Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring

Von F. SZÁSZ in Budapest

§ 1. Einleitung

Unter einem Ring werden wir in dieser Arbeit stets einen assoziativen Ring verstehen. Da die Ringe mit einem Einselement bzw. mit einem einseitigen Einselement bekanntlich eine wichtige Rolle in der Theorie der Ringe und der Operatorenmoduln spielen, ist es zweckmäßig Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring zu untersuchen. Bezüglich der Untersuchungen dieser Art verweisen wir vor allem auf die grundlegende Arbeit [1] von R. BAER.

Die Ringe mit Einselement bzw. mit Rechtseinselement sind auch vom Gesichtspunkt ringtheoretischer Zerlegungssätze aus wichtig (s. die Arbeiten [5], [7], [11], [14]).

Wir werden in dieser Arbeit weitere Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring angeben. Dafür werden wir im § 2 zuerst einige Ringklassen, und zwar hauptsächlich zwei Ringklassen betrachten. Diese zweien Ringklassen bestehen aus den Ringen mit laut linksannullatorfreien homomorphen Bildern, bzw. aus den Ringen A, für die der maximale triviale (d. h. von A annullierte) Untermodul M_0 von jedem A-Rechtsmodul M ein direkter Summand von M ist. Es werden auch einige offene Fragen bezüglich der vorkommenden Ringklassen aufgeworfen werden.

§ 2. Über einige Ringklassen

Um kurz zu sprechen, benützen wir die folgenden Bezeichnungen bzw. Benennungen.

E_0-Ringe, und E_1-Ringe bezeichnen Ringe mit einem Einselement bzw. mit einem Rechtseinselement.

E_2-Ring bedeutet einen solchen Ring A, für den der maximale triviale Untermodul M_0 von jedem A-Rechtsmodul M ein direkter Summand von M ist.

Ein Ring A, für den $a \in aA$ für jedes $a \in A$ gilt, heißt E_3-Ring.

Einen Ring, dessen sämtliche homomorphen Bilder keinen von Null verschiedenen Linksannullator und Rechtsannullator besitzen, nennen wir E_4-Ring.

Zum Schluß wird ein Ring mit laut linksannullatorfreien homomorphen Bildern E_5-Ring genannt.

Mit der Hilfe einer Peirceschen Zerlegung kann bewiesen werden, daß jeder E_0-Ring ein E_2-Ring ist. Jeder E_0-Ring ist ein E_i-Ring für $i=1, 2, 3, 4$ oder 5. Weiterhin ist ein E_1-Ring sowohl ein E_3-Ring, als auch ein E_5-Ring. Sowohl die

E_3-Ringe, als auch die E_4-Ringe sind E_5-Ringe. Die durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über einem Primkörper erzeugte Algebra A zeigt die Existenz eines solchen E_3-Ringes, der kein E_4-Ring ist, denn A ist ein E_1-Ring mit von Null verschiedenen Rechtsannullatoren, und somit ist A kein E_0-Ring. Weiterhin zeigt jeder einfache Radikalring A mit $A^2 = A \neq 0$ (vgl. Sąsiada [13]) die Existenz solcher Ringe, die sowohl E_5-Ringe, als auch E_4-Ringe, aber weder E_2-Ringe noch E_3-Ringe sind. Ein Radikalring im Sinne von Jacobson ist nämlich offenbar kein E_3-Ring, und es wird in dieser Arbeit bewiesen werden, daß kein E_2-Ring ein von Null verschiedener Radikalring ist. Im Buch [10] von A. Kertész ist folgende Behauptung (mit anderer Abfassung) bewiesen: Ein Ring A ist dann und nur dann ein E_0-Ring, wenn es $M = M_0 \oplus MA$ für jeden A-Rechtsmodul M mit dem maximalen trivialen Untermodul M_0 gilt, wobei $\oplus$ eine moduldirekte Summe bezeichnet. Hiernach bedeutet die Klasse der E_2-Ringe eine formale Verallgemeinerung der E_0-Ringe.

