# Über die Divergenz der Walshschen Reihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

**1.** Es sei $r_n(x) = \text{sign}\sin 2^n \pi x$ die $n$-te Rademachersche Funktion. Das Walshsche System $\{w_n(x)\}_0^\infty$ ist folgenderweise definiert: $w_0(x) \equiv 1$ in $(0, 1)$; ist $n = 2^{\nu_1} + \ldots + 2^{\nu_p}$ $(\nu_1 < \ldots < \nu_p)$ die dyadische Darstellung von $n \geqq 1$, so sei $w_n(x) = r_{\nu_1+1}(x) r_{\nu_2+1}(x) \ldots r_{\nu_p+1}(x)$. Bekanntlich ist das Walshsche System in $(0, 1)$ orthonormiert. Aus dem Resultat von A. M. OLEVSKIJ[1]) und P. L. ULJANOV[2]) folgt, daß es eine Funktion von $L^2(0, 1)$ derart gibt, daß ihre Walshsche Entwicklung in gewisser Anordnung ihrer Glieder fast überall divergiert.

In dieser Note werden wir die folgende, schärfere Behauptung beweisen.

**Satz.** *Es sei $\{\varrho(n)\}$ eine positive Folge mit $\varrho(n) = o(\sqrt{\log\log n})$. Dann gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ mit*

$$\sum a_n^2 \varrho^2(n) < \infty, \tag{1}$$

*für die die Walshsche Reihe*

$$\sum a_n w_n(x)$$

*in gewisser Anordnung ihrer Glieder in $(0, 1)$ fast überall divergiert.*

**2.** Es sei $a$ eine positive ganze Zahl. Wir setzen

$$\varphi_a\left(\frac{l}{2^a}; x\right) = \frac{1}{2^{a-1}} \prod_{k=2}^{a} \left(1 + r_k\left(\frac{l}{2^a} + \frac{1}{2^{a+1}}\right) r_k(x)\right) \qquad (l = 0, \ldots, 2^a - 1).$$

$\varphi_a\left(\frac{l}{2^a}; x\right)$ ist die Linearkombination von Walshschen Funktionen $w_0(x), w_2(x), \ldots, w_{2^a-2}(x)$; es gilt

$$\varphi_a\left(\frac{l}{2^a}; x\right) = \begin{cases} 1 & \left(\frac{l}{2^a} < x < \frac{l+1}{2^a},\ \frac{1}{2} + \frac{l}{2^a} < x < \frac{1}{2} + \frac{l+1}{2^a} \text{ oder } \frac{l}{2^a} - \frac{1}{2} < x < \frac{l+1}{2^a} - \frac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

---

[1]) А. М. Олевский, Расходящиеся ряды из $L^2$ по польным системам, *Доклады Акад. Наук СССР*, **138** (1961), 545—548.

[2]) П. Л. Ульянов, Расходящиеся ряды по системе Хаара и по базисам, *Доклады Акад. Наук СССР*, **138** (1961), 556—559.

und

$$\int_0^1 \varphi_a^2\left(\frac{l}{2^a}; x\right) dx = \frac{1}{2^{a-1}}.$$

Wir setzen

$$\Phi_1(0; x) = \varphi_2(0; x),$$

$$\Phi_1(1; x) = r_3(x)\varphi_2(0; x), \quad \Phi_2(1; x) = -r_3(x)r_1(x)\varphi_2(0; x),$$

$$\Phi_1(2; x) = r_4(x)\varphi_3(0; x), \quad \Phi_2(2; x) = -r_1(x)\Phi_1(2; x),$$

$$\Phi_3(x) = r_5(x)\varphi_3\left(\frac{1}{2^3}; x\right), \quad \Phi_4(x) = -r_1(x)\Phi_3(x),$$

und in allgemeinen

$$\Phi_{2j+1}(k; x) = r_{2+2^{k-1}+j}(x)\sum_l \varphi_{2+2^{k-2}+[j/2]}(x_l; x) \qquad (j=0, \ldots, 2^{k-1}-1),\text{[3]}$$

wobei $x_l$ die linksseitigen Endpunkten derjenigen Intervallen im $(0, \frac{1}{2})$ bezeichnen, in welchen $\Phi_{j+1}(k-1; x)$ positiv ist und

