Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen. III
(Bedingungen in der Metrik von L^p)

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ $(1 < p < \infty)$ eine 2π-periodische Funktion mit der Fourier-Entwicklung

$$(1) \qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv S[f].$$

$E_n(p) = E_n(f, p)$ bezeichne den besten Annäherungsgrad von $f(x)$ im Sinne der Metrik von $L^p(0, 2\pi)$ mit trigonometrischen Polynomen $(n-1)$-ter Ordnung.

Wir setzen

$$\Delta_s^k f(x, h) = \sum (-1)^{k-j} C_k^j f\left(x - (k-2j)\frac{h}{2}\right)$$

und

$$\omega_k^{(p)}(\delta) = \omega_k^{(p)}(f, \delta) = \sup_{0 \leqq t \leqq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |\Delta_s^k f(x, t)|^p \, dx \right\}^{1/p},$$

ferner bezeichnen wir mit $\Lambda(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ die Klasse der monotonen Funktionen $\lambda(x)$ $(x \geqq 1)$, für die $x^\alpha(\log(x+1))^{\gamma_1} \leqq \lambda(x) \leqq x^\alpha(\log(x+1))^{\gamma_2}$.

In zwei früheren Arbeiten ([1], [2]) haben wir u.a. verschiedene hinreichende Strukturbedingungen für verschiedene Arten der Konvergenz von (1) in der Metrik von $L^2(0, 2\pi)$ angegeben. Im vorliegenden Aufsatz werden wir den allgemeineren Fall von $L^p(0, 2\pi)$ betrachten $(1 < p < \infty)$.

Wenn wir im Folgenden über die Existenz der r-ten Ableitung einer Funktion $f(x)$ sprechen (r eine natürliche Zahl), so verstehen wir, daß $f(x)$ fast überall gleich der r-fach iterierten Integralfunktion einer quadratisch integrierbaren Funktion $g(x)$ ist, und dann nennen wir $g(x)$ die r-te Ableitung von $f(x)$, in Formel: $g(x) = f^{(r)}(x)$.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$A_k(t) = A_k(f, p; t) = \left(\int_0^{2\pi} |\Delta_s^k f(x, t)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Satz I. *Sei* $1<p\leqq 2$ *und seien* r *und* k *nichtnegative ganze Zahlen mit* $k>r$.

α) Unter der Bedingung

$$\int_0^1 \frac{|\log t|\, A_k(t)}{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+r}}\, dt<\infty \tag{2}$$

existiert $f^{(r)}(x)$ *und konvergiert ihre Fourier-Entwicklung fast überall unbedingt, d.h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder.*

β) Unter der Bedingung

$$\int_0^1 \frac{|\log t|^{1/2} A_k(t)}{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+r}}\, dt<\infty \tag{3}$$

existiert $f^{(r)}(x)$ *und konvergieren die Reihen*

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \pm (A_n \cos nx+B_n \sin nx) \quad \left(\begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix}=\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x) \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix}\, dx\right)$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.

γ) Unter jeder Bedingung

$$\int_0^1 \frac{A_k(t)}{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+r}}\, dt<\infty, \tag{4}$$

$$\int_0^1 \frac{|\log t|^{1/2} A_k(t)}{t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+r}}\, dt<\infty, \tag{5}$$

$$\int_0^1 \frac{A_k(t)}{t^{1+\frac{1}{p}+r-\alpha}}\, dt<\infty \tag{6}$$

existiert $f^{(r)}(x)$ *und ist ihre Fourier-Entwicklung fast überall* $|C, \alpha>\frac{1}{2}|$-, $|C, \frac{1}{2}|$-, *bzw.* $|C, \alpha|$-*summierbar**) $(-1<\alpha<\frac{1}{2})$.

δ) Unter der Bedingung

$$\int_0^1 \frac{|\log t|\, A_k^2(t)}{t^{2r+\frac{2}{p}}}\, dt<\infty \tag{7}$$

existiert $f^{(r)}(x)$ *und konvergiert ihre Fourier-Entwicklung fast überall.*

---

*) Eine Reihe Σu_n heißt $|C, \alpha|$-summierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}-\sigma_n^{(\alpha)}|<\infty$$

gilt, wobei $\sigma_n^{(\alpha)}$ das n-te (C, α)-Mittel bezeichnet.

