О многотактных автоматах

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)*)

Л. Кальмар в работе [1] ввел алгебраическую систему, которую можно рассматривать, как алгебраическую модель автоматической вычислительной машины. В одной из своих неопубликованных лекций им же был предложен упрощенный вариант этой модели, названный многотактным автоматом. В настоящей работе вводится понятие $\varkappa$-автомата, эквивалентное понятию многотактного автомата в отношении осуществимых ими отображений, допускающее, однако, более простой алгебраический подход. С помощью понятия $\varkappa$-автомата для многотактных автоматов Кальмара доказывается аналог некоторых результатов, полученных раньше для автоматов Мили.

§ 1

Система $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ называется *$\varkappa$-автоматом*, если X, A, Y — множества, $a_0 \in A$, δ — отображение множества $A \times \langle X \cup e\rangle$ в A, λ — отображение множества $A \times \langle X \cup e\rangle$ в свободную полугруппу $F(Y)$ с единичным элементом e, для которых выполняются

$$\delta(a, e)=a \quad \text{и} \quad \lambda(a, e)=e \qquad (a \in A). \tag{1}$$

(Множество X, A и Y называется множеством входных сигналов, состояний и выходных сигналов, соответственно, а a_0 — начальным состоянием. Функцию δ и λ назовем функцией переходов и выходов, соответственно.)

Символ e называется *пустым словом*. Его появление на входе или на выходе $\varkappa$-автомата означает отсутствие входного или выходного сигнала. Символ e не входит ни в множество X, ни в множество Y, его использование служит только для упрощения наших рассуждений.

$\varkappa$-автомат $\mathbf{A}$ называется *конечным*, если каждое из множеств X, A и Y является конечным.

Пусть $a \in A$ — любое состояние некоторого $\varkappa$-автомата $\mathbf{A}$. Мы говорим, что отображение $\varphi_a: F(X) \to F(Y)$ *индуцируется состоянием a $\varkappa$-автомата* $\mathbf{A}$,

*) F. Gécseg (Szeged).

если φ_a переводит произвольное слово $p = x_1 \ldots x_n \in F(X)$ в произведение $q_1 \ldots q_n$ слов $q_1, \ldots, q_n \in F(Y)$, определенных условиями

$$\delta(a, x_1) = a_1, \delta(a_1, x_2) = a_2, \ldots, \delta(a_{n-1}, x_n) = a_n \tag{2}$$

и

$$\lambda(a, x_1) = q_1, \lambda(a_1, x_2) = q_2, \ldots, \lambda(a_{n-1}, x_n) = q_n. \tag{3}$$

Отображением, *индуцируемым $\varkappa$-автоматом* **A** называется φ_{a_0}, индуцируемое начальным состоянием a_0 $\varkappa$-автомата **A**.

Система $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X, A', A'', a_0', Y, \delta', \delta'', \lambda', \lambda'')$ называется *многотактным автоматом Кальмара*, где

(I) A' — множество состояний покоя, $a_0' \in A'$,
(II) A'' — множество состояний работы,
(III) $A = A' \cup A''$ — множество состояний,
(IV) X — множество входных сигналов,
(V) Y — множество выходных сигналов,
(VI) $\delta' : A' \times X \to A$ — функция переходов при покое,
(VII) $\delta'' : A'' \to A$ — функция переходов при автоматическом режиме,
(VIII) $\lambda' : A' \times X \to Y$ — (частичная) функция выходов при покое,
(IX) $\lambda'' : A'' \to Y$ — (частичная) функция выходов при автоматическом режиме.

В согласии с нашим подходом предпологается, что функции λ' и λ'' вполне определенные (т. е. нечастичные), но в некоторых местах их значения равны пустому слову e.

Автомат **A** Кальмара называется *конечным*, если множества X, A и Y конечные, далее, существует натуральное число $k(\mathbf{A})$ так, что автомат **A** из любого состояния работы $a'' \in A''$ (автоматически) переходит в некоторое состояние покая в числе тактов, не превосходящем $k(\mathbf{A})$.

