après le lemme 2 on a $m_{T_a}(\lambda)=u_a(\lambda)$ pour tout $a>0$, d'où il s'ensuit en particulier $T_{a_1}\neq T_{a_2}$ et par conséquent $\mathbf{H}_{a_1}\neq\mathbf{H}_{a_2}$ pour $a_1\neq a_2$. Les autres assertions (2. 5) sont manifestes.

Passons à (2. 6). Puisque $\mathbf{H}_a\subset\mathbf{H}_x$ pour $a<x$, (2. 6) veut dire que si $u_x(T)h=0$ pour un $h\in\mathbf{H}$ et pour tout $x>a$, on a aussi $u_a(T)h=0$. Or, cela s'ensuit de ce que, lorsque $x\to a$, $u_x(\lambda)$ tend vers $u_a(\lambda)$ dans tout point de l'ensemble $\{\lambda\colon |\lambda|\leqq 1, \lambda\neq 1\}$, en y restant bornée en module par 1, et que par conséquent $u_x(T)\to u_a(T)$.

Pour démontrer la relation (2. 7), observons d'abord que le premier membre de (2. 7), que nous voulons désigner pour le moment par $\mathbf{H}'_a$, est un sous-espace de $\mathbf{H}_a$ invariant pour T. Faisons l'hypothèse $\mathbf{H}''_a = \mathbf{H}_a \ominus \mathbf{H}'_a \neq \{0\}$, et montrons que cela nous conduit à une contradiction.

Soit $T_a = \begin{bmatrix} T'_a & * \\ O & T''_a \end{bmatrix}$ la triangulation de T_a correspondant à la décomposition $\mathbf{H}_a = \mathbf{H}'_a \oplus \mathbf{H}''_a$. Pour tout $h \in \mathbf{H}''_a$ et $x < a$ on a

$$u_x(T)u_{a-x}(T_a)h = u_x(T_a)u_{a-x}(T_a)h = u_a(T_a)h = m_{T_a}(T_a)h = 0,$$

d'où

$$u_{a-x}(T_a)h \in \mathbf{H}_x.$$

Comme $\mathbf{H}_x \subset \mathbf{H}'_a$, cela entraîne $u_{a-x}(T''_a)h = P''_a u_{a-x}(T_a)h = 0$. Par conséquent $u_{a-x}(T''_a) = O$ pour tout $x < a$. Donc $m_{T''_a}(\lambda)$ est un diviseur de $u_{a-x}(\lambda)$ pour tout $x < a$. Or, évidemment, les fonctions $u_{a-x}(\lambda)$ $(0 < x < a)$ n'ont pas de diviseur commun intérieur non constant, ce qui présente une contradiction parce que $m_{T''_a}(\lambda)$, comme fonction minimum d'une contraction dans un espace différent de $\{0\}$, ne peut être une constante de module 1. Ainsi, on a établi toutes les propriétés (2. 5)—(2. 7).

Reste à envisager le cas où T est unicellulaire. Soit $\mathbf{M}$ un sous-espace invariant pour T, non banal, et soit $a = \sup\{x : \mathbf{H}_x \subseteqq \mathbf{M}\}$. Grâce à (2. 7) on a alors aussi $\mathbf{H}_a \subseteqq \mathbf{M}$ et par conséquent $a < a_T$. Pour $a < x < a_T$, $\mathbf{H}_x$ n'est pas inclus dans $\mathbf{M}$, donc, en vertu de ce que T est unicellulaire, $\mathbf{M}$ doit être inclus dans $\mathbf{H}_x$. Vu (2. 6) cela entraîne

$$\mathbf{M} \subseteqq \bigcap_{x > a} \mathbf{H}_x = \mathbf{H}_a.$$

Donc $\mathbf{M} = \mathbf{H}_a$.

Remarques. 1. D'après la proposition 1. 2 toute contraction unicellulaire T, aux indices de défaut finis et telle que $\sigma(T) = \{1\}$, a sa fonction minimum égale à $u_{a_T}(\lambda)$. Le cas où $\sigma(T) = \alpha_T$, $|\alpha_T| = 1$, peut être réduit à celui-ci en envisageant $\overline{\alpha_T}T$ au lieu de T.

2. Pour toute contraction T dont 1 n'est pas une valeur propre, donc en particulier pour toute contraction complètement non-unitaire, les opérateurs $u_a(T)$ $(0 \leqq a < \infty)$ forment un semi-groupe continu de contractions, notamment le semi-groupe dont la cogénératrice est égale à T; *cf.* [III]. Cette remarque indique la voie par laquelle on pourra lier l'étude des opérateurs dissipatifs unicellulaires à celle des semi-groupes de contractions.

3. Conditions suffisantes pour l'unicellularité

1. Cherchons des conditions pour l'unicellularité de la contraction T qui sont liées de manière plus intime à la fonction caractéristique $\{\mathbf{D}_T, \mathbf{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ où

$$(3.1) \qquad \Theta_T(\lambda) = \left[-T + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n D_{T^*} T^{*n-1} D_T\right] \Big| \mathbf{D}_T; \quad voir \text{ [VIII]}.$$

Dans le cas où $T \in C_{00}$, $\Theta_T(\lambda)$ est une fonction *intérieure des deux côtés.* [7]) Si de plus T a ses indices de défaut finis, ils sont nécessairement égaux au même nombre naturel N et en choisissant dans $\mathbf{D}_T$ et $\mathbf{D}_{T^*}$ deux bases orthonormales, ces espaces se représentent unitairement par le même espace euclidien E^N, formé des vecteurs à N composantes complexes (vecteurs-colonne), et $\Theta_T(\lambda)$ se représente par sa matrice

$$\Theta_T(\lambda) = [\theta_{ij}(\lambda)] \qquad (i, j = 1, \ldots, N);$$ [8])

les fonctions scalaires $\theta_{ij}(\lambda)$ appartiennent à H^∞. Par conséquent

$$d_T(\lambda) = \det \Theta_T(\lambda)$$

appartient aussi à H^∞. De plus, comme la matrice $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire pour presque tous les t, on a $|d_T(e^{it})| = 1$ pp., donc $d_T(\lambda)$ est une fonction scalaire intérieure. En vertu du théorème 5 de [VIII], T appartient à la classe C_0 et on a

$$m_T(\lambda) = d_T(\lambda) \quad \text{si} \quad N = 1, \quad \text{et} \quad m_T(\lambda) = d_T(\lambda)/k(\lambda) \quad \text{si} \quad N > 1,$$

où $k(\lambda)$ est le plus grand diviseur intérieur commun des mineurs d'ordre $N-1$ de la matrice $\Theta_T(\lambda)$. En d'autres termes, $k(\lambda)$ est le plus grand diviseur intérieur commun des éléments de la matrice

$$\Theta_T^A(\lambda) = [\theta_{ij}^A(\lambda)] \qquad (i, j = 1, \ldots, N),$$

algébriquement adjointe à $\Theta_T(\lambda)$. (Notons que tous les mineurs de la matrice $\Theta_T(\lambda)$, donc aussi les fonctions $\theta_{ij}^A(\lambda)$ appartiennent à H^∞.) On a donc

$$\theta_{ij}^A(\lambda) = k(\lambda)\omega_{ij}(\lambda) \qquad (i, j = 1, \ldots, N) \tag{3.2}$$

où les fonctions $\omega_{ij}(\lambda)$ appartiennent à H^∞ et n'ont pas de diviseur intérieur commun non constant. Formons la matrice

$$\Omega_T(\lambda) = [\omega_{ij}(\lambda)] \qquad (i, j = 1, \ldots, N);$$

les relations matricielles suivantes sont vérifiées:

$$\Theta_T(\lambda)\Theta_T^A(\lambda) = \Theta_T^A(\lambda)\Theta_T(\lambda) = d_T(\lambda)I_N, \tag{3.3}$$

$$\Theta_T(\lambda)\Omega_T(\lambda) = \Omega_T(\lambda)\Theta_T(\lambda) = m_T(\lambda)I_N \tag{3.4}$$

où I_N désigne la matrice unité d'ordre N.

Puisque $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire et $|d_T(e^{it})| = 1$, $|m_T(e^{it})| = 1$ pp., (3.3) et (3.4) entraînent que $\Theta_T^A(e^{it})$ et $\Omega_T(e^{it})$ sont aussi unitaires pp., donc les fonctions matricielles $\Theta_T^A(\lambda)$ et $\Omega_T(\lambda)$ sont intérieures des deux côtés.