Zum Beweis des Satzes I werden wir aus den angegebenen Strukturbedingungen gewisse Bedingungen von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} R_n^{\beta}(p') < \infty \qquad \left(R_n(p') = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)^{p'/2}\right\}^{1/p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1}\right)$$

herleiten, woraus durch Anwendung bekannter Koeffizientenbedingungen die entsprechenden Behauptungen folgen.

Mit Rücksicht auf das Ergebnis von A. F. TIMAN und M. F. TIMAN [13]:

$$R_n(p') \leqq K_1 E_n(p) \qquad (\text{für } 1 < p \leqq 2),$$

bzw. das Ergebnis von STEČKIN [11]:

$$E_n(p) \leqq K_2\, \omega_2^{(p)}\left(\frac{1}{n}\right),$$

bekommen wir aus dem Satz I den folgenden:

Satz II. *Sei* $1 < p \leqq 2$. *Die entsprechenden Behauptungen des Satzes* I *bleiben mit*

$$(2') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)\, n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r} E_n(p) < \infty \quad \textit{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)\, n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r}\, \omega_2^{(p)}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty;$$

$$(3') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log n}\, n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r} E_n(p) < \infty \quad \textit{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log n}\, n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r}\, \omega_2^{(p)}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty;$$

$$(4') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r} E_n(p) < \infty \quad \textit{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r}\, \omega_2^{(p)}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty;$$

$$(5') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log n}\, n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r} E_n(p) < \infty \quad \textit{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log n}\, n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r}\, \omega_2^{(p)}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty;$$

$$(6') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\frac{1}{p}+r-\alpha} E_n(p) < \infty \quad \textit{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\frac{1}{p}+r-\alpha}\, \omega_2^{(p)}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty;$$

$$(7') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)\, n^{-2+\frac{2}{p}+2r} E_n^2(p) < \infty \quad \textit{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)\, n^{-2+\frac{2}{p}+2r} \left(\omega_2^{(p)}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 < \infty$$

anstatt (2), ..., (7) *gültig*.

Bekanntlich hat MARCINKIEWICZ [6] den Satz von PLESSNER [8] folgenderweise verallgemeinert: Unter der Bedingung

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|^p}{t}\, dx\, dt < \infty,$$

für ein p mit $1 < p \leqq 2$, konvergiert die Entwicklung (1) fast überall

Potapov [9] hat neulich bewiesen, daß für $p>1$ die drei Bedingungen

$$(8)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|^p}{t}\,dx\,dt<\infty, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}E_n^p(p)<\infty, \qquad \int_0^{2\pi}\frac{\omega_1^{(p)}(f,t)^p}{t}\,dt<\infty \end{cases}$$

paarweise äquivalent sind. (Er hat aber diese Behauptung in dieser Form nicht ausgesprochen.)

Unlängst haben wir [3] einen Äquivalenzsatz bewiesen, der in einem Spezialfall folgenderweise lautet:

Sei $0<\beta\leqq 2$ und sei $\lambda(x)\in\Lambda(\alpha,\gamma_1,\gamma_2)$ mit $\alpha>1-\beta$ und mit gewissen $\gamma_1<\gamma_2$. Dann sind die drei Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}\left(\int_0^{2\pi}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx\right)^{\beta/2}dt<\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n^{\beta}(2)<\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}<\infty$$

paarweise äquivalent.

Der Vergleich dieser Ergebnisse stellt die Frage, ob ein Äquivalenzsatz von obiger Art im Raum $L^p(0,2\pi)$ mit $1<p<\infty$ gilt. Der folgende Satz gibt für diese Frage eine positive Antwort.

Satz III. *Seien $p>1$ und $\beta\geqq 1$ reelle Zahlen, weiterhin sei $\lambda(x)\in\Lambda(\alpha,\gamma_1,\gamma_2)$ mit $\alpha>\max(1-\beta,-2)$ und mit gewissen $\gamma_1<\gamma_2$. Dann sind die drei Bedingungen*

$$(9)\qquad \int_0^1 \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}\left(\int_0^{2\pi}|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|^p\,dx\right)^{\beta/p}dt<\infty,$$

$$(10)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n^{\beta}(f,p)<\infty,$$

$$(11)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\omega_2^{(p)}\left(f,\frac{1}{n}\right)^{\beta}<\infty$$

paarweise äquivalent.

