Об операторах с ядерными мнимыми компонентами

М. С. БРОДСКИЙ (Одесса, СССР)

Пусть A — вполне непрерывный линейный оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots$ отличные от нуля собственные числа оператора $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, занумерованные в порядке убывания, и через n_j—кратность числа ω_j. Члены последовательности

$$s_j = s_j(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r_A; \quad r_A \leqq \infty)$$

где

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{n_1} = \omega_1, \quad s_{n_1+1} = s_{n_1+2} = \ldots = s_{n_1+n_2} = \omega_2, \ldots$$

называются *сингулярными* числами оператора A. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ и $\sum_{j=1}^{r_A} s_j(A) < \infty$, то оператор A называется *ядерным*. Класс всех ядерных операторов будем обозначать буквой $\mathfrak{S}$. Для оператора $A \in \mathfrak{S}$ и произвольного ортонормированного базиса $\{e_\alpha\}$ ряд $\sum_\alpha (Ae_\alpha, e_\alpha)$ абсолютно сходится [1]. Его сумма, которая не зависит от выбора базиса, называется следом оператора A и обозначается символом $\operatorname{sp} A$. Будем говорить, что линейный ограниченный оператор A принадлежит классу $\mathfrak{S}_I$, если его мнимая компонента $A_I = \dfrac{A - A^*}{2i}$ ядерна, и классу $\mathfrak{S}_I^+$, если, кроме того, $A_I \geqq O$.

В первой части настоящей статьи устанавливается формула, связывающая следы мнимых компонент операторов, индуцируемых оператором $A \in \mathfrak{S}_I$ в инвариантных относительно A подпространствах. Существование таких подпространств вытекает из более общих результатов Л. А. Сахновича [2] и В. И. Мацаева [3]. Во второй части вышеупомянутая формула используется для доказательства некоторых теорем об инвариантных подпространствах операторов класса $\mathfrak{S}_I^+$.

В дальнейшем понадобятся следующие теоремы.

1. *Если A — вполне непрерывный линейный оператор, действующий из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$, то существуют такие ортонормированные последовательности $\{\varphi_j\}_1^{r_A} \subset \mathfrak{H}$ и $\{\psi_j\}_1^{r_A} \subset \mathfrak{G}$, что*

$$Ah = \sum_{j=1}^{r_A} (h, \varphi_j) s_j(A) \psi_j \qquad (h \in \mathfrak{H}). \tag{1}$$

2. *Если* $A_1 \in \mathfrak{S}$ *и* $A_2 \in \mathfrak{S}$, *то* $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in \mathfrak{S}$, *где* α_1 *и* α_2 — *произвольные комплексные числа.*

3. *Если* $A \in \mathfrak{S}$ *и* B — *линейный ограниченный оператор, то* $AB \in \mathfrak{S}$ *и* $BA \in \mathfrak{S}$.

4. *Если* $A \in \mathfrak{S}$, *то* $A^* \in \mathfrak{S}$.

5. *Пусть* $A \in \mathfrak{S}$ *и* $P_1, P_2, \ldots$ — *последовательность ортопроекторов, которая слабо (следовательно, и сильно) сходится к ортопроектору* P_0. *Тогда*

$$\mathrm{sp}(P_0 A P_0) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{sp}(P_m A P_m). \tag{2}$$

Доказательства утверждений 1—4. приведены в [1]. Формула (2) следует из (1), ибо

$$\mathrm{sp}(P_m A P_m) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (P_m A P_m e_\alpha, e_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_A} (P_m e_\alpha, \varphi_j) s_j(A) (P_m \psi_j, e_\alpha) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r_A} (P_m \psi_j, P_m \varphi_j) s_j(A) = \sum_{j=1}^{r_A} (P_m \psi_j, \varphi_j) s_j(A) \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

и, следовательно,

$$|\mathrm{sp}(P_0 A P_0) - \mathrm{sp}(P_m A P_m)| \leqq \sum_{j=1}^{r_A} |((P_0 - P_m)\psi_j, \varphi_j)| s_j(A) \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{N} |((P_0 - P_m)\psi_j, \varphi_j)| s_j(A) + \sum_{j=N+1}^{r_A} s_j(A).$$

Мы можем теперь сделать как угодно малым сначала второе слагаемое, выбирая N достаточно большим, а затем первое — за счет выбора m.

