Über die Divergenz der Partialsummen von Orthogonalreihen

Von L. CSERNYÁK in Miskolc und L. LEINDLER in Szeged

Einleitung

Sei $\{a_n\}$ eine gegebene Folge von reellen Zahlen und sei $(0=)m_0 < m_1 < \ldots < m_i < \ldots$ eine gegebene Indexfolge. Wir setzen

$$A_i = \{a_{m_{i-1}+1}^2 + \ldots + a_{m_i}^2\}^{1/2} \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

Wir beweisen den folgenden

Satz I. *Ist* $A_n \geqq A_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *und*

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2 \log^2 n = \infty, \tag{1}$$

so kann ein in $[0, 1]$ *orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem* $\{\psi_n(x)\}$ $(|\psi_n(x)| \leqq K;\ n=1, 2, \ldots;\ x \in [0, 1])$ *derart angegeben werden, daß die* m_i*-ten Partialsummen der Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) \tag{2}$$

im Intervall $[0, 1]$ *fast überall divergieren.*

K. Tandori [4] (Satz 3) hat diesen Satz *ohne* die Forderung der gleichmäßigen Beschränktheit bewiesen. Von ihm stammt auch das Problem, ob der Satz auch in der obigen schärferen Form richtig ist?

Bezeichne $N(p_n)$ ein beliebiges Summationsverfahren mit der Eigenschaft, daß die Konvergenz fast überall der p_n-ten Partialsummen notwendig dafür ist, daß jede Orthogonalreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ mit $\sum a_n^2 < \infty$ fast überall $N(p_n)$-summierbar sei. Nach einem Satz von S. Kaczmarz ([1], Satz 5.7.4) ist jedes permanente Toeplitzsche Summationsverfahren ein $N(p_n)$-Summationsverfahren mit irgendeiner Folge $\{p_n\}$.

Offenbar hat Satz I die

Folgerung I. *Sei $\{p_n\}$ die zur $N(p_n)$-Summierbarkeit zugehörige Indexfolge. Ist*

$$A_i^2(p) = \sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} a_n^2 \geqq \sum_{n=p_{i+1}+1}^{p_{i+2}} a_n^2 = A_{i+1}^2(p)$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2(p)\log^2 n = \infty,$$

so kann ein gleichmäßig beschränktes orthonomiertes Funktionensystem $\{\psi_n(x)\}$ in $[0, 1]$ angegeben werden, für welches die Reihe (2) *fast überall nicht $N(p_n)$-summierbar ist.*

Einer der Verfasser [2] hat bewiesen, daß die Behauptungen, die die Existenz eines orthonormierten Funktionensystems mit gewissen Divergenzeigenschaften behaupten, derart verschärft werden können, daß man für die orthonormierten Funktionensysteme mit den betreffenden Divergenzeigenschaften auch Polynomsysteme wählen kann.

Durch Anwendung des folgenden Satzes ([2], Satz II) können wir den Satz I ebenso verschärfen:

Es seien vorgegeben: eine reelle Zahlenfolge $\{s_n\}$, ein im Intervall $[0, 1]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$, eine Folge von meßbaren Teilmengen E_m von $[0, 1]$, eine Indexfolge $\{\nu_m\}$ $(0 = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_m < \ldots)$ und eine positive Zahl ε. Wir nehmen an, daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m) = 1$ ist, und daß es für jedes $x \in E_m$ einen Index $\mu_m(x)$ $(< \nu_{m+1} - \nu_m)$ mit

$$|s_{\nu_m+1}\varphi_{\nu_m+1}(x) + \ldots + s_{\nu_m+\mu_m(x)}\varphi_{\nu_m+\mu_m(x)}(x)| \geqq D(m)$$

gibt, wobei $\{D(m)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge ist.

