Ergänzung zu einem Satz von S. Kaczmarz

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

Für ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ bezeichnet

$$L_n(\{\varphi_k\}; x) = \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt$$

die n-te Lebesguesche Funktion. Wir werden uns mit solchen Systemen beschäftigen, für die

(1) $$L_n(\{\varphi_k\}; x) = O(1).$$

Nach einem Satz von KACZMARZ [1] gilt die folgende Behauptung:

Ist (1) *erfüllt und gilt* $\sum a_k^2 < \infty$, *dann konvergiert die Reihe*

(2) $$\sum a_k \varphi_k(x)$$

fast überall.

Wir beweisen die folgende Umkehrung dieser Behauptung.

Satz. *Zu jeder Koeffizientenfolge* $\{a_k\}_1^\infty$ *mit*

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty$$

gibt es ein im Intervall $(0, 1)$ *orthonormiertes System* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *derart, daß* (1) *besteht und die Reihe* (2) *fast überall divergiert.*

Im Falle $a_k \geqq a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots)$ folgt diese Behauptung aus einem Satz von ULJANOV [2]; er hat nämlich den folgenden Satz bewiesen:

Ist $\{a_k\}$ *eine positive, monoton abnehmende Folge mit* (3), *dann divergiert die Haarsche Reihe* $\sum a_k \chi_k(x)$ *fast überall.*

§ 1. Vorbereitungen

Die Haarschen Funktionen $\chi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ sind folgenderweise definiert:

$$\chi_1(x)\equiv 1, \quad \chi_k(x)=\chi_m^{(l)}(x) \qquad (k=2^m+l;\ m=0, 1 \ldots;\ 1\leqq l\leqq 2^m),$$

wobei

$$\chi_m^{(l)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & (t\in((2k-2)/2^{m+1}, \quad (2k-1)/2^{m+1})), \\ -\sqrt{2^m} & (t\in((2k-1)/2^{m+1}; \quad 2k/2^{m+1})), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bekanntlich gilt

$$L_n(\{\chi_k\};\ x)\leqq 1 \qquad (0\leqq x\leqq 1;\ n=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

(Siehe z. B. ALEXITS [3], S. 46—50.)

Hilfssatz I. *Ist $\{b_k\}$ eine positive, monoton abnehmende Folge, dann gilt*

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{2^n} b_k \chi_k(x) \right| dx \geqq A \left\{ \sum_{k=1}^{2^n} b_k^2 \right\}^{1/2} \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

wobei $A(\leqq 1)$ eine positive, absolute Konstante bezeichnet.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe [2], Bemerkung an der Seite 935.)

Hilfssatz II. *Es sei N eine positive ganze Zahl und $\{b_k\}_1^{2^N}$ eine positive, monoton abnehmende Folge. Dann gibt es ein im Intervall*

$$0 \leqq x \leqq B^2 = \min\left(1, A^2 \sum_{k=1}^{2^N} b_k^2\right)$$

definiertes orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\psi_k(x)$ $(k=1, \ldots, 2^N)$ und eine einfache Menge [1] *$G(\subseteqq[0, B^2])$ mit*

$$\operatorname{mes}(G)\geqq B^2/4, \quad L_n(\{\psi_k\};\ x)\leqq 2 \qquad (0\leqq x\leqq B^2;\ n=1, 2, \ldots),$$

und

$$\left| \sum_{k=1}^{2^N} b_k \psi_k(x) \right| \geqq 1 \qquad (x\in G).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\sum_{k=1}^{2^N} b_k^2 \leqq 1$. Es sei C durch

$$C\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{2^N} b_k \chi_k(x) \right| dx = 2 \tag{5}$$

bestimmt. Es sei ferner $I_r=(c_r, d_r)$ $(r=1, \ldots, \varrho)$ eine Zerlegung von $(0, 1)$ in paarweise disjunkte Intervalle derart, daß jede Funktion $\chi_k(x)$ $(k=1, \ldots, 2^N)$ in jedem I_r

[1]) D. h. die Vereinigung endlich vieler Intervalle.