1. Пусть $\mathfrak{H}_m$ $(m \in \mathfrak{M})$ — некоторое множество подпространств в $\mathfrak{H}$. Символом $\tilde{\bigcup}_{m \in \mathfrak{M}} \mathfrak{H}_m$ условимся обозначать наименьшее подпространство, содержащее все $\mathfrak{H}_m$. В случае, когда $\mathfrak{M} = \{1, 2\}$, будем писать также $\mathfrak{H}_1 \tilde{\cup} \mathfrak{H}_2$.

Теорема 1. *Если* A — *ядерный оператор и* $\mathfrak{H}^{(1)}, \mathfrak{H}^{(2)}$ — *его инвариантные подпространства, то*

$$\mathrm{sp}\, A^{(1)} + \mathrm{sp}\, A^{(2)} = \mathrm{sp}\, A^{\cup} + \mathrm{sp}\, A^{\cap}, \tag{3}$$

где $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{\cup}, A^{\cap}$ *индуцированы оператором* A *соответственно в* $\mathfrak{H}^{(1)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{\cup} = \mathfrak{H}^{(1)} \tilde{\cup} \mathfrak{H}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{\cap} = \mathfrak{H}^{(1)} \cap \mathfrak{H}^{(2)}$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathfrak{H}^{\cap} = 0$. Обозначим через P_2 и P_3 ортопроекторы на $\mathfrak{H}^{(2)}$ и $\mathfrak{H}^{(3)} = \mathfrak{H}^{\cup} \ominus \mathfrak{H}^{(2)}$, действующие в $\mathfrak{H}^{\cup}$, и зададим в $\mathfrak{H}^{(3)}$ оператор $A^{(3)} h = P_3 A^{\cup} h$ $(h \in \mathfrak{H}^{(3)})$. Так как

$$A^{\cup} = P_2 A^{\cup} P_2 + P_3 A^{\cup} P_3 + P_2 A^{\cup} P_3 = A^{(2)} P_2 + A^{(3)} P_3 + P_2 A^{\cup} P_3$$

и, значит, $P_3 A^{\cup} = A^{(3)} P_3$, то $T A^{(1)} = A^{(3)} T$, где T — оператор ортогонального проектирования из $\mathfrak{H}^{(1)}$ на $\mathfrak{H}^{(3)}$. Полагая $B = T A^{(1)}$ и применяя формулу (1), найдем ортонормированные последовательности $\{\varphi_j\}_1^{r_B}$ и $\{\psi_j\}_1^{r_B}$, принадлежащие соответственно подпространствам $\mathfrak{H}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}^{(3)}$, для которых

$$Bh = \sum_{j=1}^{r_B} (h, \varphi_j) s_j(B) \psi_j \qquad (h \in \mathfrak{H}^{(1)}).$$

Следовательно,

$$s_j(B)\,(A^{(1)}\varphi_j, \varphi_j) = \left(\sum_{k=1}^{r_B} (A^{(1)}\varphi_j, \varphi_k) s_k(B)\psi_k, \psi_j\right) = (BA^{(1)}\varphi_j, \psi_j) =$$

$$= (A^{(3)}TA^{(1)}\varphi_j, \psi_j) = (A^{(3)}B\varphi_j, \psi_j) = s_j(B)\,(A^{(3)}\psi_j, \psi_j),$$

и поэтому

(4) $$(A^{(1)}\varphi_j, \varphi_j) = (A^{(3)}\psi_j, \psi_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r_B).$$

Поскольку из равенств $(f, \varphi_j) = 0$ $(f \in \mathfrak{H}^{(1)}, j = 1, 2, \ldots, r_B)$ следует, что $A^{(1)}f = 0$, и, аналогично, из $(g, \psi_j) = 0$ $(g \in \mathfrak{H}^{(3)}, j = 1, 2, \ldots, r_B)$ следует $A^{(3)*}g = 0$, то

(5) $$\operatorname{sp} A^{(1)} = \sum_{j=1}^{r_B} (A^{(1)}\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{r_B} (A^{(3)}\psi_j, \psi_j) = \operatorname{sp} A^{(3)}.$$