Wir bestätigen jetzt einige Eigenschaften der E_5-Ringe bzw. der E_2-Ringe. Es gilt der folgende

Satz 2. 1. (1) *Jedes homomorphe Bild A' eines E_5-Ringes A ist ebenfalls ein E_5-Ring.* (2) *Für den Kern R' von jedem A'-Endomorphismus φ' von jedem homomorphen Bild A' eines E_5-Ringes A gilt $R' = \{x'; x' \in A', x'A' \subseteqq R'\}$.* (3) *Es gilt $L \subseteqq LA$ für jedes Linksideal L eines E_5-Ringes A.*

Beweis. (1) Da jedes homomorphe Bild A'' von A' auch ein homomorphes Bild des E_5-Ringes A ist, hat A'' keinen von Null verschiedenen Linksannullator von A'', und somit ist A' ein E_5-Ring. — (2) Bezeichnen wir die Menge $\{x'; x' \in A', x'A' \subseteqq R'\}$ mit S', so ist S' ein Rechtsideal von A', für das $S'A' \subseteqq R'$ gilt. Dann ergibt sich $(S'\varphi')A' \subseteqq R'\varphi'$ und somit $S'\varphi' = 0$, denn $R'\varphi'$ ist Null und A' ist linksannullatorfrei. Also gilt $S' \subseteqq R'$ und wegen $R' \subseteqq S'$ auch $S' = R'$. — (3) Das Produkt LA ist für jedes Linksideal L ein Ideal von A, und da $l + LA$ für jedes $l \in L$ ein Linksannullator des E_5-Ringes A/LA ist, ergibt sich $l \in LA$ für jedes $l \in L$ und somit $L \subseteqq LA$, w. z. b. w.

Satz 2. 2. (1) *Es gilt $A^2 = A$ für jeden E_5-Ring A.* (2) *Für jeden E_5-Ring A und für jedes $a \in A$ besteht $a \in aA + AaA$.* (3) *Das Jacobsonsche Radikal J von jedem E_5-Ring A stimmt mit dem Durchschnitt Φ_l aller maximalen Linksideale von A überein, bzw. es gilt $J = A$, wenn A kein maximales Linksideal besitzt.*

Beweis. (1) Ist $L = A$, so erhält man nach dem Satz 2. 1. 3. $A \subseteqq A^2$ und somit $A^2 = A$. (2) Ist L das durch a in A erzeugte Hauptlinksideal $(a)_l$, so folgt aus dem Satz 2. 1. 3 $a \in L \subseteqq LA = aA + AaA$. (3) Ist $L = J$, so ergibt sich nach dem Satz 2. 1. 3 $J \subseteqq JA$. Da aber J der Durchschnitt aller modularen maximalen Linksideale von A ist, gilt $\Phi_l \subseteqq J$, und nach einem Satz von Hille [6] (Seite 486, Theorem 22. 15. 3) bzw. von Kertész [9] erhält man $JA \subseteqq \Phi_l$, woraus wegen $\Phi_l \subseteqq J \subseteqq JA \subseteqq \Phi_l$ notwendig $J = \Phi_l$ folgt.

Satz 2. 3. (1) *Jeder E_2-Ring A ist ein E_5-Ring, und jedes homomorphe Bild A' eines E_2-Ringes ist ebenfalls ein E_2-Ring.* (2) *Es gibt keinen von Null verschiedenen E_2-Ring A, der ein Radikalring im Sinne von* Jacobson *ist.* (3) *Jeder E_2-Ring A besitzt maximale Linksideale.* (4) *Ist B eine beliebige Everettsche Ringerweiterung eines beliebigen E_2-Ringes A, so gibt es ein Ideal C von B und eine additive Untergruppe D von B^+ mit $B^+ = C \oplus D$, $CA=0$, $A \subseteqq D$, $D^2A \supseteqq DA$ und $dA \neq 0$ für jedes von Null verschiedene Element $d \in A$.*