Nous aurons besoin du suivant

---

[7]) Une fonction $\Theta(\lambda)$, à valeurs opérateurs, analytique et bornée dans le disque unité, est *intérieure* si $\Theta(e^{it})$ est un opérateur isométrique pour presque tous les t. Lorsque $\Theta(\lambda)$ et $\Theta^\sim(\lambda) = \Theta(\bar{\lambda})^*$ sont intérieures toutes les deux, on dira que $\Theta(\lambda)$ est *intérieure des deux côtés*. Cela revient à ce que $\Theta(e^{it})$ est unitaire pour presque tous les t. (Toute fonction intérieure scalaire est intérieure des deux côtés.)

[8]) Il convient et ne causera pas de confusion de désigner l'opérateur et sa matrice par la même lettre.

Lemme 3. *Soit T une contraction dans l'espace* $\mathbf{H}$, *de classe* C_0 *et aux indices de défaut égaux à* N. *Soit* $\mathbf{H}_1$ *un sous-espace non banal de* $\mathbf{H}$, *invariant pour* T. *Dans la triangulation* $T=\begin{bmatrix} T_1 & * \\ O & T_2 \end{bmatrix}$ *correspondant à la décomposition* $\mathbf{H}=\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{H}_2$, *les opérateurs* T_1, T_2 *sont aussi de classe* C_0 *et aux indices de défaut au plus égaux à* N, *de plus on a*

$$d_T(\lambda)=d_{T_2}(\lambda)d_{T_1}(\lambda), \tag{3.5}$$

à un facteur constant près, de module 1.

Démonstration. Au sous-espace invariant non banal $\mathbf{H}_1$ il correspond, d'après [IX], n[os] 3—4, une factorisation de la fonction caractéristique:

$$\Theta_T(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda), \tag{3.6}$$

en des facteurs (matriciels) qui sont aussi fonctions intérieures des deux côtés et telles que les fonctions caractéristiques de T_1 et T_2 coïncident avec les "parties pures" $\Theta_1^0(\lambda)$, $\Theta_2^0(\lambda)$ de $\Theta_1(\lambda)$, $\Theta_2(\lambda)$, selon les cas; *voir* [IX], propositions 4. 3 et 4. 5. Or, on a

$$\Theta_k(\lambda)=\sigma_k\begin{bmatrix}\Theta_k^0(\lambda) & O \\ O & I_{(k)}\end{bmatrix}\sigma_k' \qquad (k=1,2),$$

avec des matrices unitaires constantes σ_k, σ_k' et des matrices unité $I_{(k)}$ de certains ordres n_k où $0\leqq n_k<N$. Il en résulte que, à des facteurs constants près, de module 1,

$$\det\Theta_k(\lambda)=\det\Theta_k^0(\lambda) \qquad (k=1,2),$$

donc en vertu de (3. 6)

$$\det\Theta_T(\lambda)=\det\Theta_2^0(\lambda)\cdot\det\Theta_1^0(\lambda),$$

ce qui prouve (3. 5). Les autres assertions (d'ailleurs connues) découlent de ce que les fonctions caractéristiques (matricielles) $\Theta_k^0(\lambda)$ de T_k $(k=1,2)$ sont de type $(N-n_k)\times(N-n_k)$, et intérieures des deux côtés.

2. Cela étant, nous faisons la

Proposition 3. 1. *Soit T une contraction dans l'espace* $\mathbf{H}$, *de classe* C_0, *aux indices de défaut finis égaux à* N, *et telle que*

$$m_T(\lambda)=\exp\left(a_T\frac{\lambda+\alpha_T}{\lambda-\alpha_T}\right) \quad \text{où} \quad a_T>0,\ |\alpha_T|=1. \tag{3.7}$$

Soit de plus

$$d_T(\lambda)=m_T(\lambda). \tag{3.8}$$

T est alors unicellulaire.

Démonstration. En remplaçant T au besoin par $\bar{\alpha}_T T$, on réduit le problème au cas où

$$m_T(\lambda)=u_{a_T}(\lambda)\equiv\exp\left(a_T\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right).\text{[9]}$$

[9]) On déduit de (3. 1) sans peine que $\Theta_{cT}(\lambda)=c\Theta_T(\bar{c}\lambda)$ si $|c|=1$, d'où $d_{cT}(\lambda)=c^N d_T(\bar{c}\lambda)$. Rappelons que, à cause du choix arbitraire des bases orthonormales dans les espaces de défaut, $d_T(\lambda)$ n'est défini qu'à un facteur constant près, de module 1.

Montrons d'abord que, dans ces hypothèses sur T, (3. 8) entraîne $d_{T_1}(\lambda)=m_{T_1}(\lambda)$ pour toute restriction $T_1=T|\mathbf{H}_1$ à un sous-espace invariant pour T. En effet, en prenant la triangulation correspondante de T comme dans le lemme ci-dessus, on aura $d_T(\lambda)=d_{T_1}(\lambda)d_{T_2}(\lambda)$. D'autre part, $m_T(\lambda)$ est, en vertu du lemme 1, un diviseur de $m_{T_1}(\lambda)m_{T_2}(\lambda)$. Comme $m_{T_1}(\lambda)$ est un diviseur de $d_{T_1}(\lambda)$ et $m_{T_2}(\lambda)$ un diviseur de $d_{T_2}(\lambda)$, l'équation $d_T(\lambda)=m_T(\lambda)$ n'est possible que si $d_{T_1}(\lambda)=m_{T_1}(\lambda)$ et $d_{T_2}(\lambda)=m_{T_2}(\lambda)$.

Cela étant, envisageons deux sous-espaces invariants pour T, non banaux, soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Pour $A=T|\mathbf{A}$ et $B=T|\mathbf{B}$ les fonctions minimum sont des diviseurs de $m_T(\lambda)=u_{a_T}(\lambda)$, donc

$$m_A(\lambda)=u_a(\lambda) \quad \text{et} \quad m_B(\lambda)=u_b(\lambda) \quad \text{avec} \quad 0<a\leqq a_T \quad \text{et} \quad 0<b\leqq a_T;$$

on peut supposer $a\geqq b$. Le sous-espace

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$$

est aussi invariant pour T et la fonction minimum de $C=T|\mathbf{C}$ est le plus petit multiple intérieur commun de $m_A(\lambda)$ et $m_B(\lambda)$; *voir* [VII], n° 7. 3. Donc

$$m_C(\lambda)=u_a(\lambda).$$

Supposons que $\mathbf{A}'=\mathbf{C}\ominus\mathbf{A}\neq\{0\}$. A la décomposition $\mathbf{C}=\mathbf{A}\oplus\mathbf{A}'$ il correspond alors une triangulation $C=\begin{bmatrix} A & * \\ O & A' \end{bmatrix}$ et, en vertu du lemme 3, on a

$$d_C(\lambda)=d_A(\lambda)d_{A'}(\lambda).$$

Or, $d_A(\lambda)=m_A(\lambda)=u_a(\lambda)$ et $d_C(\lambda)=m_C(\lambda)=u_a(\lambda)$, donc $d_{A'}(\lambda)=1$, ce qui est impossible puisqu'on doit avoir $d_{A'}(A')=O$. Ainsi $\mathbf{A}'=\{0\}$, $\mathbf{C}=\mathbf{A}$, et par conséquent $\mathbf{A}\supseteqq\mathbf{B}$.

Cela prouve que T est unicellulaire et achève la démonstration.

3. Dans le cas $N=1$ la condition (3. 8) est toujours vérifiée. Ainsi, les propositions 1. 3 et 3. 1 ont comme corollaire la suivante

Proposition 3. 2. *Soit T une contraction dans l'espace* $\mathbf{H}$ *de dimension infinie, complètement non-unitaire et aux indices de défaut égaux à* 1. *Pour que T soit unicellulaire, il faut et il suffit que son spectre $\sigma(T)$ soit constitué d'un seul point α_T, $|\alpha_T|=1$.*

On sait que deux contractions de classe C_0, ayant les indices de défaut égaux à 1, sont déterminées par leurs fonctions minimum à équivalence unitaire près. Or, il est facile à vérifier que si T_0 a ses indices de défaut 1, 1 et sa fonction minimum est de la forme (3. 7) avec $a_{T_0}=1$ et $\alpha_{T_0}=1$,

$$T=\bar{\alpha}\left(T_0+\frac{1-a}{1+a}I\right)\left(I+\frac{1-a}{1+a}T_0\right)^{-1} \qquad (a>0,\ |\alpha|=1) \tag{3. 9}$$

sera de même type, avec $a_T=a$ et $\alpha_T=\alpha$. En effet, c'est une conséquence de [VIII], n° 2. 3, vu que dans notre cas la fonction caractéristique de T_0 coïncide avec la fonction scalaire $m_{T_0}(\lambda)\equiv u_1(\lambda)$. Cela prouve la proposition suivante:

Proposition 3. 3. *Soit T_0 une contraction unicellulaire dans l'espace* $\mathbf{H}$ *de dimension infinie, aux indices de défaut* 1, 1, *et telle que* $a_{T_0}=\alpha_{T_0}=1$. *Toute contraction unicellulaire T dans* $\mathbf{H}$, *aux indices de défaut* 1, 1, *s'obtient alors, à équivalence unitaire près, par la formule* (3. 9), *avec* $a=a_T$ *et* $\alpha=\alpha_T$.

