

Über Halbgruppen, die ihre Ideale reproduzieren

Von G. SZÁSZ in Nyíregyháza (Ungarn)

1. Einleitung

Bekanntlich nennt man eine Teilmenge I einer Halbgruppe H ein *Ideal* von H , falls $HI \subseteq I$ und $IH \subseteq I$ sind. Es ist nicht schwer solche Beispiele zu finden, wo das echte Enthaltensein $HI \subset I$ besteht. Man betrachte z.B. in der Halbgruppe

	a	b	c
a	b	b	a
b	b	b	b
c	b	b	c

das durch a erzeugte Hauptideal, welches wir (auch im folgenden) mit (a) bezeichnen; man kann leicht feststellen, daß dem Ideal (a) die Elemente a, b , aber dem Komplexenprodukt $H \cdot (a)$ nur b gehört.

Wir sagen, daß das Ideal I der Halbgruppe H durch H von links (bzw. von rechts) reproduziert wird, falls $HI = I$ (bzw. $IH = I$) ist; wenn beide Gleichungen bestehen, so sagen wir einfach, daß I durch H reproduziert wird. In dieser Arbeit werden wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß jedes Ideal einer Halbgruppe von einer oder von beiden Seiten durch die Halbgruppe reproduziert wird.

2. Vorbemerkungen

Man sieht sofort, daß es genügt, das Problem nur für Hauptideale zu untersuchen. Sind nämlich jedes Hauptideal der Halbgruppe H von links durch H reproduziert, so ergibt sich

$$HI = H \bigcup_{a \in I} (a) = \bigcup_{a \in I} H \cdot (a) = \bigcup_{a \in I} (a) = I$$

für jedes Ideal I von H .

Es sei vorausgesetzt, daß die Halbgruppe H die genannte Eigenschaft besitzt. Dann gilt, insbesondere, $HH = H$, da H ein Ideal von sich selbst ist. Das bedeutet, daß in einer solchen Halbgruppen jedes Element zerlegbar ist, d.h. jedes $h \in H$ in der Form $h = xy$ ($x, y \in H$) dargestellt werden kann. Die Zerlegbarkeit aller Elemente ist also eine triviale notwendige Bedingung, die aber im allgemeinen keine hinreichende ist (s. das oben gegebene Beispiel). Für gewisse Klassen der Halbgruppen kann dieselbe Bedingung auch hinreichend sein (Korollar zu Satz 1).

Andererseits ist offensichtlich *hinreichend*, daß jedes Element ein linksseitiges relatives Einselement besitze. Dabei nennt man e ein linksseitiges relatives Einselement von h , wenn $eh=h$ ist. Wir werden sehen, daß diese Bedingung im allgemeinen nicht, für gewisse wichtige Klassen der Halbgruppen aber auch notwendig ist (Beispiel in § 5, bzw. Satz 2, Korollar 2 zu Satz 3 und Korollar zu Satz 5).

3. Zwei Spezialfälle

Zuerst untersuchen wir das Problem bezüglich zweier speziellen Klassen der Halbgruppen.

Satz 1. *Ist in einer kommutativen Halbgruppe H jedes Element zerlegbar, dann wird jedes Primideal von H durch H reproduziert.*

Korollar. *Ist in einer kommutativen Halbgruppe jedes Element zerlegbar und jedes Ideal prim, dann wird jedes Ideal durch die Halbgruppe reproduziert.*

Vor dem Beweis bemerken wir, daß die Voraussetzungen des Satzes sicher (und die Konklusion trivialerweise) erfüllt sind, wenn H eine Gruppe ist.

Beweis. Man betrachte ein Primideal I von H und ein beliebiges Element i aus I . Ist jedes Element von H zerlegbar, so findet sich ein Elementepaar x, y in H , so daß $i=xy$ ist. Aus $xy \in I$ folgt aber, daß entweder x oder y dem Ideal I gehört; wegen der Kommutativität von H dürfen wir $y \in I$ annehmen. Dann gilt aber

$$i = xy \in HI,$$

woraus $I \subseteq HI$ folgt. Andererseits ist $I \supseteq HI$.

In [2] haben wir eine Halbgruppe H *idealgeordnet* genannt, falls aus $a \in (b)$ und $b \in (a)$ ($a, b \in H$) immer $a=b$ folgt. Für solche Halbgruppen gilt

Satz 2. *In einer idealgeordneten Halbgruppe H werden alle Ideale von links (dann und) nur dann durch H reproduziert, wenn jedes Element von H ein linksseitiges relatives Einselement hat.*

Beweis. Nach den Vorbemerkungen genügt zu zeigen, daß ein Hauptideal (a) einer idealgeordneten Halbgruppe H von links nur dann durch H reproduziert wird, wenn es ein $q (\in H)$ mit $a=qa$ gibt.