Beweis. (1) Zuerst beweisen wir, daß jedes homomorphe Bild A' eines E_2-Ringes A ebenfalls ein E_2-Ring ist. Ist nämlich M' ein A'-Rechtsmodul mit dem maximalen trivialen Untermodul $(M')_0$, so wird M' mit dem Vorschrift $am= =a'm'$ $(m=m')$ ein A-Rechtsmodul M, wenn a ein beliebiges Urbild von a' bei einem festen Homomorphismus φ von A auf A' ist. Dann ist $M_0=(M')_0$ der maximale triviale Untermodul des A-Rechtsmoduls M mit $M = M_0 \oplus M_1$, wobei M_1 sowohl ein A-Untermodul, als auch ein A'-Untermodul von M ist. Also ist A' mit A ebenfalls ein E_2-Ring. Wir zeigen jetzt, daß jeder E_2-Ring ein E_5-Ring ist. Dafür genügt es nach dem vorigen zu bestätigen, daß jeder E_2-Ring A linksannullatorfrei ist. Es sei nämlich A_1 die kanonische (Dorrohsche) Ringerweiterung des E_2-Ringes A mit einem Einselement. A_1 besteht bekanntlich aus sämtlichen Paaren (a, m), wobei $a \in A$ und m eine ganze rationale Zahl ist. Definiert man die Gleichheit und Subtraktion der Paare komponentenweise und die Multiplikation mit den Regeln $(a, m)\cdot(b, n) = = (ab+mb+na, mn)$ bzw. $(a, m)b = (ab+mb, 0)$, so wird der Ring A_1 ein A-Rechtsmodul. Da A ein E_2-Ring ist, ergibt sich für A_1 eine modultheoretische Zerlegung $A_1 = A_0 \oplus A_2$, wobei A_0 der maximale triviale A-Untermodul des A-Rechtsmoduls A_1 ist. Es gilt nun $(0, 1) = (a, m)+(-a, 1-m)$ mit $(a, m) \in A_0$, $(-a, 1-m) \in A_2$. Da jetzt es $ab+mb = 0$ für jedes $b \in A$ gilt, erhält man $(b, 0)= =(0, 1)b = (-a, 1-m)b \in A_2$ für jedes $b \in A$. Deshalb ergibt sich $(b, 0)A = = (bA, 0) \neq 0$ für jedes von Null verschiedene Element b von A, folglich $bA \neq 0$ für jedes von Null verschiedene Element $b \in A$. Also ist A linksannullatorfrei, und somit ist jeder E_2-Ring auch ein E_5-Ring. (2) Nehmen wir an, daß ein von Null verschiedener Radikalring A ein E_2-Ring ist. Ist a ein beliebiges von Null verschiedenes Element, so sei R maximal in der Menge derjenigen Rechtsideale S von A, für die $a \notin S$ gilt. Nach dem Lemma von Zorn gibt es gewiß ein solches Rechtsideal R. Dann ist aber der A-Rechtsmodul A/R subdirekt unzerlegbar, denn jeder von Null verschiedene A-untermodul des A-Rechtsmoduls A/R enthält $a+R$. Da A ein Radikalring ist, gilt $MA \subseteqq R$ für den minimalen A-Untermodul M/R von A/R. Da A auch ein E_2-Ring ist, liegt M/R im maximalen trivialen A-Untermodul A_0/R von A/R, für den $A/R = A_0/R \oplus A_0'/R$ mit einem Rechtsideal A_0' von A gilt. Da aber $M \neq R$ gilt und A/R subdirekt unzerlegbar ist, ergibt sich $A_0/R=A/R$, und somit $A^2 \subseteqq R$. Nach den Sätzen 2. 3. 1 und 2. 2. 1 gilt aber $A^2=A$, und somit wegen $A \subseteqq R$ auch $A=R$, was den Bedingungen $a \notin R$ und $a \in A$ widerspricht. Dieser Widerspruch beweist, daß kein von Null verschiedener E_2-Ring ein Radikalring im Sinne von Jacobson ist. (3) Besitzt nun ein E_2-Ring $A(\neq 0)$ kein maximales Linksideal, so gilt nach den Sätzen 2. 3. 1 und 2. 2. 3 $J=A$, was nach dem vorigen unmöglich ist. Also hat jeder von Null verschiedene E_2-Ring A maximale Linksideale. (4) Es seien B eine beliebige Everettsche Ringerweiterung des E_2-Ringes A, C der maximale triviale A-Untermodul des A-Rechtsmoduls B und D ein A-Untermodul von B mit $B = C \oplus D$. Da A ein Ideal von B ist, ist auch C ein Ideal in B mit $CA=0$. Offenbar gilt $dA \neq 0$ für jedes $d \in D$ mit $d \neq 0$. Weiterhin erhält man nach den Sätzen 2. 3. 1 und 2. 2. 1 $A = A^2 \subseteqq BA \subseteqq CA + DA = DA \subseteqq D$ und wegen $DB \subseteqq DC + D^2$, $DC \subseteqq C$, $CA = 0$ und $A = A^2 \subseteqq BA \subseteqq A$ ergibt sich $DA \subseteqq D^2A$, w. z. b. w.