Dann kann ein in $[0, 1]$ orthonormiertes Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ angegeben werden, derart, daß die Ungleichung

$$|s_{\nu_m+1}P_{\nu_m+1}(x) + \ldots + s_{\nu_m+\mu_m(x)}P_{\nu_m+\mu_m(x)}(x)| \geqq (1-\varepsilon)D(m)$$

für fast alle $x \in [0, 1]$ bei unendlich vielen Werten von m erfüllt wird. Ist das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ in $[0, 1]$ glechmäßig beschränkt, so kann auch das Polynomsystem $\{P_n(x)\}$ gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Mit Zuhilfenahme der Beweisführung des Satzes I, durch Anwendung des zitierten Satzes ergibt sich:

Satz II. *Der Satz I läßt sich so verschärfen, daß das betreffende Orthonormalsystem $\{\psi_n(x)\}$ aus Polynomen besteht.*

§ 1. Hilfssätze

Zum Beweis unseres Satzes benötigen wir die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz I. *Ist* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ *und*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \operatorname{sign} \sin 2^{n+1}\pi x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n r_n(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1);$$

so gilt

$$A\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\right)^{1/2} \leqq \int_0^1 |f(x)|\, dx \leqq B\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\right)^{1/2},$$

wobei A und B positive absolute Konstanten bedeuten.

Siehe z. B. [5] S. 213.

Hilfssatz II. *Sei $\{c_n\}$ eine gegebene Koeffizientenfolge. Bezeichnet $E_{n,m}$ die Menge der Punkte, für die die Ungleichung*

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+m} c_\nu r_\nu(x)\right| > \frac{A}{2}\left\{\sum_{\nu=n}^{n+m} c_\nu^2\right\}^{1/2}$$

erfüllt ist, so sind diese Mengen $E_{n,m}$ für jede n und m einfach[1]) *und es gilt*

$$\mu(E_{n,m}) \geqq \frac{A^2}{4}, \tag{1. 1}$$

wobei A und $r_n(x)$ wie im Hilfssatz I definiert sind.

Beweis. Nach dem Hilfssatz I gilt

$$A\left\{\sum_{\nu=n}^{n+m} c_\nu^2\right\}^{1/2} \leqq \int_0^1 \left|\sum_{\nu=n}^{n+m} c_\nu r_\nu(x)\right| dx = \left(\int_{CE_{n,m}} + \int_{E_{n,m}}\right)\left|\sum_{\nu=n}^{n+m} c_\nu r_\nu(x)\right| dx \leqq {}^{2})$$

$$\leqq \frac{A}{2}\left\{\sum_{\nu=n}^{n+m} c_\nu^2\right\}^{1/2} + \left\{\mu(E_{n,m}) \sum_{\nu=n}^{n+m} c_\nu^2\right\}^{1/2}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung (1. 1). Nach der Definition der Rademacherschen Funktionen ist klar, daß die Mengen $E_{n,m}$ einfach sind.

Damit ist der Beweis fertig.

Hilfssatz III. *Sei $\{c_n\}$ eine positive, monoton nichtzunehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = \infty$$

erfüllt. Dann kann eine Indexfolge $N_0 < N_1 < \ldots < N_m < \ldots$ ($N_0 = 0$, $N_1 > 4$), ein im Intervall [0, 1] *orthonormiertes und gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{g_n(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen G_m ($\subseteqq [0, 1]$) angegeben werden, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

---

[1]) Eine Punktmenge nennen wir einfach, wenn sie die Vereinigungsmenge endlich vieler Intervalle ist. Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

[2]) CH bezeichnet die Komplementärmenge der Menge H in bezug auf das Intervall [0, 1].

a) *zu jedem* $x \in G_m$ *gibt es eine natürliche Zahl* $n_m(x)$ $(< N_{m+1} - N_m)$, *für die Funktionswerte* $g_{N_m}(x), \ldots, g_{N_m+n_m(x)}(x)$ *gleiches Verzeichen haben und*

$$\left| \sum_{i=N_m}^{N_m+n_m(x)} c_i g_i(x) \right| > D > 0$$

mit einer von m *und* x *unabhängigen positiven Zahl* D *gilt,*

b) *es gilt*

(1. 2) $$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(G_m) = \infty.$$

Dies folgt aus dem Hilfssatz II von K. Tandori [3] (s. den Beweis des Hilfssatzes III in [3]).