4. Étude moyennant le modèle fonctionnel

1. Revenons à l'étude d'une contraction T dans $\mathbf{H}$, de classe C_0 et aux indices de défaut égaux à N. Représentons $\mathbf{H}$ et T par leur modèle fonctionnel:

$$\mathbf{H} = H^2(E^N)\ominus \Theta_T H^2(E^N),\qquad T^*u^N = \frac{1}{\lambda}[u^N(\lambda)-u^N(0)],\quad u^N(\lambda)\in H^2(E^N).\tag{4.1}$$ [10]

En vertu de (3. 4) nous avons

$$m_T H^2(E^N) = \Theta_T \Omega_T H^2(E^N) \subseteqq \Theta_T H^2(E^N),$$

donc $\mathbf{H}$ est un sous-espace de l'espace fonctionnel

$$\mathbf{G}^N = H^2(E^N)\ominus m_T H^2(E^N)\tag{4.2}$$

qui, à son tour, est évidemment la somme orthogonale de N répliques de l'espace

$$\mathbf{G} = H^2\ominus m_T H^2.\tag{4.3}$$ [11]

Soient $S=S_T$ et S^N les contractions dans $\mathbf{G}$ et dans $\mathbf{G}^N$, selon les cas, définies par

$$S^*u = \frac{1}{\lambda}[u(\lambda)-u(0)]\quad \text{pour}\quad u\in\mathbf{G}\tag{4.4}$$

et

$$(S^N)^*u^N = \frac{1}{\lambda}[u^N(\lambda)-u^N(0)]\quad \text{pour}\quad u^N\in\mathbf{G}^N.\tag{4.5}$$

On a évidemment

$$S^N = \bigoplus_1^N S,\qquad (S^N)^* = \bigoplus_1^N S^*(=(S^*)^N)\quad \text{et}\quad T^*=(S^N)^*|\mathbf{H}.\tag{4.6}$$

S est une contraction ayant les indices de défaut 1, 1 et sa fonction caractéristique coïncide avec la fonction $m_T(\lambda)$, d'où

$$m_S(\lambda)=m_T(\lambda);\tag{4.7}$$

ces propriétés déterminent S à équivalence unitaire près.

Convenons de la notation

$$\varphi^\sim(\lambda) = \overline{\varphi(\bar\lambda)}\tag{4.8}$$

[10]) Bien entendu, l'indice N dans les notations E^N, u^N, $\mathbf{G}^N$, S^N etc. ne signifiera pas un exposant de puissance.

[11]) $H^2=H^2(E^1)$.

pour les fonctions scalaires, définies dans le disque unité. On a alors $m_{T^*}(\lambda) = m_T^{\sim}(\lambda)$, $m_{S^*}(\lambda) = m_S^{\sim}(\lambda)$, donc (4. 7) entraîne $m_{S^*}(\lambda) = m_{T^*}(\lambda)$. En comparant cette équation à l'équation (4.7), appliquée à T^* au lieu de T, il résulte que $(S_T)^*$ et S_{T^*} ont les mêmes fonctions minimum que T^*. Comme de plus les contractions $(S_T)^*$ et S_{T^*} ont les indices de défaut 1, 1, elles sont unitairement équivalentes, Ainsi, T^* est unitairement équivalente à la restriction de $\bigoplus_1^N S_{T^*}$ à un sous-espace invariant. En appliquant ce résultat à T^* au lieu de T on obtient la suivante:

Proposition 4. 1. *Toute contraction T, de classe C_0, et aux indices de défaut finis égaux à N, est unitairement équivalente à la restriction de $S^N = \bigoplus_1^N S$ à un sous-espace invariant pour S^N, où S est la contraction, de classe C_0 et aux indices de défaut égaux à* 1, *qui a la même fonction minimum que T.* [12])

2. Il résulte aisément de la définition (4. 3) et (4. 4) de $\mathbf{G}$ et S que pour $u, v \in \mathbf{G}$ [13]) et pour $n=0, 1, 2, \ldots$ on a

$$(S^{*n}u, v)_{\mathbf{G}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}[u(e^{it}) - u_0 - e^{it}u_1 - \ldots - e^{i(n-1)t}u_{n-1}]\,\overline{v(e^{it})}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\,\overline{e^{int}v(e^{it})}\,dt = (u, \lambda^n v)_{H^2} = \big(u, P_{\mathbf{G}}(\lambda^n v)\big)_{\mathbf{G}}$$

[12]) D'ailleurs *ce résultat est valable même pour une contraction* $T \in C_0$ *aux indices de défaut égaux à* $N = \aleph_0$. En effet, la relation $m_T(T) = O$ s'exprime, dans le modèle fonctionnel (4. 1), par la relation: $m_T\mathbf{H} \subseteqq \Theta_T H^2(\mathbf{E})$ où $\mathbf{E} = \mathbf{D}_T$; *voir* [VIII], n° 6. Cela entraîne que $m_T H^2(\mathbf{E}) \subseteqq \Theta_T H^2(\mathbf{E})$. Donc, en particulier, on peut associer à tout vecteur $e \in \mathbf{E}$ une fonction $\omega_e(\lambda) \in H^2(\mathbf{E})$ de sorte qu'on ait $m_T(\lambda)e = \Theta_T(\lambda)\omega_e(\lambda)$. Vu que $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire pp,, il en résulte

$$\|\omega_e(e^{it})\| = \|\Theta_T(e^{it})\omega_e(e^{it})\| = \|m_T(e^{it})e\| = \|e\| \quad \text{pp.}$$

De cette manière, en posant $\Omega_T(\lambda)e = \omega_e(\lambda)$ on a défini une fonction analytique contractive *intérieure* $\{\mathbf{E}, \mathbf{E}, \Omega_T(\lambda)\}$ telle que

$$m_T(\lambda)I = \Theta_T(\lambda)\Omega_T(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1).$$

Comme $|m_T(e^{it})| = 1$ et $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire pp., il résulte que $\Omega_T(e^{it})$ est unitaire pp., donc $\Omega_T(\lambda)$ est même intérieure des deux côtés. D'ailleurs comme

$$\Theta_T(e^{it})[m_T(e^{it})I - \Omega_T(e^{it})\Theta_T(e^{it})] = [m_T(e^{it})I - \Theta_T(e^{it})\Omega_T(e^{it})]\,\Theta_T(e^{it}) = 0 \quad \text{pp.}$$

on a aussi $m_T(e^{it})I - \Omega_T(e^{it})\,\Theta_T(e^{it}) = 0$ pp. et par conséquent

$$m_T(\lambda)I = \Omega_T(\lambda)\,\Theta_T(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1).$$

Ainsi, la fonction $\Omega_T(\lambda)$ vérifie les relations (3. 4) qui servissaient de point de départ pour les raisonnements ci-dessus.

[13]) $u(\lambda) = u_0 + \lambda u_1 + \cdots + \lambda^n u_n + \cdots$; $v(\lambda) = v_0 + \lambda v_1 + \cdots + \lambda^n v_n + \cdots$.

où $P_{\mathbf{G}}$ désigne la projection dans H^2 sur $\mathbf{G}$. Cela donne

$$S^n v = P_{\mathbf{G}}(\lambda^n v),$$

d'où on conclut:

$$\varphi(S)v = P_{\mathbf{G}}(\varphi v) \tag{4.9}$$

pour toute fonction scalaire $\varphi(\lambda) \in H^\infty$ et pour tout $v \in \mathbf{G}$.