§ 3. Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring

Ein von Null verschiedenes Element a eines Ringes A heißt Rechtsmultiplikator von A, wenn es eine ganze rationale Zahl n gibt, derart, daß $xa = nx$ für jedes $x \in A$ gilt. Ähnlich lassen sich auch die Linksmultiplikatoren definieren.

Es gilt der folgende

Satz 3. 1. (1) *Ein beliebiger Ring A hat dann und nur dann ein Rechtseinselement, wenn A ein E_5-Ring ist, der einen solchen Rechtsmultiplikator besitzt, der in A kein Rechtsnullteiler ist.* (2) *Jeder torsionsfreie E_4-Ring mit einem Rechtsmultiplikator hat ein Einselement.* (3) *Ein beliebiger Ring A hat dann und nur dann ein Einselement, wenn A ein E_5-Ring ist, der einen solchen Linksmultiplikator besitzt, der in A kein Linksnullteiler ist.* (4) *Jeder torsionsfreie E_5-Ring mit einem Linksmultiplikator besitzt ein Einselement.*

Beweis. Da die Bedingungen im Satz 3. 1. 1 für ein Rechtseinselement von A notwendig erfüllt sind, genügt es nur das Hinreichen der Bedingungen zu beweisen. Es sei also A ein E_5-Ring, der einen solchen Rechtsmultiplikator a hat, der in A kein Rechtsnullteiler ist. Dann gibt es eine ganze rationale Zahl n mit $xa = nx \neq 0$ für jedes von Null verschiedene $x \in A$, woraus folgt, daß A kein Element x mit $x \neq 0$ und $nx = 0$ besitzt. Weiterhin existieren wegen $Aa = nA$ und nach den Sätzen 2. 2. 1 und 2. 2. 2 Elemente b und $c \in A$ mit $a = ab + nb$, woraus $nx = xa = xab + nxc = nxb + nxc = nx(b+c)$ und somit $n(x(b+c) - x) = 0$ folgt. Da A kein Element y mit $y \neq 0$ und $ny = 0$ hat, gilt $x(b+c) = x$ für jedes $x \in A$, und somit ist $b + c$ ein Rechtseinselement von A. (2) Ist A ein torsionsfreier E_4-Ring mit einem Rechtsmultiplikator a, so ist a wegen der Torsionsfreiheit und da A rechtsannullatorfrei ist, kein Rechtsnullteiler, und somit läßt sich der Satz 3. 1. 1 für den Beweis der Existenz eines Rechtseinselementes anwenden. Da A ein E_4-Ring ist, ist jedes Rechtseinselement auch ein Einselement von A. (3) Es sei A ein E_5-Ring, der einen solchen Linksmultiplikator a besitzt, der in A kein Linksnullteiler ist. Dann gilt $ax = nx \neq 0$ für eine feste ganze rationale Zahl n und für jedes $x \in A$ mit $x \neq 0$. Da $aA = nA$, $AaA = AnA = nA^2 = nA$ und $a \in aA + AaA$ bestehen, gibt es ein b mit $a = nb$ $(b \in A)$, woraus $nbx = nx \neq 0$ für jedes $x \in A$ mit $x \neq 0$ und somit $n(bx - x) = 0$ und $bx = x$ für jedes $x \in A$ folgt. Also ist b ein Linkseinselement von A. Da jedes Element von $A(1-b) = \{x - xb; x \in A\}$ ein Linksannullator des E_5-Ringes A ist, gilt $A(1-b) = 0$ und somit auch $xb = x$ für jedes $x \in A$. Also ist b ein zweiseitiges Einselement von A. (4) Ist A ein torsionsfreier E_5-Ring mit einem Linksmultiplikator a, so gilt $ax = nx$ für jedes $x \in A$ mit festem $n \neq 0$, denn A hat keinen von Null verschiedenen Linksannullator. Wegen der Torsionsfreiheit von A^+ ist a kein Linksnullteiler von A, und somit läßt sich der Satz 3. 1. 3 für den Beweis der Existenz des Einheitselementes von A anwenden, w. z. b. w.