Es sei H eine solche Halbgruppe und a ein beliebiges Element von H . Aus $(a) = H \cdot (a)$ folgt, daß sich das Element a als ein Produkt

$$(1) \quad a = qb \quad (q \in H, b \in (a))$$

darstellen läßt. Daraus ergibt sich

$$(2) \quad a \in (b).$$

Da H idealgeordnet ist, erhält man nach (1) und (2), daß $a=b$ ist. Das bedeutet, wieder nach (1), daß $a=qa$ ist, was zu beweisen war.

4. Notwendige und hinreichende Bedingung

Es sei H eine beliebige Halbgruppe und 1 ein Symbol, das kein Element von H bedeutet. Die Vereinigungsmenge $H \cup 1$ bildet, bezüglich der Verknüpfungsdefinition (s. [1], Seite 4)

$$1 \cdot 1 = 1, \quad h \cdot 1 = 1 \cdot h = h \quad (h \in H)$$

eine Erweiterungshalbgruppe von H . Auf Grund dieser Konstruktion definiert man H^1 wie folgt:

$$H^1 = \begin{cases} H, & \text{falls } H \text{ ein Einselement hat;} \\ H \cup 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieses Begriffes können wir den Hauptresultat der vorliegenden Arbeit folgendermaßen formulieren:

Satz 3. *Alle Ideale einer Halbgruppe H werden durch H dann und nur dann von links reproduziert, wenn jedes Element a von H im Komplexenprodukt HaH^1 enthalten ist.*

Korollar 1. *Alle Ideale einer Halbgruppe H werden durch H dann und nur dann reproduziert, wenn jedes Element a von H in HaH enthalten ist.*

Korollar 2. *Alle Ideale einer kommutativen Halbgruppe H werden durch H dann und nur dann reproduziert, wenn jedes Element von H ein relatives Einselement hat.*

Beweis. Aus den trivialen Gleichungen $HH^1 = H^1H = H$ folgt, daß jeder der Komplexe HaH^1 , H^1aH , HaH ein Ideal von H bildet. Eben darum stimmt HaH^1 , H^1aH , bzw. HaH mit (a) überein, falls das Element a im entsprechenden Komplex enthalten ist. Daraus ergibt sich, daß das Enthaltensein $a \in HaH^1$ ($a \in H$) mit der Gleichung $(a) = HaH^1$ gleichbedeutend ist, und dasselbe auch für die Komplexe H^1aH und HaH gilt. Auf Grund dieser Bemerkung kann man den Satz folgendermaßen beweisen:

Bekanntlich ist $(a) = H^1aH^1$, woraus sich

$$H(a) = H(H^1aH^1) = (HH^1)aH^1 = HaH^1$$

ergibt. Deshalb gilt $(a) = H(a)$ genau dann, wenn $(a) = HaH^1$, d.h. $a \in HaH^1$ ist. Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Schreibt man im Satz 3 statt „links“ das Wort „rechts“, so soll er „ HaH^1 “ durch den Ausdruck „ H^1aH “ ersetzen. Um Korollar 1 zu beweisen, haben wir deshalb zu zeigen, daß die beiden Relationen $a \in HaH^1$ und $a \in H^1aH$ mit der einzigen $a \in HaH$ gleichbedeutend sind.

Aus $a \in HaH$ folgen $a \in HaH^1$ und $a \in H^1aH$, denn $HaH^1, H^1aH \supset HaH$.

Andererseits setze man $a \in HaH^1$ und $a \in H^1aH$ voraus. Dann ist $(a) = HaH^1 = H^1aH$, woraus sich

$$(a) = HaH^1 = HH^1aH^1 = H(H^1aH) = HaH,$$

d.h. $a \in HaH$ ergibt.

Nunmehr betrachten wir eine kommutative Halbgruppe H . Nach der letzten Vorbemerkung in § 2 haben wir nur die Notwendigkeit der Bedingung im Korollar 2 zu beweisen. Dementsprechend setzen wir voraus, daß H alle ihre Ideale reproduziert. Nach Korollar 1 ist dann jedes $a \in H$ in HaH enthalten, woraus

$$a = xay = (xy)a \quad (x, y \in H)$$

folgt; d. h. ist xy ein relatives Einselement von a . Damit ist auch Korollar 2 bewiesen.