Es ist bekannt (s. z. B. [12], s. 339), daß für jedes p mit $1<p<\infty$ gilt:

$$E_n(p)\sim\|f(x)-S_{n-1}(x)\|_p.$$

So ist es ersichtlich, daß man auf Grund des Satzes von Hausdorff—Young, ([14], II, s. 101.) bzw. von Hardy—Littlewood ([14], II, s. 128.) auch notwendige und hinreichende, durch Koeffizienten angegebene Bedingungen für das Erfülltsein der Bedingungen (9), (10) und (11) angeben kann. Im Falle $1<p\leqq 2$ sind die Bedingungen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|^{p'}+|b_k|^{p'})\right\}^{\beta/p'}<\infty \tag{12}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|^{p}+|b_k|^{p})k^{p-2}\right\}^{\beta/p}<\infty\,. \tag{13}$$

notwendig, und im Falle $2\leqq p<\infty$ sind die obigen Bedingungen hinreichend dafür, daß die Bedingungen (9)—(11) erfüllt sind. Wir bemerken noch, daß die Bedingungen (12) und (13) im allgemeinen unvergleichbar sind, wenn aber die Folge $\varrho_n=(a_n^2+b_n^2)^{\frac{1}{2}}$ monoton ist, folgt für $1<p\leqq 2$ (12) aus (13) und für $p\geqq 2$ folgt (13) aus (12).

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz I. *Ist $f(x)\in L^p(0,2\pi)$, dann gilt*

$$\omega_1^{(p)}\left(f,\frac{1}{n}\right)\leqq\frac{C}{n}\sum_{\nu=0}^{n}E_\nu(f,p).$$

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe z.B. [12], S. 344.)

Hilfssatz II. *Seien $\lambda(x)$ $(x\geqq 1)$ eine positive, monotone Funktion mit $\lambda(n)\leqq\leqq A\lambda(2n)$ $(A\geqq 2,\ n=1,2,\dots)$ und p, β reelle Zahlen mit*

$$1<p\leqq 2\quad\textit{und}\quad 0<\beta\leqq p'=\frac{p}{p-1}.$$

Dann folgt die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^{p'}\right\}^{\beta/p'}<\infty\qquad(\varrho_k^2=a_k^2+b_k^2)$$

aus

$$\int_0^1\frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}\left(\int_0^{2\pi}|\Delta_s^k f(x,t)|^p\,dx\right)^{\beta/p}dt<\infty\qquad(k\geqq 1).$$

Dieser Hilfssatz kann analog zu dem Beweis des Hilfssatzes III von [3] bewiesen werden, nur soll man die Beziehung

$$\Delta_s^k f(x,t)=2^k\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)+b_n\sin\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)\right\}(\sin nt)^k$$

anstatt der Beziehung bezüglich $\Delta_s^2 f(x,2t)$ benutzen.

Hilfssatz III. *Seien $\{a_n\}$ und $\{\alpha_n\}$ nicht-negative Zahlenfolgen mit*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k = \beta_n \alpha_n.$$

Dann gilt für jedes $p \geqq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\sum_{n=1}^{k} a_n \right)^p \leqq p^p \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\beta_k a_k)^p. \tag{1.1}$$

Beweis. Mit der Abkürzung $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ $(s_0 = 0)$ gilt für jedes N

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k s_k^p = \sum_{k=1}^{N} (\beta_k \alpha_k - \beta_{k+1} \alpha_{k+1}) s_k^p \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{N} \beta_k \alpha_k (s_k^p - s_{k-1}^p) \leqq p \sum_{k=1}^{N} \beta_k \alpha_k s_k^{p-1} a_k \leqq$$

$$\leqq p \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{\frac{1}{p}} \beta_k a_k \alpha_k^{1-\frac{1}{p}} s_k^{p-1} \leqq p \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (\beta_k a_k)^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k s_k^p \right\}^{\frac{p-1}{p}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k s_k^p \right\}^{1/p} \leqq p \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (\beta_k a_k)^p \right\}^{1/p},$$

woraus die Behauptung (1.1) unmittelbar folgt.