Satz 3. 2. (1) *Ein beliebiger Ring A hat dann und nur dann ein Einselement, wenn A ein E_5-Ring ist, der ein solches Element a mit $Aa \subseteqq aA$ besitzt, das in A kein*

Linksnullteiler ist. (2) *Jeder E_5-Ring A mit einem von Null verschiedenen Zentrum Z besitzt ein homomorphes Bild A' mit einem Einselement e'.*

Beweis. (1) Offenbar auch jetzt genügt es nur das Hinreichen der Bedingung im Satz 3. 2. 1 zu beweisen. Ist A ein E_5-Ring, der ein solches Element a mit $Aa \subseteqq aA$ besitzt, das in A kein Linksnullteiler ist, so gilt $AaA \subseteqq aA$ und somit nach dem Satz 2. 2. 2 auch $a \in aA$. Also gibt es ein Element $b \in A$ mit $a = ab$ und $a(1-b)A$. Da a in A kein Linksnullteiler ist, ergibt sich $(1-b)A = 0$ und somit ist b ein Linkseinselement von A. Da jedes Element von $A(1-b)$ ein Linksannullator des E_5-Ringes A ist, erhält man auch $A(1-b) = 0$, und somit ist b ein zweiseitiges Einselement von A. (2) Ist z ein von Null verschiedenes Element des Zentrums Z eines E_5-Ringes A, so gibt es nach dem Satz 2. 2. 2 ein Element $b \in A$ mit $z = zb = bz$. Ist das Ideal A_z von A der Annullator von z, so gilt $A_z \neq A$, denn $z \neq 0$ ist kein Annullator des E_5-Ringes A. Weiterhin ergibt sich für das Ideal $K = (1-b)A + A(1-b) + A(1-b)A$ gewiß $K \subseteqq A_z$. Dann ist A/K ein von Null verschiedenes homomorphes Bild von A mit zweiseitigem Einselement $e' = b + K$, w. z. b. w.

Satz 3. 3. (1) *Ein beliebiger Ring A hat dann und nur dann ein Einselement, wenn A ein E_5-Ring ist, der ein solches Zentrumelement $z \neq 0$ besitzt, das in A kein Nullteiler ist.* (2) *Ein beliebiger Ring A hat dann und nur dann ein Einselement, wenn A ein E_5-Ring ist, der ein solches Element a mit $aA = A$ besitzt, das mit jedem Rechtsideal der Gestalt $(1-b)A$ von A (für jedes $b \in A$) vertauschbar ist, d. h. es gilt $a(1-b)A = (1-b)Aa$.*