Écrivons les éléments $u^N \in \mathbf{G}^N$ comme vecteurs-colonne aux composantes $u_i \in \mathbf{G}$ $(i=1, \ldots, N)$. A toute matrice

$$\Phi(\lambda) = [\varphi_{ij}(\lambda)] \qquad (i, j = 1, \ldots, N)$$

dont les éléments sont des fonctions scalaires $\varphi_{ij}(\lambda) \in H^\infty$, et à toute contraction complètement non-unitaire G dans $\mathbf{G}$, on peut associer la transformation

$$u^N \to v^N = \Phi(G)u^N$$

dans $\mathbf{G}^N$, définie par

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}(G)u_j \qquad (i=1, \ldots, N).$$

Il est manifeste que $\Phi(G)$ est une transformation linéaire bornée dans $\mathbf{G}^N$, et que

$$(c\Phi)(G) = c\cdot\Phi(G), \quad (\Phi+\Psi)(G) = \Phi(G)+\Psi(G), \quad (\Phi\Psi)(G) = \Phi(G)\Psi(G),$$

$$\Phi(G)^* = \Phi^{\sim}(G)$$

où

$$\Phi^{\sim}(\lambda) = [\psi_{ij}(\lambda)] \quad \text{avec} \quad \psi_{ij}(\lambda) = \tilde{\varphi_{ji}}(\lambda).$$

Pour $G = S$ il résulte de (4.9):

$$[\Phi(S)u^N]_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}(S)u_j = P_{\mathbf{G}} \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}u_j = P_{\mathbf{G}}[\Phi u^N]_i \qquad (i=1, \ldots, N),$$

d'où

$$\Phi(S)u^N = P_{\mathbf{G}^N}(\Phi u^N) \quad \text{pour tout} \quad u^N \in \mathbf{G}^N. \tag{4.10}$$ [14]

Vu aussi la relation (4.2), (4.10) entraîne que, pour $u^N \in \mathbf{G}^N$, les conditions suivantes (i) et (ii) sont équivalentes:

$$\text{(i)} \quad \Phi(S)u^N = 0, \qquad \text{(ii)} \quad \Phi u^N \in m_T H^2(E^N).$$

En vertu de (4.2), la forme générale des éléments $v^N \in H^2(E^N)$ est la suivante:

$$v^N = w^N + m_T z^N$$

où $w^N \in \mathbf{G}^N$ et $z^N \in H^2(E^N)$. Cela donne

$$\Theta_T v^N = \Theta_T w^N + m_T \Theta_T z^N.$$

[14]) $P_{\mathbf{G}^N}$ désigne la projection orthogonale dans $H^2(E^N)$ sur $\mathbf{G}^N$.

Le terme $m_T\Theta_T z^N$, étant compris dans $m_T H^2(E^N)$, est orthogonal à $\mathbf{G}^N$, donc, eu égard à (4. 10), on a pour tout $u^N \in \mathbf{G}^N$:

$$(u^N, \Theta_T v^N)_{H^2(E^N)} = (u^N, \Theta_T w^N)_{H^2(E^N)} = (u^N, P_{\mathbf{G}^N}(\Theta_T w^N))_{\mathbf{G}^N} = (u^N, \Theta_T(S) w^N)_{\mathbf{G}^N}.$$

On conclut que pour $u^N \in \mathbf{G}^N$ les conditions suivantes (iii) et (iv) sont équivalentes:

$$\text{(iii)} \quad u^N \in H^2(E^N) \ominus \Theta_T H^2(E^N), \qquad \text{(iv)} \quad u^N \in \mathbf{G}^N \ominus \overline{\Theta_T(S)\mathbf{G}^N}.$$

Vu (4. 1) cela prouve la relation

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^N \ominus \overline{\Theta_T(S)\mathbf{G}^N}. \tag{4. 11}$$

On a aussi la relation suivante:

$$\mathbf{H} = \overline{\Omega_T(S)^* \mathbf{G}^N}. \tag{4. 12}$$

En effet, cela résulte des relations

$$\mathbf{G}^N \ominus \mathbf{H} = \Theta_T H^2(E^N) \cap \mathbf{G}^N = \{u^N : u^N \in \mathbf{G}^N, u^N \in \Theta_T H^2(E^N)\} =$$
$$= \{u^N : u^N \in \mathbf{G}^N, \Omega_T u^N \in m_T H^2(E^N)\} = \{u^N : u^N \in \mathbf{G}^N, \Omega_T(S) u^N = 0\} =$$
$$= \mathbf{G}^N \ominus \overline{\Omega_T(S)^* \mathbf{G}^N},$$

où l'on a fait usage de (3. 4), (4. 1), (4. 2) et de ce que $\Omega(e^{it})$ est unitaire pp. et que les conditions (i) et (ii) ci-dessus sont équivalentes.

Puisque $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}^N$, tout élément $u^N \in \mathbf{H}$ s'écrit comme un vecteur $[u_i]_1^N$ dont les composantes u_i appartiennent à $\mathbf{G}$. Donc, en posant

$$R_i u^N = u_i \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

on a défini des transformations, évidemment linéaires et continues, de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$. En vertu de (4. 1) et (4. 4) il est manifeste que

$$R_i T^* = S^* R_i \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{4. 13}$$

et que

$$\mathbf{H}_i = \{u^N : u^N \in \mathbf{H}, R_i u^N = 0\} \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{4. 14}$$

sont des sous-espaces de $\mathbf{H}$, invariants pour T^*.

3. Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent portent sur toute contraction $T \in C_0$ dont les indices de défaut sont égaux à N. Dès maintenant nous faisons l'hypothèse additionnelle que T est *unicellulaire*. Parmi les sous-espaces invariants $\mathbf{H}_i$ que nous venons de construire il y a alors un, soit celui de rang i_*, qui est compris dans tous les autres. Cela veut dire que $R_{i_*} u^N = 0$ entraîne $R_i u^N = 0$ pour tout i, donc

$$R_{i_*} u^N = 0 \quad (u^N \in \mathbf{H}) \quad \text{entraîne} \quad u^N = 0. \tag{4. 15}$$

Posons

$$\overline{R_{i_*} \mathbf{H}} = \mathbf{G}';$$

vu (4. 15) il résulte aussitôt que $\mathbf{G}' \neq \{0\}$. En vertu de (4. 13) $\mathbf{G}'$ est invariant pour S^* et en posant $Z = S^* | \mathbf{G}'$, on a $R_{i_*} T^* = Z R_{i_*}$, d'où il dérive aussi $R_{i_*} \varphi(T^*) = \varphi(Z) R_{i_*}$ pour toute fonction $\varphi(\lambda) \in H^\infty$. Cela donne en particulier $R_{i_*} m_Z(T^*) = m_Z(Z) R_{i_*} = O$;

vu (4. 15) on conclut que $m_Z(T^*)=O$. Par conséquent la fonction $m_{T^*}(\lambda)$ est un diviseur intérieur de $m_Z(\lambda)$. D'autre part, si $\mathbf{G}'\neq\mathbf{G}$, la fonction caractéristique de S^* admet une factorisation non banale $\Theta_{S^*}=\Theta''\Theta'$ où $\Theta_{S^*}=m_{S^*}=m_{T^*}$ et $\Theta'=m_Z$. Ainsi, dans ce cas, $m_Z(\lambda)$ est un diviseur non banal de $m_{T^*}(\lambda)$, ce qui contredit le résultat précédent. Donc on a nécessairement $\mathbf{G}'=\mathbf{G}$, c'est-à-dire

$$\overline{R_{i_*}\mathbf{H}} = \mathbf{G}. \tag{4. 16}$$

En vertu de (4. 15) et (4. 16) l'application linéaire continue R_{i_*} de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$ admet une inverse (au sens large), de domaine dense dans $\mathbf{G}$. Comme (4. 13) subsiste en particulier pour $i=i_*$, il résulte que T^* est une transformée quasi affine de S_T^* et par conséquent S_T est une transformée quasi affine de T; *voir* la définition donnée dans [VII], p. 27.

Comme T^* est aussi unicellulaire, le même résultat s'applique à T^* au lieu de T et fournit que $T=(T^*)^*$ est une transformée quasi affine de $(S_{T^*})^*$, donc aussi de S_T.[15])

Donc chacune des transformations T et S_T est une transformée quasi affine de l'autre, c'est-à-dire qu'elles sont quasi similaires.