§ 2. Beweis der Sätze

Beweis von Satz I. α) Auf Grund des Hilfssatzes II, mit $\lambda(x) = x^{\frac{3}{2} - \frac{1}{p} - r} \cdot \log^{-1}(x+1)$, ergibt sich aus der Bedingung (2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{p} + r} (\log n) R_n(p') < \infty \qquad \left(p' = \frac{p}{p-1} \right).$$

Daraus erhalten wir:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \varrho_k^2 \right\}^{1/2} \leqq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{\infty} k^{2r} \varrho_k^2 \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\begin{aligned} &\leqq 2^{r+1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m}^{\infty} 2^{\nu r} \left\{ \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2 \right\}^{1/2} \leqq 2^{r+1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m}^{\infty} 2^{\nu r} \left\{ \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^{p'} \right\}^{1/p'} 2^{\nu \frac{p'-2}{2p'}} \leqq \\ &\leqq 2^{r+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu 2^{\nu \left(r + \frac{1}{2} - \frac{1}{p'} \right)} R_{2^\nu}(p') \leqq 2^{r+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu 2^{\nu \left(r - \frac{3}{2} + \frac{1}{p} \right)} 2^\nu R_{2^\nu}(p') \leqq \\ &\leqq 2^{2r+3} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{p} + r} (\log n) R_n(p') < \infty. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dies ergibt insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 k^{2r} < \infty,$$

folglich existiert $f^{(r)}(x)$ und gehört zu $L^2(0, 2\pi)$. Somit gilt nach einem bekannten Satz (s. z. B. [14], S. 40): $S^{(r)}[f] = S[f^{(r)}]$,*) also

$$E_n(f^{(r)}, 2) = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \varrho_k^2\right\}^{1/2}. \tag{2.2}$$

Daraus und aus (2. 1) folgt die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n(f^{(r)}, 2) < \infty,$$

welche nach einem Satz des Verfassers [4] die unbedingte Konvergenz von $S[f^{(r)}]$ fast überall nach sich zieht.

Im Falle der Behauptung β) genügt es, nach einem Satz von SALEM und ZYGMUND [10], zu zeigen, daß

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_n(f^{(r)}, 2) < \infty. \tag{2.3}$$

Nach dem Hilfssatz II, mit $\lambda(x) = x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}-r} (\log(x+1))^{-\frac{1}{2}}$, folgt aus (3):

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r} (\log n)^{1/2} R_n(p') < \infty.$$

Daraus kann man durch eine einfache, zu (2. 1) analoge Rechnung zeigen, daß $f^{(r)}(x)$ existiert und zu $L^2(0, 2\pi)$ gehört; somit gelten $S^{(r)}[f] = S[f^{(r)}]$ und (2. 2), weiterhin auch die Ungleichung (2. 3).

γ) Aus (4), durch Anwendung des Hilfssatzes II mit $\lambda(x) = x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}-r}$, folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r} R_n(p') < \infty.$$

Hieraus ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \varrho_k^2 k^{2r}\right)^{1/2} < \infty \tag{2.4}$$

durch die folgende Abschätzung:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \varrho_k^2 k^{2r}\right)^{1/2} \leqq 2 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{mr} \left(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \varrho_k^{p'}\right)^{1/p'} 2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}\right)} \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m\left(r+\frac{1}{p}-\frac{3}{2}\right)} 2^m R_{2^m}(p') \leqq 2^{r+2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r} R_n(p').$$

*) $S^{(r)}[f]$ bezeichnet die aus der Fourierreihe $S[f]$ durch r-malige gliedweise Ableitung entstandene Reihe.

Aus (2. 4) folgt, daß $f^{(r)}(x)\in L^2(0, 2\pi)$ und so ist $S^{(r)}[f]=S[f^{(r)}]$. Mit Rücksicht auf die letzte Behauptung zieht die Ungleichung (2. 4) nach einem Satz von [5] die $|C, \alpha>\frac{1}{2}|$-Summierbarkeit von $S[f^{(r)}]$ fast überall nach sich.

Ähnlicherweise können die beiden anderen Behauptungen eingesehen werden. Nämlich folgt aus (5) bzw. aus (6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+r} (\log n)^{1/2} R_n(p')<\infty$$

bzw.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\frac{1}{p}+r-\alpha} R_n(p')<\infty,$$

nach dem Hilfssatz II, woraus man durch einfache Rechnung erhält:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m}\left(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \varrho_k^2 k^{2r}\right)^{1/2}<\infty$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)}\left(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \varrho_k^2 k^{2r}\right)^{1/2}<\infty.$$

Hieraus folgt, daß $S[f^{(r)}]$ fast überall $|C, \frac{1}{2}|$- bzw. $|C, -1<\alpha<\frac{1}{2}|$-summierbar ist (s. [5], Satz II).