Сопоставляя (5) с равенством $\operatorname{sp} A^{\cup} = \operatorname{sp} A^{(2)} + \operatorname{sp} A^{(3)}$, которое вытекает непосредственно из определения следа оператора, получим соотношение

(6) $$\operatorname{sp} A^{(1)} + \operatorname{sp} A^{(2)} = \operatorname{sp} A^{\cup}.$$

Переходя к общему случаю, обозначим через $P^{(0)}$ ортопроектор на $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathfrak{H}^{\cup} \ominus \mathfrak{H}^{\cap}$, действующий в $\mathfrak{H}^{\cup}$, и зададим в $\mathfrak{H}^{(0)}$ оператор $A^{(0)}h = P^{(0)}A^{\cup}h$ $(h \in \mathfrak{H}^{(0)})$. Подпространства $\mathfrak{H}^{(01)} = \mathfrak{H}^{(1)} \ominus \mathfrak{H}^{\cap}$ и $\mathfrak{H}^{(02)} = \mathfrak{H}^{(2)} \ominus \mathfrak{H}^{\cap}$ инвариантны относительно $A^{(0)}$. Через $A^{(01)}$ и $A^{(02)}$ обозначим операторы, индуцированные оператором $A^{(0)}$ соответственно в $\mathfrak{H}^{(01)}$ и $\mathfrak{H}^{(02)}$. В силу уже доказанной части теоремы

(7) $$\operatorname{sp} A^{(01)} + \operatorname{sp} A^{(02)} = \operatorname{sp} A^{(0)}.$$

Кроме того, очевидно,

(8) $$\operatorname{sp} A^{(1)} + \operatorname{sp} A^{(2)} = 2 \operatorname{sp} A^{\cap} + \operatorname{sp} A^{(01)} + \operatorname{sp} A^{(02)},$$

(9) $$\operatorname{sp} A^{\cup} = \operatorname{sp} A^{\cap} + \operatorname{sp} A^{(0)}.$$

Из (7), (8) и (9) следует (3). Теорема доказана.

Легко видеть, что при условиях теоремы 1

(10) $$\operatorname{sp} A_I^{(1)} + \operatorname{sp} A_I^{(2)} = \operatorname{sp} A_I^{\cup} + \operatorname{sp} A_I^{\cap}.$$

Можно ли утверждать, что формула (10) верна и для произвольных операторов класса $\mathfrak{S}_I$? Мы можем ответить на этот вопрос утвердительно лишь при ограничениях, сформулированных ниже в теоремах 2 и 4.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}^{(2)}$ — инвариантные подпространства оператора $A \in \mathfrak{S}_I$. Если хотя бы один из операторов $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ вполне непрерывен, то имеет место формула* (10).

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, и пользуясь введенными там обозначениями, получим для случая $\mathfrak{H}^{(1)} \cap \mathfrak{H}^{(2)} = 0$ следующие равенства:

$$\operatorname{sp} A_I^{(1)} = \sum_{j=1}^{\text{гв}} (A_I^{(1)} \varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\text{гв}} (A_I^{(3)} \psi_j, \psi_j) = \operatorname{sp} A_I^{(3)},$$

$$\operatorname{sp} A_I^{\cup} = \operatorname{sp} A_I^{(2)} + \operatorname{sp} A_I^{(3)}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{sp} A_I^{(1)} + \operatorname{sp} A_I^{(2)} = \operatorname{sp} A_I^{\cup}. \tag{11}$$

Если же $\mathfrak{H}^{(1)} \cap \mathfrak{H}^{(2)} \neq 0$, то (10) вытекает из соотношений

$$\operatorname{sp} A_I^{(01)} + \operatorname{sp} A_I^{(02)} = \operatorname{sp} A_I^{(0)}, \qquad \operatorname{sp} A_I^{(1)} + \operatorname{sp} A_I^{(2)} = 2 \operatorname{sp} A_I^{\cap} + \operatorname{sp} A_I^{(01)} + \operatorname{sp} A_I^{(02)},$$

$$\operatorname{sp} A_I^{\cup} = \operatorname{sp} A_I^{\cap} + \operatorname{sp} A_I^{(0)}.$$

Формула (11) была получена впервые Г. Э. Кисилевским, предполагавшим, что A — вполне непрерывный оператор класса $\mathfrak{S}_I^+$, спектр которого сосредоточен в нуле.