$$\Phi_{2j}(k; x) = -r_1(x)\Phi_{2j-1}(k; x) \qquad (j=1, \ldots, 2^{k-1}).$$

Es sei $m(\geqq 2)$ eine positive ganze Zahl. Für die Funktionen $\Phi_r(k; x)$ $(k=0, \ldots, m-1;\ r=1, \ldots, 2^k)$ gelten offensichtlich die folgenden Behauptungen: jede Funktion $\Phi_r(k; x)$ ist eine Linearkombination von Walshschen Funktionen; verschiedene $\Phi_r(k; x)$ haben in seinen Darstellungen keine gemeinsame Walshsche Funktion; für die Darstellungen von $\Phi_r(k; x)$ $(k=0, \ldots, m-1;\ r=1, \ldots, 2^k)$ brauchen wir nur die Walshschen Funktionen $w_0(x), \ldots, w_{5.2^{2^{m-1}}-2}(x)$; es gilt

$$\sum_{r=1}^{2^k}\int_0^1 \Phi_r^2(k; x)\, dx \leqq 1.$$

Wir betrachten die Summe

$$S_m(x) = \Phi_1(0; x) + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\left(\Phi_{2j+1}(k; x) + 2\Phi_{2(j+1)}(k; x)\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{5.2^{2^{m-1}}-2} c_l(m)\, w_l(x).$$

Offensichtlich ist

$$\int_0^1 S_m^2(x)\, dx \leqq 5m.$$

[3]) [$\alpha$] bezeichnet den ganzen Teil von $\alpha$.

Wir definieren eine Anordnung der Summe $S_m(x)$. Es sei

$$S_1(x) = \Phi_1(0;\, x) + \Phi_1(1;\, x) + 2\Phi_2(1;\, x),$$

$$S_2(x) = \Phi_1(0;x) + \Phi_1(1;x) + \Phi_1(2;x) + 2\Phi_2(2;x) + 2\Phi_2(1;\, x) + \Phi_3(2;x) + 2\Phi_4(2;x),$$

u.s.w. Die Anordnung von $S_{\mu+1}(x)$ erhalten wir derart, daß wir in $S_\mu(x)$ nach dem Glied $\Phi_{2j+1}(\mu;\, x)$, bzw. nach dem Glied $2\Phi_{2(j+1)}(\mu;\, x)$ die Summe $\Phi_{2^2j+1}(\mu+1;\, x) + 2\Phi_{2^2j+2}(\mu+1;\, x)$, bzw. die Summe $\Phi_{2^2j+3}(\mu+1;\, x) + 2\Phi_{2^2j+4}(\mu+1;\, x)$ einschreiben. Nach der Definition von $\Phi_r(k;\, x)$ ist es klar, daß das Maximum der Partialsummen dieser Anordnung von $S_m(x)$ in den nicht-dyadischen Punkten von $(0, \frac{1}{4})$ den Wert $m$ hat. Dieselbe Behauptung gilt für $S_m\left(x - \frac{s}{4}\right)$ $(s = 0, 1, 2, 3)$ im Intervall $(s/4, (s+1)/4)$.

Es sei endlich

$$\sigma_m\left(x - \frac{s}{4}\right) = S_m\left(x - \frac{s}{4}\right)\Big/ m.$$

Dann ist

$$\int_0^1 \sigma_m^2\left(x - \frac{s}{4}\right) dx \leqq 5/m, \tag{2}$$

und $\sigma_m\left(x - \frac{s}{4}\right)$ hat eine Anordnung ihrer Glieder, für die das Maximum der Partialsummen in den nicht-dyadischen Punkten von $(s/4, (s+1)/4)$ den Wert 1 besitzt.

3. Wir definieren eine Indexfolge $(2 \leqq) m_1 < \ldots < m_k < \ldots$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\varrho(n)/\sqrt{\log\log n} \leqq 1/k \qquad (n \geqq 2^{2^{m_k}}).$$

Dann ist

$$2^{2^{m_k}} + 5.2^{2^{m_k-1}-2} < 2^{2^{m_k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Wir setzen

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_{2^{m_k}+1}(x)\, \sigma_{m_k}(x - (k-1)/4) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=2^{2^{m_k}}}^{2^{2^{m_k+1}}-1} d_l(k)\, w_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x).$$

Nach (2) gilt offensichtlich (1). Nach dem obigen hat aber diese Reihe eine Anordnung ihrer Glieder derart, daß die angeordnete Reihe fast überall divergiert.

Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

*(Eingegangen am 7. Mai 1966)*