Formulons ce résultat:

Proposition 4. 2. *Chaque contraction T de classe C_0, aux indices de défaut finis et unicellulaire, est quasi similaire à la contraction S aux indices de défaut égaux à* 1 *et ayant la même fonction minimum que T.*

Corollaire. *Deux contractions unicellulaires de classe C_0, aux indices de défaut finis et ayant la même fonction minimum, sont quasi similaires.*

Une autre conséquence de (4. 12) et (4. 16) est que les éléments de la forme $R_{i_*}\Omega_T(S)^*u^N$ ($u^N\in\mathbf{G}^N$) sont denses dans $\mathbf{G}$. Cela revient à dire que les éléments de la forme

$$\sum_{j=1}^{N}\omega^{\sim}_{ji_*}(S^*)u_j \qquad (u_j\in\mathbf{G};\, j=1,\dots,N)$$

sont denses dans $\mathbf{G}$. Il s'ensuit que si $p(\lambda)$ est un diviseur intérieur commun des fonctions

$$\omega_{ji_*}(\lambda) \qquad (j=1,\dots,N), \tag{4. 17}$$

$p^{\sim}(S^*)\mathbf{G}$ sera dense dans $\mathbf{G}$ et par conséquent $p(S)=p^{\sim}(S^*)^*$ admettra une inverse (au sens large). Comme

$$\sum_{j=1}^{N}\theta_{i_*j}(\lambda)\omega_{ji_*}(\lambda) = [\Theta_T(\lambda)\Omega_T(\lambda)]_{i_*i_*} = m_T(\lambda),$$

$p(\lambda)$ sera un diviseur aussi de $m_T(\lambda)$, donc on aura $m_T(\lambda)=p(\lambda)q(\lambda)$ avec une fonction $q(\lambda)$ intérieure, ce qui entraîne $p(S)q(S)=m_T(S)=m_S(S)=O$ et, vu que $p(S)^{-1}$ existe, $q(S)=O$. Par conséquent $m_S(\lambda)=m_T(\lambda)$ sera un diviseur de $q(\lambda)$, donc $q(\lambda)=m_T(\lambda)r(\lambda)$ où $r(\lambda)$ est une fonction intérieure. En combinant ces résul-

[15]) En effet, on a déjà observé que S_{T^*} est unitairement équivalente à $(S_T)^*$.

tats on obtient la relation $m_T(\lambda)=p(\lambda)m_T(\lambda)r(\lambda)$, ce qui n'est possible que si $p(\lambda)$ et $q(\lambda)$ sont des constantes (de module 1). Cela prouveque *les fonctions* (4. 17) *n'ont pas de diviseur intérieur commun non constant.*

Nous sommes à même de prouver la suivante réciproque de la proposition 3. 1:

Proposition 4. 3. *Soit T une contraction dans l'espace* $\mathbf{H}$, *de classe* C_0, *aux indices de défaut finis égaux à* N, *et telle que*

$$m_T(\lambda) = \exp\left(a_T \frac{\lambda+\alpha_T}{\lambda-\alpha_T}\right) \quad où \quad a_T>0,\ |\alpha_T| = 1.$$

Lorsque de plus T est unicellulaire, on a $d_T(\lambda)=m_T(\lambda)$.

Démonstration. Il ne restreint pas la généralité de supposer, tout comme dans la démonstration de la proposition 3. 1, que $\alpha_T=1$, donc

(4. 18) $$m_T(\lambda)=u_{a_T}(\lambda).$$

Le cas $N=1$ est banal puisqu'on a alors toujours $d_T(\lambda)=m_T(\lambda)$.

Dans le cas $N=2$ on a

$$\Theta_T(\lambda) = \begin{bmatrix}\theta_{11}(\lambda) & \theta_{12}(\lambda)\\ \theta_{21}(\lambda) & \theta_{22}(\lambda)\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta_T^A(\lambda) = \begin{bmatrix}\theta_{22}(\lambda) & -\theta_{12}(\lambda)\\ -\theta_{21}(\lambda) & \theta_{11}(\lambda)\end{bmatrix},$$

donc le plus grand diviseur intérieur commun $k(\lambda)$ des éléments de la matrice $\Theta_T^A(\lambda)$ est aussi un diviseur des éléments de la matrice $\Theta_T(\lambda)$ et par conséquent on a

(4. 19) $$\Theta_T(\lambda)=\Theta'(\lambda)\cdot k(\lambda)I_2$$

où $\Theta'(\lambda)$ est une fonction matricielle intérieure des deux côtés (éventuellement constante). Supposons que la fonction $k(\lambda)$ n'est pas constante. De la factorisation (4. 19) il s'ensuit, en vertu du théorème 1 de [IX], qu'il existe un sous-espace $\mathbf{H}_1 \neq \{0\}$ de $\mathbf{H}$, invariant pour T et tel que pour $T_1=T|\mathbf{H}_1$ on a $\Theta_{T_1}(\lambda)=k(\lambda)I_2$. Faisant usage du modèle fonctionnel de T_1 on obtient que T_1 est la somme orthogonale de deux répliques de la contraction dont la fonction caractéristique est la fonction scalaire $k(\lambda)$. Cela contredit ce que T est unicellulaire. Donc $k(\lambda)$ doit être constante, de module 1, et par conséquent on a $d_T(\lambda)=m_T(\lambda)$.

Reste à envisager le cas $N\geqq 3$.

Observons d'abord que, en prenant les déterminants, (3. 4) fournit:

$$d_T(\lambda)\cdot\det\,\Omega_T(\lambda)=[m_T(\lambda)]^N,$$

d'où

(4. 20) $$k(\lambda)\cdot\det\,\Omega_T(\lambda)=[m_T(\lambda)]^{N-1}=u_{(N-1)a_T}(\lambda).$$

Or, la fonction $u_a(\lambda)$ a les seuls diviseurs intérieurs $u_b(\lambda)$ $(0\leqq b\leqq a)$, donc (4. 20) entraîne que

$$k(\lambda)=u_b(\lambda) \quad \text{où} \quad 0\leqq b\leqq (N-1)a_T.$$

Supposons que $k(\lambda)$ n'est pas constante (donc $b>0$) *et montrons que cette hypothèse nous conduit à une contradiction.*

Soit $p(\lambda)=u_c(\lambda)$ où $c=\min\{a_T, b\}>0$. Désignons par $\Theta_*(\lambda)$ la matrice qu'on obtient de $\Theta_T(\lambda)$ lorsqu'on écarte sa i_*-ième ligne. Il y a du moins un élément de $\Theta_*(\lambda)$ qui n'est pas divisible par $p(\lambda)$. En effet, au cas contraire, les mineurs d'ordre $N-1$ de $\Theta_*(\lambda)$, c'est-à-dire les fonctions

$$\theta^A_{ji_*}(\lambda) = k(\lambda)\cdot\omega_{ji_*}(\lambda) \qquad (j=1, \ldots, N) \tag{4.21}$$

sont divisibles par $p^{N-1}(\lambda)$, donc, vu que les fonctions (4. 17) n'ont pas de diviseur commun intérieur non constant, $k(\lambda)$ est divisible par $p^{N-1}(\lambda)$. Comme $k(\lambda)$ est un diviseur de $m_T^{N-1}(\lambda)$ [*voir* (4. 20)], il résulte que $p^{N-1}(\lambda)$ est un diviseur de $m_T^{N-1}(\lambda)$ et par conséquent $p(\lambda)$ est un diviseur de $m_T(\lambda)$. Donc $c\leqq a_T$, $c=b$, $p(\lambda)=k(\lambda)$, et par suite $p(\lambda)$ est divisible par $p^{N-1}(\lambda)$, ce qui contredit ce que $N-1\geqq 2$ et que $p(\lambda)$ n'est pas une constante. Cela prouve notre assertion qu'au moins un des éléments $\theta_{ij}(\lambda)$ de la matrice $\Theta_*(\lambda)$ n'est pas divisible par $p(\lambda)$.

D'autre part, les mineurs d'ordre $N-1$ de $\Theta_*(\lambda)$, c'est-à-dire les fonctions (4. 21), sont divisibles par $k(\lambda)$ et par conséquent aussi divisibles par $p(\lambda)$.