Beweis. Es genügt nur das Hinreichen der Bedingung zu beweisen. (1) Ist $z \neq 0$ ein Zentrumelement des E_5-Ringes A, das in A kein Nullteiler ist, so gilt $Az \subseteqq zA$, und somit läßt sich der Satz 3. 2. 1 für den Beweis der Existenz des Einselementes in A anwenden. (2) Es seien A ein E_5-Ring, a ein solches Element von A mit $aA = A$, für das $a(1-b)A = (1-b)A \cdot a$ für jedes $b \in A$ gilt. Es gibt wegen $aA = A$ ein Element $c \in A$ mit $ac = a$, woraus wegen $(1-c)Aa = a(1-c)A = (a(1-c))A = 0.A = 0$ und wegen $aA = A$ bzw. wegen $A^2 = A$ folgt gewiß $(1-c)AaA = (1-c)A = 0$. Also ist c ein Linkseinselement von A, und da jedes Element von $A(1-c)$ ein Linksannullator des E_5-Ringes A ist, ergibt sich $A(1-c) = 0$, und somit ist c ein zweiseitiges Einselement von A, w. z. b. w.

Satz 3. 4. (1) *Ein beliebiger Ring A hat dann und nur dann ein Einselement, wenn A ein E_2-Ring mit einem Linksmultiplikator ist.* (2) *Ein beliebiger Ring A hat dann und nur dann ein Einselement, wenn A ein solcher E_2-Ring mit einem Rechtsmultiplikator ist, der keinen von Null verschiedenen Rechtsannullator besitzt.*

Beweis. Für die Notwendigkeit der Bedingungen in beiden Behauptungen bemerken wir, daß jeder E_0-Ring ein E_2-Ring ist. Ist nämlich e das Einselement eines E_0-Ringes A und ist M ein beliebiger A-Rechtsmodul, so ist Me wegen $MeA = MA \subseteqq M$ und $Me \supseteqq MeAe = MeA$ ein A-Rechtsmodul und $M(1-e)$ ist der maximale triviale A-untermodul von $M = M(1-e) \oplus Me$. Also folgt der Beweis des Hinreichens beider Bedingungen. (1) Es sei A ein E_2-Ring mit einem Linksmultiplikator $b \neq 0$. Dann gibt es eine ganze rationale Zahl n mit $(b+n)A = 0$. Hiernach gehört das Paar (b, n) aus der kanonischen Ringerweiterung A_1 von A mit einem Einselement zum maximalen trivialen Untermodul A_0 des A-Rechtsmoduls A_1 (vgl. mit dem Beweis des Satzes 2. 3. 1). Da A nach dem Satz 2. 3. 1 linksannullatorfrei ist, existiert zu jedem n höchstens ein (eventuell kein) $b \in A$ mit $(b, n) \in A_0$. Es sei nun $(a, m) \in A_0$ ein solches Paar, für das der absolute Wert $|m|$ minimal in der Menge aller $|n|$ mit $(b, n) \in A_0$ ist. Es kann offenbar $m > 0$ vorausgesetzt werden, denn A ist ein E_2-Ring und somit linksannullatorfrei. Gilt nun $n = mq + r$ mit $0 \leqq r < m$ für ein beliebiges Paar (b, n) von A_0, so erhält man wegen $(b - qa)x = bx - qax = -nx + qmx = -rx$ für jedes $x \in A$ gewiß $(b - qa, r) \in A_0$, was im Falle $r \neq 0$ der Minimalität von $|m|$ mit $(a, m) \in A_0$ widerspricht. Also $r = 0$ ist notwendig, und somit auch $(b - qa)x = 0$ für jedes $x \in A$. Da aber A keinen von Null verschiedenen Linksannullator besitzt (vgl. Satz 2. 3. 1), ergibt sich $b = qa$ und somit $(b, n) = q(a, m)$. Also ist die Abelsche Gruppe A_0^+ zyklisch und offenbar unendlich. Da A ein E_2-Ring ist, erhält man $A_1 = A_0 \oplus A_2$ mit einem A-Untermodul A_2 von A_1, und es gilt

$$(0, 1) = k(a, m) + (-ka, 1 - km)$$

mit $k(a, m) \in A_0$, $(-ka, 1 - km) \in A_0$ und mit einer ganzen rationalen Zahl k. Wegen $A_0 \neq 0$ ergibt sich $k \neq 0$. Da