§ 2. Beweis des Satzes I

Nach der Bedingung (1) des Satzes I kann der Hilfssatz III für die Folge $\{A_n\}$ angewandt werden; die entsprechenden Funktionen, Mengen und Indexfolge bezeichnen wir mit $g_n(x)$, G_m und $\{N_m\}$;

$$|g_n(x)| \leqq K \quad (n=0, 1, \ldots), \quad G_m \subseteqq [0, 1] \quad (m=0, 1, \ldots).$$

Sei r eine feste nicht-negative ganze Zahl und wir setzen

$$\mu_r = \max_{N_r \leqq i < N_{r+1}} (m_i - m_{i-1}) \qquad (m_{-1} = 0).$$

Wir teilen das Interwall [0, 1] in $Q_r = 2^{\mu_r + [2^4 A^{-2}]}$ [3]) Teilintervalle gleicher Länge $I_q = [u_q, v_q]$ $(1 \leqq q \leqq Q_r)$ ein. Sei $N_r \leqq i < N_{r+1}$ und

$$g_{i_q}(x) = \begin{cases} g_i\left(\dfrac{x-u_q}{v_q-u_q}\right) & \text{für} \quad u_q < x < v_q, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

(2. 1) $$\int_{I_q} g_{l_q}(x) g_{k_q}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \neq k, \\ 1/Q_r & \text{für} \quad l = k. \end{cases}$$

Mit Rücksicht darauf, daß für jedes n und x $(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2})$ $r_n(\frac{1}{2}-x) = -r_n(\frac{1}{2}+x)$ gilt, folgt aus dem Hilfssatz II, daß die Gesamtlänge der Teilintervalle I_q, auf den die Ungleichung

(2. 2) $$\sum_{n=m_{i-1}+1}^{m_i} a_n r_{n-m_{i-1}}(x) > \frac{A}{2} \left\{ \sum_{n=m_{i-1}+1}^{m_i} a_n^2 \right\}^{1/2}$$

gilt, für jedes $i = N_r, \ldots, N_{r+1}-1$ größer als $2^{-3}A^2$ ist. Also ist die Zahl der Teilintervalle I_q, auf den die Ungleichung (2. 2) gilt, größer als $Q_r 2^{-3} A^2 - 1 = p_r$. Sei i $(N_r \leqq i < N_{r+1})$ eine feste natürliche Zahl. Zu jedem Intervall I_q mit $q < p_r$, auf

[3]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

dem (2. 2) nicht erfüllt ist, nehmen wir ein Intervall $I_{q'}$ mit $q' > p_r$; auf dem (2. 2) erfüllt ist, und zwar so, daß verschiedenen I_q verschiedene $I_{q'}$ zugeordnet werden. Wir vertauschen die Werte der Funktionen $r_j(x)$ $(j=1, \ldots, m_i - m_{i-1})$ auf den einander zugeordneten Intervallen I_q, $I_{q'}$. Die so erhaltenen Funktionen bezeichnen wir mit $r_{ij}(x)$ $(j=1, 2, \ldots, m_i - m_{i-1})$. Diese Umordnung machen wir für jedes i $(N_r \leqq i < N_{r+1})$. Nach den obigen besteht für jedes $x \in I_q$ $(q \leqq p_r)$

$$\sum_{n=m_{i-1}+1}^{m_i} a_n r_{i,n-m_{i-1}}(x) > \frac{A}{2} \left\{ \sum_{n=m_{i-1}+1}^{m_i} a_n^2 \right\}^{1/2}. \tag{2. 3}$$

Wir setzen

$$\gamma_{m_{i-1}+j}(x) = \sum_{q=1}^{Q_r} r_{ij}(x) g_{iq}(x) \qquad (N_r \leqq i < N_{r+1};\ j=1, \ldots, m_i - m_{i-1}).$$

Mit einer einfachen Rechnung können wir einsehen, daß das so definierte System $\gamma_k(x)$ $(m_{N_r-1} < k \leqq m_{N_{r+1}-1},\ m_{-1}=0)$ orthonormiert ist. Sei $l = m_{i-1}+j$. Nach (2.1) gilt

$$\int_0^1 \gamma_l^2(x)\,dx = \sum_{q=1}^{Q_r} \int_{I_q} r_{ij}^2(x) g_{iq}^2(x)\,dx = \sum_{q=1}^{Q_r} \int_{I_q} g_{iq}^2(x)\,dx = Q_r \frac{1}{Q_r} = 1,$$

d.h. diese Funktionen sind normiert.