δ) Aus (7), auf Grund des Hilfssatzes II mit $\lambda(x)=x^{2-\frac{1}{p}+2r}(\log (x+1))^{-1}$ und $\beta=2$, ergibt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2+\frac{2}{p}+2r} (\log n) R_n^2(p')<\infty. \tag{2. 5}$$

Hieraus folgt, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 k^{2r} \log k<\infty; \tag{2. 6}$$

dies sichert, nach dem wohlbekannten Kolmogoroff—Seliverstoff—Plessnerschen Satz die Konvergenz von $S[f^{(r)}]$ fast überall; es gilt nämlich $S^{(r)}[f]=S[f^{(r)}]$ auch in diesem Fall. Die Implikation (2. 5)$\Rightarrow$(2. 6) können wir folgenderweise beweisen:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \varrho_k^2 k^{2r} \log k \leqq 2^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 k^{2r} \leqq 2^{2r+3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=m}^{\infty} 2^{2\nu r} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2 \leqq$$

$$\leqq 2^{2r+3} \sum_{m=1}^{\infty} m 2^{m\left(2r+1-\frac{2}{p'}\right)} \left\{\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \varrho_k^{p'}\right\}^{2/p'} \leqq 2^{4r+6} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r+\frac{2}{p}-2} (\log n) R_n^2(p').$$

Damit haben wir den Satz I vollständig bewiesen.

Beweis von Satz III.*) Zuerst beweisen wir die Implikation (9)$\Rightarrow$(10). Im Falle $\sum\lambda^{-1}(n)<\infty$ ist die Behauptung trivial. Wir nehmen also an, daß $\alpha\leqq 1$. Sei

$$u_n(x)=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin\frac{t-x}{2}n}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^4 dt=$$

$$=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

$u_n(x)$ ist ein trigonometrisches Polynom $(2n-2)$-ten Grades und man hat

$$\int_0^{\pi/2}\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt=1$$

(s. [7], S, 113—116). Nach dem Obigen ist es klar, daß $E_{2^{k+1}}(f,p)\leqq \|f(x)-u_{2^k}(x)\|_p$, d.h. gilt

$$E_{2^{k+1}}(f,p)\leqq\left\{\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{\pi/2}[f(x+2t)-2f(x)+f(x+2t)]\frac{3}{\pi 2^k(2^{2k+1}+1)}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\frac{\sin 2^k t)}{\sin t}\right)^4 dt\right|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Durch Anwendung der Minkowskischen Ungleichung bekommt man

$$E_{2^{k+1}}(f,p)\leqq 2^{-3k}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2^k t}{\sin t}\right)^4\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+2t)-2f(x)+f(x-2t)|^p dx\right\}^{1/p} dt\equiv$$

$$\equiv 2^{-3k}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2^k t}{\sin t}\right)^4 A(t)\,dt.$$

Für $\beta>1$ erhalten wir durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$E^{\beta}_{2^{k+1}}(f,p)\leqq K_1\left\{\int_0^{\pi/2}\left[2^{-3k}\left(\frac{\sin 2^k t}{\sin t}\right)^4 A(t)^{\beta}\right]^{1/\beta}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{6}{\pi 2^k(2^{2k+1}+1)}\left(\frac{\sin 2^k t}{\sin t}\right)^4\right]^{1-\frac{1}{\beta}} dt\right\}^{\beta}\leqq K_1\int_0^{\pi/2}2^{-3k}\left(\frac{\sin 2^k t}{\sin t}\right)^4 A(t)^{\beta}\,dt.$$

*) Unser Beweis ist ähnlich zum Lemma 6 von POTAPOV [9].