$$(x, 0) = (0, 1)x = (-ka, 1 - km)a \in A_2$$

für jedes $x \in A$ gilt, erhält man wegen $(-ka, 0) \in A_2$ auch $(0, 1 - km) \in A_2$, woraus wegen $m(0, 1 - km) \in A_2$ gewiß

$$(1 - km)(a, m) = ((1 - km)a, 0) + (0, m(1 - km)) \in A_2 \cap A_0$$

und somit $1 - km = 0$ folgt, denn (a, m) erzeugt eine unendliche zyklische additive Gruppe. Wegen $m > 0$ und $km = 1$ ergibt sich $m = 1$, und somit ist $e = -a$ wegen $ax + x = 0$ für jedes $x \in A$ ein Linkseinselement von A. Da jedes Element von $A(1 - e)$ ein Linksannullator des E_2-Ringes A ist, gilt nach dem Satz 2. 3. 1 $A(1 - e) = 0$, und somit ist e das Einselement von A. (2) Zuerst zeigen wir, daß jeder Rechtsmultiplikator eines rechtsannullatorfreien Ringes A auch ein Linksmultiplikator ist, und somit läßt sich der Satz 3. 4. 1 zum Beweis des Satzes 3. 4. 2 anwenden. Es sei also A ein rechtsannulatorfreier Ring mit einem Rechtsmultiplikator a. Dann gibt es eine ganze rationale Zahl n mit $xa = nx$ für jedes $x \in A$, woraus man wegen $(xy)a = n(xy)$ auch

$$x(ya) = (xy)a = n(xy) = (nx)y = (xa)y = x(ay)$$

für jedes $x, y \in A$ erhält. Also gilt $x(ya - ay) = 0$ für jedes $x, y \in A$ und somit $A(ya - ay) = 0$ für jedes $y \in A$. Da aber A keinen von Null verschiedenen Rechtsannullator besitzt, ergibt sich $ya = ay$ für jedes $y \in A$ und somit $ay = ny$ für jedes $y \in A$. Also ist a auch ein Linksmultiplikator von A. Ist nun A insbesondere ein E_2-Ring, so hat A nach dem vorigen ein Einselement, w. z. b. w.

Zum Schluß möchte ich einige offene Fragen erwähnen.

Problem 1. Was ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die im Satz 2. 3. 4 vorkommende additive Untergruppe D ein Rechtsideal bzw. ein Ideal von B ist?

Problem 2. Gibt es einen von Null verschiedenen E_2-Ring, der ein Radikalring im Sinne von BROWN—MCCOY [2] ist?

Problem 3. (A. KERTÉSZ [10]) Hat jeder E_2-Ring ein Einselement?

Literaturverzeichnis

[1] R. BAER, Kriterien für die Existenz eines Einselementes in Ringen, *Math. Zeitschr.*, **56** (1952), 1—17.
[2] B. BROWN—N. H. MCCOY, The radical of a ring, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 495—499.
[3] L. FUCHS, *Abelian Groups* (Budapest, 1958).
[4] M. HALL, *The Theory of Groups* (New York, 1959).
[5] I. N. HERSTEIN, On torsion free Artin rings, *Ann. Univ. Sci. Budapest, sect. math.*, **7** (1964), 97—98.
[6] E. HILLE, *Functional Analysis and Semi-Groups* (Providence, 1948).
[7] CH. HOPKINS, Rings with minimal condition for left ideals, *Ann. of Math.*, **40** (1939), 712—730.
[8] N. JACOBSON, *Structure of Rings* (Providence, 1956).
[9] A. KERTÉSZ, A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 595—597.
[10] A. KERTÉSZ, *Über Artinsche Ringe* (im Erscheinen).
[11] G. MICHLER, Kleine Ideale, Radikale und die Eins in Ringen, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 231—252.
[12] L. RÉDEI, *Algebra*. I (Leipzig, 1959).
[13] E. SĄSIADA, Solution of the problem of existence of simple radical rings, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III., **9** (1961), 257.
[14] F. SZÁSZ, Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **11** (1963), 351—354.

(Eingegangen am 23. April 1966)