Il s'ensuit qu'il existe un nombre entier r, $1<r\leqq N-1$, tel que tous les mineurs d'ordre r de $\Theta_*(\lambda)$ sont des fonctions divisibles par $p(\lambda)$, et qu'il existe un mineur $\delta(\lambda)$ d'ordre $r-1$ qui n'est pas divisible par $p(\lambda)$; $\delta(\lambda)$ est le déterminant d'une matrice $M_r(\lambda)$ formée de $r-1$ lignes et $r-1$ colonnes différentes de la matrice $\Theta_*(\lambda)$:

$$M_r(\lambda) = [\theta_{ij}(\lambda)] \quad \text{où} \quad \begin{array}{ll} i = i_1, \ldots, i_{r-1} & (i_m \neq i_* \text{ pour tout } m), \\ j = j_1, \ldots, j_{r-1}. & \end{array}$$

Fixons un entier i_r, $1\leqq i_r\leqq N$, différent de $i_1, \ldots, i_{r-1}, i_*$; tel entier existe parce que $r\leqq N-1$. Désignons par $M_m(\lambda)$ $(m=1, \ldots, r-1)$ la matrice qu'on obtient de $M_r(\lambda)$ en écartant sa m-ième ligne (provenant de la i_m-ième ligne de $\Theta_T(\lambda)$) et en ajoutant (à la fin) la nouvelle ligne

$$\theta_{i_rj_1}(\lambda), \theta_{i_rj_2}(\lambda), \ldots, \theta_{i_rj_{r-1}}(\lambda).$$

Posons

$$\delta_i(\lambda) = \begin{cases} (-1)^m \det M_m(\lambda) \text{ pour } i = i_m & (m=1, \ldots, r), \\ 0 \text{ pour tout autre } i \text{ (en particulier pour } i=i_*). \end{cases}$$

Nous aurons alors, pour $n=1, \ldots, N$,

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_{in}(\lambda)\delta_i(\lambda) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^m \theta_{i_mn}(\lambda)\cdot\det M_m(\lambda) = \pm\det M^{(n)}(\lambda) \tag{4.22}$$

où $M^{(n)}(\lambda)$ désigne la matrice à r lignes et r colonnes

$$M^{(n)}(\lambda) = [\theta_{ij}(\lambda)], \qquad \begin{array}{l} i = i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, i_r, \\ j = j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, n. \end{array}$$

$p(\lambda)$ est un diviseur de $\det M^{(n)}(\lambda)$ pour tout n. En effet, $\det M^{(n)}(\lambda)$ est un mineur d'ordre r de $\Theta_*(\lambda)$ si n est différent de $j_1, \ldots, j_{r-1}$, et $\det M^{(n)}(\lambda)=0$ dans les autres cas. Les fonctions (4. 22) étant donc divisibles par $p(\lambda)$, les fonctions

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_{in}^{\sim}(\lambda)\delta_i^{\sim}(\lambda) \qquad (n=1, \ldots, N)$$

sont divisibles par $p^{\sim}(\lambda)$. Il s'ensuit que pour tout $v \in \mathbf{G}$ tel que

$$p^{\sim}(S^*)v = 0 \qquad (S = S_T), \tag{4.23}$$

on a

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_{in}^{\sim}(S^*)\delta_i^{\sim}(S^*)v = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N). \tag{4.24}$$

En posant

$$u_i = \delta_i^{\sim}(S^*)v \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

on aura $u^N = [u_i]_1^N \in \mathbf{G}^N$ et (4. 24) s'écrit sous la forme

$$\Theta_T(S)^* u^N = 0. \tag{4.25}$$

(4. 25) et (4. 11) entraînent que $u^N \in \mathbf{H}$. D'autre part, comme on a en particulier $\delta_{i_*}(\lambda) = 0$ et par conséquent $u_{i_*} = 0$, on aura (en vertu du choix de i_*), $u_i = 0$ pour tout i. Ainsi, (4. 23) entraîne $\delta^{\sim}(S^*)v = (-1)^r \delta_{i_r}^{\sim}(S^*)v = (-1)^r u_{i_r} = 0$. En désignant par Z la restriction de S^* au sous-espace $\mathbf{G}_0$ de $\mathbf{G}$ (évidemment invariant pour S^*) des vecteurs v caractérisés par (4. 23), on aura donc

$$\delta^{\sim}(Z) = \delta^{\sim}(S^*) \mid \mathbf{G}_0 = O.$$

D'autre part, il s'ensuit du lemme 2 et de la définition de $\mathbf{G}_0$ par (4. 23), que la fonction minimum de Z est égale à $p^{\sim}(\lambda)$. Donc $p^{\sim}(\lambda)$ est un diviseur de $\delta^{\sim}(\lambda)$. Cela contredit le fait que, par son choix, $\delta(\lambda)$ n'est pas divisible par $p(\lambda)$.

Cette contradiction a résulté de notre hypothèse que la fonction $k(\lambda)$ n'est pas constante. Donc $k(\lambda)$ *est constante*, de module 1, et par conséquent $d_T(\lambda) = m_T(\lambda)$. Cela achève la démonstration de la proposition 4. 3.

4. Observons que, grâce au théorème du maximum, une fonction scalaire intérieure $u(\lambda)$ est constante (de module 1) si $|u(0)| = 1$ et dans ce cas seulement. Par conséquent, si $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont des fonctions scalaires intérieures telles que $a(\lambda)$ est un diviseur de $b(\lambda)$ et que $a(0) \neq 0$, on a $a(\lambda) = b(\lambda)$ (à un facteur constant près, de module 1) si $|a(0)| = |b(0)|$ et dans se cas seulement.

Ainsi, pour une contraction T de type considéré dans la proposition 4. 3, on a $d_T(\lambda) = m_T(\lambda)$ si

$$|d_T(0)| = \exp(-a_T) \tag{4.26}$$

et dans ce cas seulement.

Or, $|d_T(0)|$ se calcule aussi de manière directe. En effet, en vertu de (3. 1) on a $\Theta_T(0) = -T|\mathbf{D}_T$, donc si l'on a choisi dans $\mathbf{D}_T$ et $\mathbf{D}_{T^*}$ les bases orthonormales $\{e_i\}_1^N$ et $\{e_{*i}\}_1^N$, on aura $d_T(0) = \det \mathfrak{T}$ où $\mathfrak{T}$ est la matrice aux éléments

$$t_{ij} = (-Te_j, e_{*i}) \qquad (i, j = 1, \ldots, N),$$

d'où

$$|d_T(0)|^2 = \det \mathfrak{T}^* \cdot \det \mathfrak{T} = \det(\mathfrak{T}^*\mathfrak{T}).$$

Faisant usage de ce que $Te_i \in \mathbf{D}_{T^*}$ on obtient

$$(\mathfrak{T}^*\mathfrak{T})_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \overline{t_{ki}} t_{kj} = \sum_{k=1}^{N} (-Te_j, e_{*k})(e_{*k}, -Te_i) = (-Te_j, -Te_i) = (T^*Te_j, e_i),$$

d'où il résulte que $|d_T(0)|^2$ est égal au déterminant de la matrice de $T^*T|\mathbf{D}_T$ associée à la base $\{e_i\}$ de $\mathbf{D}_T$. Or, pour une transformation linéaire A d'un espace de dimension finie, le déterminant de la matrice de A est le même pour n'importe quel choix de la base (orthonormale ou non). En choisissant pour base, dans notre cas, un système orthonormal de vecteurs propres de T^*T dans $\mathbf{D}_T$, on arrive au résultat

$$|d_T(0)|^2 = \prod_i \tau_i^2 \tag{4.27}$$

où τ_i^2 parcourt les valeurs propres de $T^*T|\mathbf{D}_T$ chacune suivant sa multiplicité. D'ailleurs, comme la partie de T^*T dans le sous-espace complémentaire $\mathbf{H}\ominus\mathbf{D}_T$ est égale à l'opérateur identique, cela revient à dire que τ_i^2 parcourt toutes les valeurs propres de T^*T, chacune suivant sa multiplicité.

En combinant les propositions 3. 1 et 4. 3 avec les remarques que nous venons de faire et avec les formules (4. 26) et (4. 27) nous parvenons à la suivante

Proposition 4. 4. *Soit T de classe C_0, aux indices de défaut finis, et ayant la fonction minimum*

$$\exp\left(a_T \frac{\lambda+\alpha_T}{\lambda-\alpha_T}\right) \qquad (a_T>0,\ |\alpha_T| = 1).$$

Pour que T soit unicellulaire il faut et il suffit que $\exp(-2a_T)$ *soit égal au déterminant de la matrice de $(T^*T)|\mathbf{D}_T$ par rapport à une base quelconque de $\mathbf{D}_T$, ou, ce qui revient au même, qu'on ait*

$$\exp(-2a_T) = \prod_i \tau_i^2$$

où τ_i^2 parcourt les valeurs propres de T^*T, chacune suivant sa multiplicité.