Daraus folgt für jedes $\beta \geqq 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} E_n^{\beta}(f, p) \leqq K_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{\lambda(2^m)} E_{2^{m+1}}^{\beta}(f, p) \leqq$$

$$\leqq K_3 \int_0^{\pi/2} \frac{A(t)^{\beta}}{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)}{2^{2m} \lambda(2^m)} \left(\frac{\sin 2^m t}{\sin t}\right)^4 dt.$$

Auf Grund dieser Ungleichungen genügt es für den Beweis der Implikation (9)⇒(10) zu zeigen, daß die Summe

$$\sigma(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)}{2^{2m} \lambda(2^m)} \left(\frac{\sin 2^m t}{\sin t}\right)^4$$

für $0 < t \leqq \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig beschränkt ist. Für ein beliebiges, aber fixiertes t bezeichnen wir mit m_0 die größte unter den natürlichen Zahlen m, mit $2^m t \leqq 1$. Dann ist

$$\sigma(t) = \sum_{m=0}^{m_0} + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \equiv \sigma_1(t) + \sigma_2(t).$$

Es ist leicht ersichtlich, daß $\sigma_1(t)$ beschränkt ist. Wegen $\alpha \leqq 1$ ist nämlich

$$\sigma_1(t) \leqq K_4 \sum_{m=0}^{m_0} \frac{\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}{\lambda(2^m)} 2^{2m} t^2 = K_4 t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right) \sum_{m=0}^{m_0} \frac{2^{2m}}{\lambda(2^m)} \leqq$$

$$\leqq K_5 t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right) \frac{2^{2m_0}}{\lambda(2^{m_0})} \leqq K_6.$$

Wegen $\alpha > -2$ ist ferner

$$\sigma_2(t) \leqq K_7 \sum_{m=m_0+1}^{\infty} t^{-2} \lambda\left(\frac{1}{t}\right) 2^{-2m} \lambda^{-1}(2^m) \leqq$$

$$\leqq K_8 t^{-2} \lambda\left(\frac{1}{t}\right) 2^{-2m_0} \lambda^{-1}(2^{m_0}) \leqq K_9.$$

Damit haben wir die Implikation (9)⇒(10) bewiesen.

Wir beweisen nun die Implikation (10)⇒(11). Da wegen $\alpha > 1-\beta$ und $\lambda(x) \in \Lambda(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ gilt:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda(k) k^{\beta}} \leqq K_{10} \frac{n}{\lambda(n) n^{\beta}},$$

es ergibt sich aus den Hilfssätzen I und III

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \omega^{(p)}\left(f, \frac{1}{n}\right)^{\beta} \leqq K_{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n) n^{\beta}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} E_{\nu}(f, p)\right)^{\beta} \leqq$$

$$\leqq K_{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n) n^{\beta}} (n E_n(f, p))^{\beta},$$

was zu beweisen war.

Was die Implikation (11)⇒(9) anbetrifft, genügt es zu bemerken, daß die Bedingung (11) mit

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \omega_2^{(p)}(f, t)^{\beta}\, dt < \infty \tag{2.7}$$

gleichwertig ist, da (9) aus (2. 7) offenbar folgt.

Damit haben wir den Satz III vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] L. LEINDLER, Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 233—249.

[2] L. LEINDLER, Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen. II, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 118—124.

[3] L. LEINDLER, Über Strukturbedingungen für Fourierreihen, *Math. Z.*, **88** (1965), 418—431.

[4] L. LEINDLER, Über unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen mit strukturellen Bedingungen, *Studia Math.*, **23** (1963), 113—117.

[5] L. LEINDLER, Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 243—268.

[6] J. MARCINKIEWICZ, Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **8** (1939), 239—240.

[7] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций* (Москва—Ленинград, 1949).

[8] A. PLESSNER, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *J. reine angew. Math.*, **155** (1926), 15—25.

[9] М. К. Потапов, К вопросу об эквивалентности условий сходимости рядов Фурье, *Мат. сборник*, **68** (1965), 111—127.

[10] R. SALEM—A. ZYGMUND, Some properties of trigonometric series whose terms have random sings, *Acta Math.*, **91** (1954), 245—301.

[11] С. Б. Стечкин, О порядке наилучших приближений непрерывных функций, *Изв. АН СССР*, **15** (1951), 219—242.

[12] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного* (Москва, 1960).

[13] А. Ф. Тиман—Т. Ф. Тиман, Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем, *Доклады АН СССР*, **71** (1950), 17—20.

[14] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*. I—II (Cambridge, 1959).

(Eingegangen am 11. März 1966)