Заметим, что если $\mathfrak{H}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}^{(2)}$ — произвольные подпространства в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}_k$ $(\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2 \subset \ldots)$, то равенство $\mathfrak{H}^{(1)} \cap \mathfrak{H}^{(2)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{H}_k \cap \mathfrak{H}^{(2)})$, вообще говоря, не верно. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть оператор A имеет инвариантные подпространства $\mathfrak{H}^{(1)}, \mathfrak{H}^{(2)}, \mathfrak{H}_k$ $(\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2 \subset \ldots)$, причем $\mathfrak{H}^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}_k$. Если $A \in \mathfrak{S}$, то*

$$\operatorname{sp} A^{\cap} = \lim_{k \to \infty} \operatorname{sp} A_k^{\cap}, \tag{12}$$

где $A^{\cap}$ и $A_k^{\cap}$ индуцированы оператором A соответственно в $\mathfrak{H}^{\cap} = \mathfrak{H}^{(1)} \cap \mathfrak{H}^{(2)}$ и $\mathfrak{H}_k^{\cap} = \mathfrak{H}_k \cap \mathfrak{H}^{(2)}$. Если же $A \in \mathfrak{S}_I$ и все операторы A_k, индуцированные в подпространствах $\mathfrak{H}_k$, вполне непрерывны, то

$$\operatorname{sp} A_I^{\cap} = \lim_{k \to \infty} \operatorname{sp} A_{kI}^{\cap}. \tag{13}$$

Доказательство. Применяя в случае $A \in \mathfrak{S}$ теорему 1 к подпространствам $\mathfrak{H}^{\cap}$ и $\mathfrak{H}_k$, придем к равенству

$$\operatorname{sp} A^{\cap} + \operatorname{sp} A_k = \operatorname{sp} B_k + \operatorname{sp} A_k^{\cap} \tag{14}$$

где B_k — оператор, индуцированный в $\mathfrak{H}^{\cap} \tilde{\cup} \mathfrak{H}_k$. Переходя в (14) к пределу и учитывая, что по формуле (2)

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{sp} A_k = \lim_{k \to \infty} \operatorname{sp} B_k = \operatorname{sp} A^{(1)},$$

получим (12). Равенство (13) следует аналогично из теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{H}^{(1)}$ *и* $\mathfrak{H}^{(2)}$ *— инвариантные подпространства оператора* $A\in\mathfrak{S}_I$. *Если* $\mathfrak{H}^{(1)}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathfrak{H}_k$ $(\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}_2\subset\ldots)$, *причем все подпространства* $\mathfrak{H}_k$ *инвариантны относительно* A *и операторы* A_k, *индуцированные в* $\mathfrak{H}_k$, *вполне непрерывны, то имеет место формула* (10).

Доказательство. В силу теоремы 2

$$\operatorname{sp} A_{kI}+\operatorname{sp} A_I^{(2)}=\operatorname{sp} A_{kI}^{\cup}+\operatorname{sp} A_{kI}^{\cap}, \tag{15}$$

где $A_k^{\cup}$ и $A_k^{\cap}$ индуцированы соответственно в подпространствах $\mathfrak{H}_k\tilde{\cup}\,\mathfrak{H}^{(2)}$ и $\mathfrak{H}_k\cap\mathfrak{H}^{(2)}$. Остается, пользуясь формулой (13) и соотношениями

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{sp} A_{kI}=\operatorname{sp} A_I^{(1)},\qquad \lim_{k\to\infty}\operatorname{sp} A_{kI}^{\cup}=\operatorname{sp} A_I^{\cup},$$

вытекающими из (2), перейти в (15) к пределу.