Wir wollen den Satz für einige speziellen Klassen der Halbgruppen anwenden. Man nennt eine Halbgruppe H

regulär, wenn $a = axa$

linksregulär, wenn $a = xa^2$

rechtsregulär, wenn $a = a^2x$

intraregulär, wenn $a = xa^2y$

für jedes $a \in H$ mit geeigneten $x, y \in H$ gilt ([1], Seite 121). Aus diesen Definitionen folgt, daß in einer regulären Halbgruppe H ebenso $a \in Ha$, wie $a \in aH$, in einer links- oder rechtsregulären, bzw. intraregulären Halbgruppe H aber $a \in HaH$ für jedes $a \in H$ gilt. Für reguläre Halbgruppen ergibt sich also unmittelbar aus der Definition, für die übrigen drei Halbgruppenklassen aber nach Satz 3 die Behauptung des folgenden Satzes:

Satz 4. *Jedes Ideal einer regulären (oder linksregulären, rechtsregulären, bzw. intraregulären) Halbgruppe wird durch die Halbgruppe reproduziert.*

5. Der Fall endlicher Halbgruppen

Für endliche Halbgruppen erhalten wir dieselbe notwendige und hinreichende Bedingung wie für die kommutativen. Es gilt nämlich

Satz 5. *Ist jedes Element h einer endlichen Halbgruppe H in HhH^1 enthalten, so hat jedes Element ein linksseitiges relatives Einselement.*

Korollar. *Alle Ideale einer endlichen Halbgruppe H werden durch H (dann und) nur dann von links reproduziert, wenn jedes Element von H ein linksseitiges relatives Einselement hat.*

Beweis. Man betrachte eine Halbgruppe H , in der $h \in HhH^1$ für jedes $h \in H$ gilt, und setze voraus, daß es ein $a \in H$ gibt, welches kein linksseitiges relatives Einselement hat. Wegen $a \in HaH^1$ läßt sich dann a in der Form

$$(7) \quad a = c_1 a d_1 \quad (c_1, d_1 \in H)$$

darstellen, wobei $c_1 a \neq a$ ist. Auch das Element $c_1 a$ hat kein linksseitiges relatives Einselement: wäre nämlich e ein solches, so ergäbe sich nach (7)

$$ea = (e(c_1 a)) d_1 = (c_1 a) d_1 = a,$$

d.h. wäre e auch bezüglich a ein linksseitiges relatives Einselement. Jedoch ist, nach den Voraussetzungen, c_1a in $H(c_1a)H^1$ enthalten, so daß Elemente c_2, d_2 in H existieren sollen, mit denen c_1a in der Form

$$c_1a = c_2(c_1a)d_2 \quad (c_2, d_2 \in H)$$

entsteht; gleichzeitig sind c_2c_1a, c_1a und a paarweise verschieden.

Durch die gleiche Überlegung kann man eine unendliche Folge

$$a, c_1a, c_2c_1a, \dots, c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 a, \dots$$

paarweise verschiedener Elemente von H bekommen. Damit haben wir erhalten, daß eine solche Halbgruppe unendlich sein soll; folglich ist die Behauptung des Satzes richtig. Das Korollar läßt sich daraus nach Satz 3 unmittelbar schließen.

Wir haben noch zu untersuchen, ob es Halbgruppen gibt, die ihre Ideale von links reproduzieren, aber Elemente ohne linksseitige relative Einselemente besitzen. Wir zeigen, daß jede rechtsreguläre, aber nicht intrareguläre Halbgruppe eine solche ist. Es gilt nämlich der

Satz 6. *Hat jedes Element einer rechtsregulären Halbgruppe ein linksseitiges relatives Einselement, so ist die Halbgruppe auch intraregulär.*

Korollar. *Jede endlich rechts- oder linksreguläre Halbgruppe ist auch intraregulär.*

Beweis. Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so gibt es zu jedem Element a der Halbgruppe Elemente x und y , so daß

$$xa = a \quad \text{und} \quad a = a^2y$$

ist. Daraus ergibt sich aber

$$a = a^2y = xa^2y,$$

womit der Satz schon bewiesen ist.

Schließlich folgt das Korollar aus den Sätzen 4, 3, 5 und 6; übrigens kann man dieses Korollar durch den Gedankengang des Beweises zu Satz 5 auch unmittelbar gewinnen.

Literatur

- [1] A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, Bd. I (Providence, 1961).
 [2] G. SZÁSZ, Über eine Quasiordnung in Halbgruppen, *Publicationes Mathematicae, Debrecen* (zu erscheinen).

(Eingegangen am 22. November 1965)