Ist $l_1 \neq l_2$ und $l_1 = m_{i_1-1} + j_1$, $l_2 = m_{i_2-1} + j_2$, so ist entweder $i_1 \neq i_2$, oder $i_1 = i_2$ und $j_1 \neq j_2$. Da die Funktionen $r_{ij}(x)$ $(i = N_r, \ldots, N_{r+1}-1;\ j=1, \ldots, m_i - m_{i-1})$ in allen Intervallen I_q $(q=1, \ldots, Q_r)$ konstant sind, folgt aus (2. 1) für $i_1 \neq i_2$

$$\int_0^1 \gamma_{l_1}(x)\gamma_{l_2}(x)\,dx = \sum_{q=1}^{Q_r} \int_{I_q} r_{i_1 j_1}(x) r_{i_2 j_2}(x) g_{i_1 q}(x) g_{i_2 q}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q_r} \pm \int_{I_q} g_{i_1 q}(x) g_{i_2 q}(x)\,dx = 0,$$

weiterhin für $i_1 = i_2 = i$, $j_1 \neq j_2$

$$\int_0^1 \gamma_{l_1}(x)\gamma_{l_2}(x)\,dx = \sum_{q=1}^{Q_r} \int_{I_q} r_{ij_1}(x) r_{ij_2}(x) g_{iq}^2(x)\,dx = \sum_{q=1}^{Q_r} \operatorname*{sign}_{x \in I_q} r_{ij_1}(x) r_{ij_2}(x) \frac{1}{Q_r} =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q_r} \int_{I_q} r_{ij_1}(x) r_{ij_2}(x)\,dx = \int_0^1 r_{j_1}(x) r_{j_2}(x)\,dx = 0.$$

Also ist das System auch orthogonal.

Sei

$$\bar{G}_r = \sum_{q=1}^{p_r} G_r(I_q),$$

wobei $E(I)$ das mit der linearen Transformation $x=(v-u)y+u$ erhaltene Bild in $I=[u, v]$ der Menge $E(\subseteq[0, 1])$ bedeutet. Es ist klar, daß die Menge $\bar{G}_r$ einfach ist, und daß

$$\mu(\bar{G}_r) = \sum_{q=1}^{p_r} \mu(G_r(I_q)) = \sum_{q=1}^{p_r} \frac{1}{Q_r} \mu(G_r)$$

gilt. Nach der Definition von p_r folgt hieraus

$$\mu(\bar{G}_r) \geqq 2^{-4} A^2 \mu(G_r). \tag{2. 4}$$

Auf Grund der Definition von $\gamma_k(x)$ folgt, daß $|\gamma_k(x)| \leqq K$. Ist endlich $x \in \bar{G}_r$, d.h. ist $x \in G_r(I_{q_0})$ mit einem $q_0(<p_r)$, so gilt nach (2.2) und nach dem Hilfssatz III (da $g_{N_r}(x), \ldots, g_{N_r+n_r(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben) die Ungleichung

$$\left|\sum_{i=N_r}^{N_r+n_r(x)} \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} a_k \gamma_k(x)\right| = \left|\sum_{i=N_r}^{N_r+n_r(x)} \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} a_k r_{i,k-m_{i-1}}(x) g_{iq_0}(x)\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=N_r}^{N_r+n_r(x)} g_{iq_0}(x) \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} a_k r_{i,k-m_{i-1}}(x)\right| \geqq \left|\sum_{i=N_r}^{N_r+n_r(x)} g_{iq_0}(x) \frac{A}{2} A_i\right| \geqq \frac{AD}{2}. \tag{2. 5}$$

Nach dem obigen können wir leicht ein Funktionensystem $\{\psi_n(x)\}$ mit $|\psi_n(x)| \leqq K$, und eine Folge von einfachen Mengen H_k definieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) für jedes $x \in H_k$ gilt

$$\left|\sum_{i=N_k}^{N_k+n_k(x)} \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} a_l \psi_l(x)\right| \geqq \frac{AD}{2}, \tag{2. 6}$$

b) die Mengen H_k $(k=0, 1, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(H_k) = \infty.$$

Sei $\psi_k(x)=\gamma_k(x)$ für $k=1, \ldots, m_{N_1-1}$ und $H_0=\bar{G}_0$. Nach der Definition und nach (2. 5) ist es klar, daß die Behauptung a) für $k=0$ erfüllt ist.