5. Transformations dissipatives

1. Nos résultats peuvent être étendus aussi à d'autres classes de transformations. Nous allons envisager notamment les transformations de l'espace $\mathbf{H}$ (de dimension infinie) de type

$$A = R+iQ, \quad Q\geqq O, \tag{5.1}$$

R et Q étant autoadjointes et bornées.

Vu que $Q\geqq O$, l'ensemble résolvant de A comprend tout le demi-plan inférieur. En effet, on a pour $\lambda = \mu-i\nu$ ($\nu>0$) et pour tout $r>0$

$$A-\lambda I = (R-\mu I+irI)+i(Q+\nu I-rI) = r(B_r+iI)\left\{I-i(B_r+iI)^{-1}\left[I-\frac{1}{r}(Q+\nu I)\right]\right\}$$

où $B_r = \dfrac{1}{r}(R-\mu I)$; notons que $(B_r+iI)^{-1}$ existe au sens strict et est de norme $\leqq 1$ parce que B_r est autoadjointe. Comme $Q\geqq O$, on a $\left\|I-\dfrac{1}{r}(Q+\nu I)\right\|<1$ pour r assez élevés, donc, pour tels r, l'opérateur entre $\{\ \}$ sera de la forme $I-V_r$ avec $\|V_r\|<1$. On conclut que $A-\lambda I$ admet une inverse au sens strict.

Attachons à A la transformation

$$T = -(A-iI)(A+iI)^{-1} \tag{5.2}$$

qui est une contraction. En effet, T est définie partout dans $\mathbf{H}$ et on a pour $f \in \mathbf{H}$ quelconque, en posant $h = (A+iI)^{-1}f$,

$$\|f\|^2 - \|Tf\|^2 = \|(A+iI)h\|^2 - \|(A-iI)h\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\,(Ah, ih) = 4(Qh, h) \geqq 0.$$

De (5.2) on déduit

$$I+T = 2i(A+iI)^{-1}, \quad I-T = 2A(A+iI)^{-1}, \tag{5.3}$$

donc $I+T$ admet l'inverse au sens strict $\frac{1}{2i}(A+iI)$; et on a

$$A = i(I-T)(I+T)^{-1}. \tag{5.4}$$

Tout sous-espace $\mathbf{L}$ de $\mathbf{H}$, qui est invariant pour T, l'est aussi pour A. En effet comme

$$(T+\lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}(-T)^n \qquad (|\lambda| > 1),$$

$\mathbf{L}$ est invariant pour $(T+\lambda I)^{-1}$ lorsque $|\lambda| > 1$, et comme $(T+\lambda I)^{-1}$ tend vers $(T+I)^{-1}$ en norme lorsque $\lambda \to 1$, $\mathbf{L}$ sera invariant aussi pour $(T+I)^{-1}$ et, en vertu de (5.4), pour A.

Supposons, inversement, que $\mathbf{L}$ est un sous-espace invariant pour A. Choisissons un cercle, de centre λ_0 et de rayon r, tel qu'il contienne le demi-disque $\{\lambda: |\lambda| \leqq \|A\|, \mathrm{Im}\,\lambda \geqq 0\}$ dans son intérieur et le point $-i$ dans son extérieur. Le spectre de A étant compris dans ce demi-disque, on aura $r \geqq \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda_0 I)^n\|^{1/n}$ (en vertu du théorème du rayon spectral); par conséquent on aura pour $|\lambda - \lambda_0| > r$:

$$R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} = [(A-\lambda_0 I)-(\lambda-\lambda_0)I]^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^{-n-1}(A-\lambda_0 I)^n,$$

d'où il résulte que $\mathbf{L}$ est invariant aussi pour R_λ. En particulier, $\mathbf{L}$ sera invariant pour $R_{-i} = (A+iI)^{-1}$ et par conséquent, en vertu de (5.2), aussi pour T.

Donc les sous-espaces invariants pour A sont aussi invariants pour T et inversement. Cela entraîne que *A est unicellulaire si T est unicellulaire, et dans ce cas seulement.*

Observons que pour tout $h \in \mathbf{H}$ tel que (Ah, h) est de valeur réelle, on a $Ah = A^*h$. En effet, on a alors $\|Q^{\frac{1}{2}}h\|^2 = (Qh, h) = \mathrm{Im}\,(Ah, h) = 0$, donc $Q^{\frac{1}{2}}h = 0$, $Qh = 0$, $Ah - A^*h = 2i\,Qh = 0$.

Il s'ensuit que pour r réel les équations $Ah = rh$, $A^*h = rh$ ont les mêmes solutions $h \in \mathbf{H}$. Ces solutions forment un sous-espace $\mathbf{N}_r$. Lorsque $\mathbf{N}_r = \{0\}$, $(A-rI)^{-1}$ existe et est de domaine dense dans $\mathbf{H}$. Lorsque $\mathbf{N}_r \neq \{0\}$, $\mathbf{N}_r$ réduit A à une transformation autoadjointe (notamment à la multiplication par r dans $\mathbf{N}_r$). Par conséquent, si A est *complètement non-autoadjointe* (ou *simple,* dans la terminologie de [2], c'est-à-dire que A n'est réduite par aucun sous-espace $\neq \{0\}$ à une transformation autoadjointe), le second cas n'est pas possible.

Finalement, on prouve par un calcul direct les relations

(5. 5) $I-T^*T = J^*QJ, \quad I-TT^* = JQJ^* \quad$ où $\quad J = I+T = 2i(A+iI)^{-1}$.

2. Nous faisons maintenant l'hypothèse additionnelle que Q est de *rang fini.* De (5. 5) il s'ensuit que les indices de défaut de T seront égaux au rang de Q. On désigne la *classe* des transformations A de type (5. 1) avec Q de rang fini par (Ω^+); *cf.* [2].

Proposition 5. 1. *Pour $A \in (\Omega^+)$ unicellulaire le spectre $\sigma(A)$ est constitué d'un seul point r_A de l'axe réel, $(A-r_A I)^{-1}$ existe et est de domaine dense dans* **H**.

En effet, $\sigma(A)$ est, grâce à la relation (5. 4), le transformé de $\sigma(T)$ par l'application

$$\lambda \to i\frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

qui applique le cercle unité sur l'axe réel. Or, comme T est unicellulaire, $\sigma(T)$ est constitué d'un seul point α_T, $|\alpha_T|=1$ $(\alpha_T \neq -1$, *voir* (5. 3)). L'assertion sur $(A-r_A I)^{-1}$ résulte de ce qui précède, vu que toute A unicellulaire est complètement non-autoadjointe.

Si l'on remplace A par $A-r_A I$, le spectre de A se transfère au point 0, on ne sort pas de la classe (Ω^+) et on ne perd pas l'unicellularité. Ainsi, dans le problème de déterminer les transformations unicellulaires de classe (Ω^+), il ne restreint essentiellement pas la généralité de se borner à l'étude de la classe des transformations $A \in (\Omega^+)$ telles que $\sigma(A)=\{0\}$, *classe* qu'on désigne par (Ω_0^+). [16]) De plus il est légitimé de supposer en plus que A n'a pas la valeur propre 0 ou, ce qui revient au même, qu'elle est complètement non-autoadjointe. [17])

Soit donc $A \in (\Omega_0^+)$ et n'ayant pas la valeur propre 0. A admet alors une inverse, de domaine dense, et (5. 2) entraîne

(5. 6) $$T = (A'+I)(A'-I)^{-1} \quad \text{où} \quad A'=(iA)^{-1}.$$

Cela montre que A' est la génératrice infinitésimale d'un semi-groupe continu de contractions, notamment du semi-groupe des contractions

$$T(s) = u_s(T) \quad \text{où} \quad u_s(\lambda) = \exp\left(s\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right), \qquad s \geqq 0;$$

cf. [III], n° II. En vertu du calcul fonctionnel développé dans [VI], n° 6, il est justifié de noter:

$$T(s) = \exp(sA').$$

Comme A est complètement non-autoadjointe, T est complètement non-unitaire, et comme $\sigma(A)=\{0\}$, on a $\sigma(T)=\{1\}$. En vertu de la proposition 1. 3, T est alors

---

[16]) C'est pour cette classe d'opérateurs que Brodsky et Livšitz [2] ont étudié l'unicellularité.