Отображения, индуцируемые автоматами Кальмара определяются аналогично отображениям, индуцируемым $\varkappa$-автоматами.

В дальнейшем мы занимаемся лишь *конечными инициальными* $\varkappa$-автоматами и *конечными инициальными* автоматами Кальмара.

Два автомата (любой из которых может быть либо $\varkappa$-автомат либо автомат Кальмара) с общими множествами входов и выходов называются *эквивалентными*, если они индуцируют одно и то же отображение.

Теперь покажем, что понятие $\varkappa$-автомата эквивалентно понятию автомата Кальмара в указанном выше смысле. Именно, имеет место следующее

Предложение 1. *Для произвольного автомата Кальмара существует эквивалентный ему $\varkappa$-автомат, с другой стороны, любой $\varkappa$-автомат эквивалентен некоторому автомату Кальмара.*

Рассмотрим произвольный многотактный автомат **A**. Состояние покоя $a' \in A'$ мы назовем *x-конечным состоянием*, если $\delta'(a', x)$ содержится в A'', т. е. $\delta'(a', x)$ — состояние работы. Пусть $\overline{\delta'(a', x)}$ обозначает состояние из A', в которое **A** автоматически переходит из состояния $\delta'(a', x)$ и обозначим через $\overline{\lambda'(a', x)}$ слово из $F(Y)$, которое автомат **A** выдает в течение этого автоматического перехода. Тогда, как легко усмотреть, $\varkappa$-автомат $\mathbf{B}=\mathbf{B}(X, B, b_0, Y, \delta, \lambda)$, для которого

(4) $$B = A'; b_0 = a_0',$$

(5) $$\delta(a', x) = \begin{cases} \delta'(a', x), & \text{если } a' \text{ — не } x\text{-конечное состояние;} \\ \overline{\delta'(a', x)}, & \text{если } a' \text{ — } x\text{-конечное состояние,} \end{cases}$$

(6) $$\lambda(a', x) = \begin{cases} \lambda'(a', x), & \text{если } a' \text{ — не } x\text{-конечное состояние,} \\ \overline{\lambda'(a', x)}, & \text{если } a' \text{ — } x\text{-конечное состояние,} \end{cases}$$

эквивалентен автомату Кальмара $\mathbf{A}$.

Обратно, пусть $\mathbf{B}=\mathbf{B}(X, B, b_0, Y, \delta, \lambda)$ — произвольный $\varkappa$-автомат. Предположим, что для некоторого $x \in X$ и $b \in B$ справедливо следующее соотношение

(7) $$\lambda(b, x) = y_1 \dots y_k \qquad (y_i \in Y; \quad i = 1, \dots, k),$$

где $k > 1$. Тогда, обозначим через (b, x) множество $\langle b_1^x, \dots, b_{k-1}^x \rangle$, где ни одного из символов b_i^x $(i=1, \dots, k-1)$ не содержится в B. Пусть B' — объединение множеств (b, x) для всех $b \in B$ и $x \in X$, удовлетворяющих условию (7). Нетрудно показать, что автомат Кальмара $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A', A'', a_0', Y, \delta', \delta'', \lambda', \lambda'')$, описанный в следующем, эквивалентен $\mathbf{B}$:

$$A' = B; \quad a_0' = b_0,$$

$$A'' = B',$$

$$\delta'(b, x) = \begin{cases} \delta(b, x), & \text{если } b \text{ и } x \text{ не удовлетворяют (7),} \\ b_1^x, & \text{если } b \text{ и } x \text{ удовлетворяют (7),} \end{cases}$$

$$\delta''(b_i^x) = \begin{cases} b_{i+1}^x, & \text{если } \quad i < k-1, \\ \delta(b, x), & \text{если } \quad i = k-1, \end{cases}$$

$$\lambda'(b, x) = \begin{cases} \lambda(b, x), & \text{если } b \text{ и } x \text{ не удовлетворяют (7),} \\ y_1, & \text{если } b \text{ и } x \text{ удовлетворяют (7),} \end{cases}$$

$$\lambda''(b_i^x) = y_{i+1} \qquad (i = 1, \dots, k-1).$$

Этим Предложение 1 полностью доказано.