2. Рассмотрим класс Ω всех линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и имеющих вполне непрерывные мнимые компоненты. Невещественный спектр оператора $A\in\Omega$ представляет собой последовательность $\lambda_j\,(j=1,2,\ldots)$, предельные точки которой могут лежать лишь на вещественной оси; корневые подпространства, соответствующие точкам λ_j, конечномерны [4]. Пусть λ_j — положительно ориентированные окружности достаточно малых радиусов, центры которых расположены в точках λ_j, и

$$P_n=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}(A-\lambda E)^{-1}\,d\lambda\qquad(n=1,2,\ldots). \tag{16}$$

Тогда, согласно известной теореме Ф. Рисса [5], $P_n^2=P_n$ и подпространства $\mathfrak{H}_n^{(1)}=P_n\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_n^{(2)}=(E-P_n)\mathfrak{H}$ инвариантны относительно A. При этом $\mathfrak{H}_n^{(1)}$ представляет собой линейную оболочку корневых подпространства, соответствующих точкам $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, и имеют место соотношения

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_n^{(1)}\dot{+}\mathfrak{H}_n^{(2)},\qquad \mathfrak{H}_1^{(1)}\subset\mathfrak{H}_2^{(1)}\subset\ldots,\ \mathfrak{H}_1^{(2)}\supset\mathfrak{H}_2^{(2)}\supset\ldots$$

Подпространства

$$\mathfrak{H}^{(n)}=\mathfrak{H}^{(1)}(A)=\tilde{\bigcup_{n=1}^{\infty}}\mathfrak{H}_n^{(1)},\qquad \mathfrak{H}^{(2)}=\mathfrak{H}^{(2)}(A)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{H}_n^{(2)},$$

очевидно, инвариантны относительно A.

Лемма 1. *Если* $\mathfrak{H}_0$ *— инвариантное подпространство оператора* $A\in\Omega$ *и индуцированный в* $\mathfrak{H}_0$ *оператор* A_0 *имеет чисто вещественный спектр, то* $\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{H}^{(2)}(A)$.

Доказательство. Пользуясь формулой (16) и замечая, что функция

$$(A-\lambda E)^{-1}h_0=(A_0-\lambda E)^{-1}h_0\qquad(h_0\in\mathfrak{H}_0)$$

голоморфна в невещественных точках, получим равенства $P_nh_0=0$ $(n=1,2,\ldots)$. Следовательно, $\mathfrak{H}_0$ принадлежит всем подпространствам $\mathfrak{H}_n^{(2)}$.

Лемма 2. *Пусть $A \in \Omega$ и $\mathfrak{H}_0$ — инвариантное подпространство оператора A^*. Если оператор A_0^*, индуцированный оператором A^* в $\mathfrak{H}_0$, имеет чисто вещественный спектр, то $\mathfrak{H}_0 \perp \mathfrak{H}^{(1)}(A)$.*

Доказательство. Так как функция

$$((A-\lambda E)^{-1}h, h_0) = (h, (A_0^*-\bar{\lambda}E)^{-1}h_0) \qquad (h \in \mathfrak{H}, \quad h_0 \in \mathfrak{H}_0)$$

голоморфна во всех невещественных точках, то

$$(P_n h, h_0) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}((A-\lambda E)^{-1}h, h_0)\,d\lambda = 0$$

и, значит, $\mathfrak{H}_0 \perp \mathfrak{H}_n^{(1)}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Из леммы 1 и 2 легко следует, что $\mathfrak{H}^{(2)}(A) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{(1)}(A^*)$.

Теорема 5. *Если A — оператор класса $\mathfrak{S}_I^+$, действующий в пространстве $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}^{(1)}(A) \cap \mathfrak{H}^{(2)}(A) = 0$ и $\mathfrak{H}^{(1)}(A) \tilde{\cup} \mathfrak{H}^{(2)}(A) = \mathfrak{H}$. Подпространство $\mathfrak{H}^{(2)}(A)$ является единственным инвариантным, удовлетворяющим указанным выше условиям.*

Доказательство. Пусть снова $\lambda_j (j=1, 2, \ldots)$ — последовательность всех невещественных точек спектра оператора A, γ_j — достаточно малые положительно ориентированные окружности с центрами в точках λ_j,

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}(A-\lambda E)^{-1}\,d\lambda, \quad \mathfrak{H}_n^{(1)} = P_n \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}_n^{(2)} = (E-P_n)\mathfrak{H}.$$