Sei nun $\nu(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\psi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, m_{N_\nu-1})$ und die Mengen H_l $(l=1, \ldots, \nu)$ schon definiert sind; die $\psi_k(x)$ bilden im Intervall $[0, 1]$ ein orthonormiertes System, es gilt $|\psi_k(x)| \leqq K$, ferner ist die Bedingung a) für $k=0, \ldots, \nu$ erfüllt; die Mengen H_l $(l \leqq \nu)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\sum_{l=1}^{\nu} \mu(H_l) = \sum_{l=1}^{\nu} \mu(\bar{G}_l). \tag{2. 7}$$

Dann kann man das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1, \ldots, R)$ zerlegen, derart, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\psi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots$ $\ldots, m_{N_\nu-1})$ konstant sind. Wir bezeichnen mit I_ϱ^1 und I_ϱ^2 die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ ($\varrho=1, 2, \dots, R$) und wir setzen

$$\psi_k(x) = \sum_{\varrho=1}^{R} \left(\gamma_k(I_\varrho^1; x) - \gamma_k(I_\varrho^2; x)\right)^{4)}$$

für $k = m_{N_\nu}, \dots, m_{N_{\nu+1}-1}$ und

$$H_{\nu+1} = \bigcup_{\varrho=1}^{R} \left(\bar{G}_{\nu+1}(I_\varrho^1) \cup \bar{G}_{\nu+1}(I_\varrho^2)\right).$$

Auf Grund dieser Definition ist es klar, daß die Funktionen $\psi_k(x)$ ($k=1, \dots, m_{N_{\nu+1}-1}$) in [0, 1] ein orthonormiertes System bilden, weiterhin

$$\mu(H_{\nu+1}) = \mu(\bar{G}_{\nu+1}), \tag{2. 8}$$

und die Mengen $H_1, \dots, H_{\nu+1}$ stochastisch unabhängig sind. Nach (2. 8) ist klar, daß (2. 7) für $\nu+1$ erfüllt ist.

Ist $x \in H_{\nu+1}$, d.h. $x \in G_{\nu+1}(I_{\varrho_0}^i)$ für ein ϱ_0 und für $i=1$ oder 2, so besteht nach (2. 5)

$$\left| \sum_{i=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}+n_{\nu+1}(x)} \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} a_k \psi_k(x) \right| = \left| \sum_{i=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}+n_{\nu+1}(x)} \sum_{k=N\nu+1}^{m_i} a_k \gamma_k(I_{\varrho_0}^i; x) \right| \geqq \frac{AD}{2}.$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir also ein im Intervall [0, 1] orthonormiertes Funktionensystem $\{\psi_k(x)\}$ ($k=0, 1, \dots$) und Mengen H_k ($k=1, \dots$), derart, daß die Behauptungen a) und b) erfüllt sind; nach (1. 2), (2. 4) und (2. 7) ist nämlich $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k)$ unendlich.

Auf Grund des Borel—Cantellischen Lemmas ergibt sich aus der Behauptung b):

$$\mu(\overline{\lim_{k\to\infty}} H_k) = 1,$$

d.h. $x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} H_k$ für fast alle x. Für $x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} H_k$ gilt aber die Ungleichung (2. 6) für unendlich viele k.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] S. Kaczmarz—H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935).
[2] L. Leindler, Über die orthogonalen Polynomsysteme, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 19—46.
[3] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.
[4] K. Tandori, Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publ. Math.*, **8** (1961), 291—307.
[5] A. Zygmund, *Trigonometric series*. I (Cambridge, 1959).

(Eingegangen am 19. Juni 1965)

---

[4]) Ist $I=[u, v]$ ein beliebiges Intervall, so definieren wir:

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung zu meiner Arbeit: „Über Konvergenz- und Summationseigenschaften von Haarschen Reihen"*)

Von L. LEINDLER in Szeged

Herr Professor P. L. ULJANOV hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß mein Beweis für Satz I in der genannten Arbeit lückenhaft ist. Nämlich ist die folgende Behauptung auf S. 21 falsch: „Man kann leicht einsehen, daß das System $\{2^{-[\log k]/2}\chi_k(x)\chi_l(x)\}$ mit $l\in I(k,\infty)$ in $(0,1)$ orthonormiert ist." Es erübrigt sich, meinen Beweis zu vervollständigen, da für einen allgemeineren Satz ein Beweis vorliegt, s. P. L. ULJANOV, О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами, *Изв. Ан. СССР*, **28** (1964), 925—950.

*) *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 19—30.