§ 2

Пусть X — произвольное конечное множество. Тогда каждый $\varkappa$-автомат и автомат Кальмара с общим множеством X входных и выходных сигналов индуцирует отображение свободной полугруппы $F(X)$ с единичным элементом в себя. При данном X обозначим через K_X множество всех отображений, индуцирующихся автоматами Кальмара с общим множеством X входов и выходов. Всилу Предложения 1, множество K_X совпадает с множеством всех отображений, индуцируемых $\varkappa$-автоматами, обладающими с общим множеством X входных и выходных сигналов.

Покажем, что справедливо следущее

Предложение 2. *Множество K_X образует полугруппу относительно обычного произведения отображений.*

Пусть φ и ψ — отображения из K_X, индуцируемые $\varkappa$-автоматами $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, X, \delta, \lambda)$ и $\mathbf{B}=\mathbf{B}(X, B, b_0, X, \delta', \lambda')$, соответственно. Так как произведение отображений ассоциативно, то для доказательства Предложения 2 достаточно показать, что $\varphi\psi$ содержится в K_X. Это, однако, верно, потому что автомат $\mathbf{C}=\mathbf{C}(X, C, c_0, X, \delta'', \lambda'')$ для которого выполняются

$$C = A\times B; \quad c_0 = (a_0, b_0),$$
$$\delta''\big((a, b), x\big) = \big(\delta(a, x)), u[\delta'(b, \lambda(a, x))]\big), ^1)$$
$$\lambda''\big((a, b), x\big) = \lambda'\big(b, \lambda(a, x)\big),$$

является $\varkappa$-автоматом и $\mathbf{C}$ индуцирует $\varphi\psi$. Этим Предложение 2 доказано.

Автомат $\mathbf{C}$ называется *суперпозицией* $\varkappa$-автомата $\mathbf{A}$ с $\varkappa$-автоматом $\mathbf{B}$. Понятие суперпозиции естественным образом обобщается для произвольного вполне упорядоченного конечного множества $\varkappa$-автоматов.

Докажем, что K_X $(\overline{\overline{X}}\geqq 2)$ не обладает конечной системой образующих элементов. Прежде всего докажем лемму, из которой наше утверждение вытекает.

Пусть $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, X, \delta, \lambda)$ — произвольный $\varkappa$-автомат. Для всех троек $(\mathbf{A}, a, x)$, где состояние a и входный сигнал x произвольны из $\mathbf{A}$, можно однозначно сконструировать $\varkappa$-автомат $\mathbf{A}^{(a, x)}$ (ср. [2]) следующим образом: x — единственный входный сигнал, a — начальное состояние, $A^{(a, x)}$ — множество состояний, которое содержит, кроме a, все состояния вида $ax\ldots x$ автомата $\mathbf{A}$ (и только их); множество X — выходный алфавит, а функции перехода и выхода получаются из функций δ и λ путем ограничения их области определения парами $(\bar{a}, x)$, где $\bar{a}\in A^{(a, x)}$.

Покажем, что имеет место следующая

Лемма. *Если $\varkappa$-автомат $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, X, \delta, \lambda)$ представляется в виде суперпозиции $\varkappa$-автоматов $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(X, A_i, a_{i_0}, X, \delta_i, \lambda_i)$ $(i=1, \ldots, k)$, то для произвольного $a\in A$ и произвольного $x\in X$ автомат $\mathbf{A}^{(a, x)}$ имеет такое множество допустимых разбиений $\pi_0^*, \ldots, \pi_j^*$ $(\pi_l^*>\pi_{l+1}^*;\ l=0, \ldots, j-1)$, что для $0\leqq l\leqq j-1$ число классов разбиения π_{l+1}^*, входящих в произвольный класс разбиения π_l^*, не превосходит s, где $s=\max\limits_{1\leqq i\leqq k}\overline{\overline{A}}_i$.²)*

(Разбиение π множества состояний A $\varkappa$-автомата $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ называется *допустимым*, если для произвольных $x\in X$ и $a, a'\in A$ из $a\equiv a'(\pi)$ следует $\delta(a, x)\equiv\delta(a', x)$ (π); ср. [2].)