Положим $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathfrak{H}^{(1)}(A) \cap \mathfrak{H}^{(2)}(A)$ и обозначим через $A^{(0)}$ оператор, индуцированный в $\mathfrak{H}^{(0)}$. Так как $\mathfrak{H}^{(0)} \subset \mathfrak{H}_n^{(2)}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_n^{(1)} \dotplus \mathfrak{H}_n^{(2)}$, то $\mathfrak{H}^{(0)} \cap \mathfrak{H}_n^{(1)} = 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Из теоремы 3 следует, что $\operatorname{sp} A_I^{(0)} = 0$. Поскольку $A_I > 0$, то $Ah_0 = A^*h_0$ $(h_0 \in \mathfrak{H}^{(0)})$, $\mathfrak{H}^{(0)}$ инвариантно относительно A^*, $A^{(0)}$ имеет чисто вещественный спектр и, согласно лемме 2, $\mathfrak{H}^{(0)} \perp \mathfrak{H}^{(1)}(A)$. Этим доказано, что $\mathfrak{H}^{(1)}(A) \cap \mathfrak{H}^{(2)}(A) = 0$.

В силу теоремы 4

$$\operatorname{sp} A_I = \operatorname{sp} A_{nI}^{(1)} + \operatorname{sp} A_{nI}^{(2)}, \tag{17}$$

$$\operatorname{sp} A_I^{\cup} = \operatorname{sp} A_I^{(1)} + \operatorname{sp} A_I^{(2)}, \tag{18}$$

где $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{\cup}$ индуцированы соответственно в $\mathfrak{H}_n^{(1)}, \mathfrak{H}_n^{(2)}, \mathfrak{H}^{(1)}(A)$, $\mathfrak{H}^{(2)}(A)$ и $\mathfrak{H}^{\cup} = \mathfrak{H}^{(1)}(A) \tilde{\cup} \mathfrak{H}^{(2)}(A)$. Переходя к пределу в (17) и сравнивая результат с (18), получим равенство $\operatorname{sp} A_I = \operatorname{sp} A_I^{\cup}$, которое означает, что $Ah = A^*h$ для каждого вектора $h \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{\cup}$. Ввиду леммы 1 $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{\cup} \subset \mathfrak{H}^{(2)}(A)$, так что $\mathfrak{H}^{(1)}(A) \tilde{\cup} \mathfrak{H}^{2}(A) = \mathfrak{H}$.

Предположим теперь, что некоторое инвариантное относительно A подпространство $\mathfrak{H}^{(2')}$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{H}^{(1)}(A) \cap \mathfrak{H}^{(2')} = 0$, $\mathfrak{H}^{(1)}(A) \tilde{\cup} \mathfrak{H}^{(2')} = \mathfrak{H}$. Тогда оператор $A^{(2')}$, индуцированный в $\mathfrak{H}^{(2')}$, имеет чисто вещественных спектр и, следовательно, $\mathfrak{H}^{(2')} \subset \mathfrak{H}^{(2)}(A)$. Кроме того,

$$\operatorname{sp} A_I = \operatorname{sp} A_I^{(1)} + \operatorname{sp} A_I^{(2)} = \operatorname{sp} A_I^{(1)} + \operatorname{sp} A_I^{(2')},$$

откуда вытекает, что к подпространству $\mathfrak{H}^{(2)}(A)\ominus\mathfrak{H}^{(2')}$ можно применить лемму 2. Таким образом, $\mathfrak{H}^{(2)}(A)\ominus\mathfrak{H}^{(2')}$ ортогонально к $\mathfrak{H}^{(1)}(A)$ и, значит, $\mathfrak{H}^{(2')}=\mathfrak{H}^{(2)}(A)$.

При помощи теории характеристических функций несамосопряженных операторов близкие к теореме 5 результаты были получены одновременно с автором и независимо от него Ю. П. Гинзбургом. Теорему 5 можно вывести также из некоторых теорем Б. С.-Надя и Ч. Фойяша [6], если потребовать дополнительно, чтобы мнимая компонента оператора A была конечномерной, а характеристическая функция соответствующего оператору A сжатия — внутренней.

Пользуясь теоремой 5 и леммой 1, придем к следующему выводу.

Каждое инвариантное подпространство оператора $A\in\mathfrak{S}_I^+$ есть замыкание линейной оболочки его пересечений с $\mathfrak{H}^{(1)}(A)$ и $\mathfrak{H}^{(2)}(A)$.