[17]) Nous savons qu'aucune transformation de classe (Ω^+), complètement non-autoadjointe, n'a pas de valeur propre réelle. Inversement, si $A \in (\Omega_0^+)$ et si A a une partie autoadjointe B non banale, on a $\sigma(B) \subseteqq \sigma(A)=\{0\}$, donc 0 est une valeur propre de B et par conséquent aussi de A.

de classe C_0 et sa fonction minimum est de la forme $u_{a_T}(\lambda)$ où $a_T>0$. Cela entraîne que

$$\exp(sA')=O \quad \text{pour} \quad s\geqq a_T \quad \text{et} \quad \exp(sA')\neq O \quad \text{pour} \quad 0\leqq s<a_T.$$

Supposons, inversement, que pour une transformation $A\in(\Omega_0^+)$ n'ayant pas la valeur propre 0, on a $\exp(sA')=O$ pour s assez élevés: soit s_A la plus petite des valeurs du paramètre s ayant cette propriété. On a alors $u_s(T)=O$ pour $s=s_A$, donc $T\in C_0$ et $m_T(\lambda)$ est un diviseur intérieur de $u_{s_A}(\lambda)$. Or cette fonction a les seuls diviseurs intérieurs $u_s(\lambda)$ où $0\leqq s\leqq s_A$, mais on a $\exp(sA')\neq O$ pour $s<s_A$. Il en résulte que $m_T(\lambda)=u_{s_A}(\lambda)$, ce qui veut dire que

$$a_T=s_A.$$

Afin d'adapter la proposition 4. 4 au cas qui nous occupe, écrivons Q sous la forme

$$Qf=\sum_{i=1}^{N}(f,q_i)q_i \tag{5.7}$$

ce qui est possible parce que Q est de rang fini et $Q\geqq O$. En vertu de (5. 5) le sous-espace de défaut $\mathbf{D}_T$ est déterminé par les vecteurs

$$\varphi_i=J^*q_i \quad (i=1,\ldots,N) \quad \text{où} \quad J=2i(A+iI)^{-1} \tag{5.8}$$

et on a

$$T^*T\varphi_k=\varphi_k-J^*QJ\varphi_k=\varphi_k-\sum_{i=1}^{N}(\varphi_k,\varphi_i)\varphi_i.$$

Donc $T^*T|\mathbf{D}_T$ a, par rapport aux vecteurs $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$, la matrice

$$[\delta_{ik}-(\varphi_k,\varphi_i)] \qquad (i,k=1,\ldots,N).$$

Cela étant, il ressort des propositions 3. 2, 3. 3 et 4. 4 la suivante

Proposition 5. 2. *Soit A une transformation dans l'espace* $\mathbf{H}$ *(de dimension infinie), de classe* (Ω_0^+). *Pour que A soit unicellulaire, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

a) $A'=(iA)^{-1}$ *existe, a son domaine dense dans* $\mathbf{H}$, *et est la génératrice infinitésimale d'un semi-groupe continu de contractions* $\exp(sA')$ $(s\geqq 0)$ *tel que* $\exp(sA')=O$ *pour* $s\geqq s_A$ *et* $\exp(sA')\neq O$ *pour* $0\leqq s<s_A$, *où s_A est une valeur finie positive dépendant de A,*

b) $\exp(-2s_A)=\det[\delta_{ik}-(\varphi_k,\varphi_i)]$, *les vecteurs φ_i étant définis par* (5. 7) *et* (5. 8).

Dans le cas où Q est de rang 1, *la condition* a) *est déjà suffisante. De plus le nombre s_A détermine alors A à équivalence unitaire près. Notamment, en fixant une transformation A_1 de la classe envisagée, toutes les autres en dérivent, à équivalence unitaire près, suivant la formule*

$$A=rA_1 \quad \text{où} \quad r=s_A/s_{A_1}>0.$$

3. Envisageons, à titre d'exemple, la transformation

$$f(x) \to A_0 f(x) = i \int_0^x f(t)\,dt \tag{5.9}$$

dans $L^2(0, 1)$. Cette transformation intégrale est de type de Volterra, donc on a $\sigma(A_0) = \{0\}$. Pour $Q = \operatorname{Im} A_0$ on a

$$Qf(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)\,dt,$$

donc $Q \geqq O$ et Q est de rang 1. Ainsi, $A_0 \in (\Omega_0^+)$. Il est aisé de vérifier que $A_0' = (iA)^{-1}$ est la génératrice infinitésimale du semi-groupe des contractions définies par

$$\exp(sA')f(x) = \begin{cases} f(x-s) & \text{pour} \quad x \in [s, \infty] \cap [0, 1], \\ 0 & \text{ailleurs}; \end{cases}$$

donc $s_{A_0} = 1$. En vertu de la proposition 5. 2, A_0 *est unicellulaire* [18]) *et toute autre transformation unicellulaire de classe* (Ω_0^+) *pour laquelle* Q *est de rang* 1, *est unitairement équivalente à un multiple positif de* A_0. [19])

4. Il est manifeste que deux transformations de classe (Ω_0^+) sont quasi similaires si les contractions T correspondantes sont quasi similaires, et inversement. Vu que, dans le cas d'une transformation A de classe (Ω_0^+), unicellulaire, la fonction minimum de T est déterminée par la valeur du paramètre $a_T = s_A$, il résulte du corollaire de la proposition 4. 2:

Proposition 5. 3. *Deux transformations de classe* (Ω_0^+), *unicellulaires et ayant la même valeur* s_A, *sont quasi similaires. En particulier,* A *est quasi similaire à* $s_A \cdot A_0$ *où* A_0 *est la transformation de* $L^2(0, 1)$, *définie par* (5. 9).

De manière analogue, la proposition 4. 1 entraîne la suivante:

Proposition 5. 4. *Toute transformation* $A \in (\Omega_0^+)$ *telle que* $\operatorname{Im} A$ *est de rang* N *et qui n'a pas la valeur propre* 0, *est unitairement équivalente à la restriction de la transformation* $s_A \cdot A_0^N$ *à un sous-espace invariant pour celle-ci;* A_0^N *désigne la somme orthogonale de* N *répliques de la transformation* A_0 *de* $L^2(0, 1)$, *définie par* (5. 9).

La transformation A_0 est de type de Hilbert—Schmidt et il en est de même pour A_0^N ainsi que pour toute restriction de celle-ci à un sous-espace invariant. On obtient donc comme *corollaire* de la proposition 5. 4 que toute transformation $A \in (\Omega_0^+)$ est de type de Hilbert—Schmidt. C'est en fait un cas particulier d'un résultat de SAKHNOVIČ [4] affirmant que si $A = R + iQ$ où Q est de type de Hilbert—Schmidt et $\sigma(A) = \{0\}$, alors A est aussi de type de Hilbert—Schmidt. Toutefois, pour les transformations y envisagées, proposition 5. 4 semble être nouvelle et contient beaucoup plus d'information que celle que nous venons de formuler comme corollaire.

[18]) Fait démontré déjà par BRODSKY et LIVŠITZ [2].
[19]) Fait démontré déjà par ŠMULYAN [3].

Ouvrages cités

[III, V–IX] Béla Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert.
III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26–46.
V. Translations bilatérales, *ibidem*, **23** (1962), 106–129.
VI. Calcul fonctionnel, *ibidem*, **23** (1962), 130–167.
VII. Triangulations canoniques. Fonctions minimum, *ibidem*, **25** (1964), 12–37.
VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *ibidem*, **25** (1964), 38–71.
IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, *ibidem*, **25** (1964), 283–316.

[IX]* B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Corrections et compléments aux Contractions IX, *ibidem*, **26** (1965), 193–196.

[1] М. С. Бродский—И. Ц. Гохберг—М. Г. Крейн—В. И. Мацаев, О некоторых новых исследованиях по теории несамосопряженных операторов, *Труды четвертого математического съезда*, Ленинград, 3—12 июля 1961 г., том II (1964), 261—271.

[2] М. С. Бродский—М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторови промежуточные системы, *Успехи Матем. Наук*, XIII, **1** (**79**) (1958), 3—85.

[3] Ю. Л. Шмульян, Некоторые вопросы теории операторов с конечным рангом неэрмитовости, *Матем. сборник*, нов. сер. **58** (**99**) (1962), 105—136.

[4] Л. А. Сахнович, Исследование „треугольной моделы" несамосопряженных операторов, *Изв. высш. учебн. завед., Математика*, **4** (**11**) (1959), 141—149.

(Reçu le 28 décembre 1964)