---

¹) $u(p)$ означает последную букву слова p.

²) Здесь π_0^* означает тривиальное разбиение, содержащее единственный класс, а π_j^* — разбиение, имеющее только одноэлементные классы.

Определим разбиения π_i $(1 \leqq i \leqq k)$ $\varkappa$-автомата **A** следующим образом: $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k) = a$ и $(a'_1, \ldots, a'_i, \ldots, a'_k) = a'$ принадлежат к одному и тому же классу по π_i, если $a_t = a'_t$ (при $t = 1, \ldots, i$). Покажем, что разбиения π_i — допустимы. Пусть $x \in X$ — произвольный входной сигнал. Тогда

$$\delta(a, x) = (a_1, q_1, \ldots, a_i, q_i, \ldots, a_k, q_k),$$
$$\delta(a', x) = (a'_1, q'_1, \ldots, a'_i, q'_i, \ldots, a'_k, q'_k).$$

Но, по определению суперпозиции, q_t $(1 \leqq t \leqq i)$ зависит только от x и $a_1, \ldots, a_{t-1}$. Поэтому, в силу равенств $a_1 = a'_1, \ldots, a_i = a'_i$ справедливы равенства $q_1 = q'_1, \ldots, q_i = q'_i$ и так имеют места $a_1, q_1 = a'_1, q'_1, \ldots, a_i, q_i = a'_i, q'_i$, т. е. $\delta(a, x) \equiv \delta(a', x)\,(\pi_i)$. Значит, разбиения π_i $(i = 1, \ldots, k)$ — допустимы. Обозначим через π_0 — тривиальное разбиение, содержащее единственный класс. Тогда $\pi_0 > \pi_1 > \ldots > \pi_k$, и легко убедиться, что число классов разбиения π_{m+1}, содержащихся в произвольном классе разбиения $\pi_m (0 \leqq m \leqq k-1)$ равно $\overline{\overline{A}}_{m+1}$, причем $\overline{\overline{A}}_{m+1} \leqq s$.

Пусть теперь разбиение π_i^* $(i = 0, \ldots, k)$ $\varkappa$-автомата $\mathbf{A}^{(a,x)}$ — следующее: $a \equiv a'(\pi_i^*)$ $(a, a \in A^{(a,x)})$ тогда и только тогда, если $a \equiv a'(\pi_i)$. Классы по π_i^* представляются в виде пересечений классов по π_i и множества $A^{(a,x)}$. Поэтому очевидно, что если множество разбиений $\langle \pi_i^* \rangle$ $\varkappa$-автомата $\mathbf{A}^{(a,x)}$ разделить на классы совпадающих разбиений и сохранить по одному разбиению из каждого такого класса, то для получаемого множества разбиений π_l^* $(l = 0, \ldots, j)$ утверждение Леммы выполняется.

Так как произвольный автомат Мили является $\varkappa$-автоматом, то из этой Леммы дословным повторением доказательства Теоремы работы [2] вытекает следующее

Предложение 3. *Если* $\overline{\overline{X}} \geqq 2$, *то полугруппа* K_X *не обладает конечной системой образующих элементов.*

Отметим, что А. Г. Курош предложил рассматривать отображения свободных полугрупп в себя, переводящие слова с одиноковыми начальными отрезками в такие же слова, но не сохраняющие объязательно длин слов. Исследованные автоматы являются в известном смысле решениями этой проблемы.

Литература

[1] Л. Кальмар, О вложении теории автоматических цифровых вычислительных машин в алгебраическую теорию автоматов Мура, Мили и Глушкова, *Сборник „Теория конечных и вероятностных автоматов"* (Москва, 1965), 93—99.

[2] Ф. Гечег, О группе взаимно однозначных преобразований, определенных конечными автоматами, *Кибернетика*, 1 (1965), 37—40.

(Поступило 27/VI/1966. г.)