Отметим существенность требования диссипативности (т. е. положительности мнимой компоненты) в теореме 5. Пусть $e_0, e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность чисел, для которой $\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|<\infty$ $(I_m\lambda_j\neq 0,\ \lambda_j\neq\lambda_k\ (j\neq k))$. Тогда оператор A, определяемый равенствами

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
Ae_0 &= \lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots\\
Ae_1 &= \lambda_1 e_1\\
Ae_2 &= \lambda_2 e_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

является ядерным, причем замыкание $\mathfrak{H}^{(1)}(A)$ линейной оболочки всех его корневых подпространств, отвечающих невещественным собственным числам, есть ортогональное дополнение к e_0. Вместе с тем не существует, как легко проверить, ненулевого инвариантного подпространства $\mathfrak{H}^{(2)}$, удовлетворяющего условию $\mathfrak{H}^{(1)}(A)\cap\mathfrak{H}^{(2)}=0$. Возможно, однако, что теорема 5 останется в силе, если мы, сохранив диссипативность, заменим условие ядерности другим, менее ограничительным. Пример, аналогичный вышеуказанному, приведен в диссертации И. С. Иохвидова [7].

Теорема 6. *Пусть $A\in\mathfrak{S}_I^+$ и $\mathfrak{H}_0$ — инвариантное подпространство оператора A, принадлежащее $\mathfrak{H}^{(1)}(A)$. Тогда*

$$
(20)\qquad \mathfrak{H}_0=\tilde{\bigcup_{k=1}^{\infty}}(\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{G}_k),
$$

где $\mathfrak{G}_k$ $(k=1,2,\ldots)$ — все корневые подпространства оператора A, соответствующие невещественным точкам спектра.

Доказательство. Обозначим через A_0 и A_0' операторы, индуцированные соответственно в подпространствах $\mathfrak{H}_0$ и $\tilde{\bigcup}_{k=1}^{\infty}(\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{G}_k)$. Так как, очевидно,

$$
\tilde{\bigcup_{k=1}^{\infty}}(\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{G}_k)=\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{H}_n^{(1)}\qquad\left(\mathfrak{H}_n^{(1)}=\tilde{\bigcup_{k=1}^{\infty}}\mathfrak{G}_k\right),
$$

то

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{G}_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{H}_k^{(1)})$$

и, согласно формулам (2) и (13),

$$\operatorname{sp}A'_{0I}=\lim_{k\to\infty}\operatorname{sp}A'_{kI}=\operatorname{sp}A_{0I},$$

где через A'_k обозначен оператор, индуцированный в $\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{H}_k^{(1)}$. Таким образом, подпространство $\mathfrak{H}_0\ominus\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathfrak{H}_0\cap\mathfrak{G}_k)$ удовлетворяет условию леммы 2 и, значит, ортогонально к $\mathfrak{H}^{(1)}(A)$. Учитывая, что оно вместе с тем принадлежит $\mathfrak{H}^{(1)}(A)$, приходим к формуле (20).

Заметим, что и в теореме 6 нельзя обойтись без требования диссипативности. В самом деле, для оператора, сопряженного с (19), будем иметь

$$\begin{aligned}
&A^*e_0=0\\
&A^*(e_0+e_1)=\bar\lambda_1(e_0+e_1)\\
&A^*(e_0+e_2)=\bar\lambda_2(e_0+e_2)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Здесь корневые подпространства $\mathfrak{G}_k$, соответствующие невещественным собственным числам, одномерны и натянуты на векторы e_0+e_k $(k=1, 2, \ldots)$. При этом $\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathfrak{G}_k$ есть все пространство $\mathfrak{H}$, а одномерное подпространство $\mathfrak{H}_0$, натянутое на вектор e_0, не удовлетворяет соотношению (20).

Оператор A, действующий в пространстве $\mathfrak{H}$, называется *вполне несамосопряженным*, если $\mathfrak{H}$ нельзя так представить в виде ортогональной суммы двух нетривиальных инвариантных относительно A подпространств, чтобы оператор, индуцированный в одном из них, был самосопряженным. Для любого оператора A пространство $\mathfrak{H}$ однозначно представимо в виде ортогональной суммы подпространств $\mathfrak{H}_0(A)$ и $\mathfrak{H}^{\perp}(A)$, удовлетворяющих следуюшим условиям: 1. $\mathfrak{H}_0(A)$ и $\mathfrak{H}^{\perp}(A)$ инвариантны относительно A, 2. в $\mathfrak{H}_0(A)$ индуцируется вполне несамосопряженный, а в $\mathfrak{H}^{\perp}(A)$ — самосопряженный оператор. Если в некотором инвариантном относительно A и A^* подпространстве индуцируется самосопряженный оператор, то оно принадлежит $\mathfrak{H}^{\perp}(A)$ [4].

Теорема 7. *Пусть $A\in\mathfrak{S}_I^+$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность всех невещественных собственных чисел оператора A и ν_k — размерность корневого подпространства $\mathfrak{G}_k$, соответствующего числу λ_k. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\operatorname{Im}\mu_k\leqq\operatorname{sp}A_I, \tag{21}$$

причем знак равенства имеет место в том и только том случае, когда $\mathfrak{H}^{\perp}(A)=\mathfrak{H}^{(2)}(A)$.

Доказательство. Согласно теоремам 5 и 4

$$\operatorname{sp} A_I^{(1)} + \operatorname{sp} A_I^{(2)} = \operatorname{sp} A_I, \tag{22}$$

где $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ индуцированы соответственно в $\mathfrak{H}^{(1)}(A)$ и $\mathfrak{H}^{(2)}(A)$. Легко видеть, что след мнимой компоненты оператора, индуцированного в $\mathfrak{G}_k$, равен $\nu_k \operatorname{Im} \lambda_k$. Применяя теорему 2 к подпространству $\mathfrak{H}_n^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{G}_k$ и пользуясь формулой (2), получим:

$$\operatorname{sp} A_I^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \operatorname{Im} \lambda_k. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует неравенство (21). В нем тогда и только тогда будет достигаться знак равенства, когда $\operatorname{sp} A_I^{(2)}$. Если последнее соотношение выполняется, то $Ah = A^*h$ $\left(h \in \mathfrak{H}^{(2)}(A)\right)$ и, следовательно, $\mathfrak{H}^{(2)}(A) \subset \mathfrak{H}^{\perp}(A)$. С другой стороны, согласно лемме 1, $\mathfrak{H}^{\perp}(A) \subset \mathfrak{H}^{(2)}(A)$. Обратно, если $\mathfrak{H}^{\perp}(A) = \mathfrak{H}^{(2)}(A)$, то, очевидно, $\operatorname{sp} A_I^{(2)} = 0$.

Из теоремы 7 вытекает следующее утверждение, доказательство которого впервые было получено М. С. Лившицем [8] и впоследствии упрощено Б. Р. Мукминовым [9].

Теорема 8. *Если A — вполне несамосопрженный оператор класса $\mathfrak{S}_I^+$, действующий в $\mathfrak{H}$, то имеет место неравенство* (21), *причем знак равенства достигается в том и только том случае, когда* $\mathfrak{H}^{(1)}(A) = \mathfrak{H}$.

Цитированная литература

[1] Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов* (Москва, 1965).

[2] Л. А. Сахнович, Исследование „треугольной модели" несамосопряженных операторов, *Изв. высших учебных заведений, Математика*, **4 (11)** (1959), 141—149.

[3] В. И. Мацаев, Об одном классе вполне непрерывных операторов, *ДАН СССР*, **139** (1961), 548—552.

[4] М. С. Бродский и М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *УМН*, **13:1** (79), (1958), 3—85.

[5] Ф. Рисс и Б. С.-Надь, *Лекции по функциональному анализу* (Москва, 1954).

[6] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII, VIII, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 12—36, 38—70.

[7] И. С. Иохвидов, *Самосопряженные и унитарные операторы в пространствах с индефинитной метрикой*, Диссертация, Одесса (1950).

[8] М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **34 (76)** (1954), 145—199.

[9] Б. Р. Мукминов, О разложении по собственным функциям диссипативных ядер, *ДАН СССР*, **99** (1954), 499—502.

(Поступило 16. XII. 1965)