konstant ist. Den Wert der Summe $C\sum_{k=1}^{2^N} b_k\chi_k(x)$ im Intervall I_r bezeichnen wir mit w_r. Nach (5) ist

$$\sum_{r=1}^{\varrho} w_r \operatorname{mes}(I_r) = 2. \tag{6}$$

Es seien $1 \leqq r(1) < \dots < r(s) \leqq \varrho$ die Indizes r, für die $w_r \geqq 1$ ist. Nach (6) gilt

$$(2 \geqq) \sum_{i=1}^{s} w_{r(i)} \operatorname{mes}(I_{r(i)}) \geqq 1. \tag{7}$$

Es seien $J_r = (\gamma_r, \delta_r)$ $(r = 1, \dots, \varrho)$ nacheinander folgende Intervalle im Intervall $(0, 3)$ mit $\operatorname{mes}(J_r) = \operatorname{mes}(I_r)$ für $r \neq r(i)$ $(i = 1, \dots, s)$, und mit $\operatorname{mes}(J_{r(i)}) = w_{r(i)} \operatorname{mes}(J_{r(i)})$ $(i = 1, \dots, s)$. Ferner seien $\bar{J}_{r(i)} = (\bar{\gamma}_{r(i)}, \bar{\delta}_{r(i)})$ $(i = 1, \dots, s)$ nacheinander folgende Intervalle im Intervall $(3, 4)$ mit $\operatorname{mes}(\bar{J}_{r(i)}) = \operatorname{mes}(I_{r(i)})$ $(i = 1, \dots, s)$. Wir setzen

$$\bar{\psi}_k(x) = \begin{cases} \chi_k(x - \gamma_r + c_r) & (x \in J_r;\quad r \neq r(i);\quad i = 1, \dots, s), \\ \dfrac{1}{w_{r(i)}} \chi_k\left(\dfrac{x - \gamma_{r(i)}}{w_{r(i)}} + c_{r(i)}\right) & (x \in J_{r(i)};\quad i = 1, \dots, s), \\ \left(1 - \dfrac{1}{w_{r(i)}}\right)^{1/2} \chi_k(x - \bar{\gamma}_{r(i)} + c_{r(i)}) & (x \in \bar{J}_{r(i)};\quad i = 1, \dots, s), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(k = 1, \dots, 2^N)$. Auf Grund von (7) ist diese Definition möglich.

Die Treppenfunktionen $\bar{\psi}_k(x)$ bilden offensichtlich ein orthonormiertes System im Intervall $(0, 4)$. Wir setzen

$$\bar{G} = \bigcup_{i=1}^{s} J_{r(i)}.$$

Nach (7) ist

$$\operatorname{mes}(\bar{G}) \geqq 1. \tag{8}$$

Offensichtlich gilt

$$C\left|\sum_{k=1}^{2^N} b_k \bar{\psi}_k(x)\right| = 1 \qquad (x \in \bar{G}). \tag{9}$$

Auf Grund von (4), durch eine einfache Rechnung erhalten wir

$$L_n(\{\bar{\psi}_k\}; x) \leqq 2 \qquad (0 \leqq x \leqq 4;\ n = 1, \dots, 2^N). \tag{10}$$

Es sei

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{B} \bar{\psi}_k\left(\dfrac{4}{B^2} x\right) & (0 \leqq x \leqq B^2), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(k = 1, \dots, 2^N)$. Weiterhin soll G die Bildmenge von $\bar{G}$ bei der Transformation $y = 4^{-1}B^2x$ bezeichnen. Auf Grund des Hilfssatzes I, und der Relationen (5), (8), (9) und (10) ist es offensichtlich, daß die Menge G und das System $\{\psi_k(x)\}$ alle Bedingungen des Hilfssatzes II befriedigen.

Hilfssatz III. *Es sei* $\{c_k\}_1^\infty$ *eine reelle Zahlenfolge mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \infty. \tag{11}$$

Dann gibt es eine einfache Menge $H(\subseteqq[0,1])$ *mit* $\operatorname{mes}(H)=1/8$, *eine positive ganze Zahl* R *und ein in* $(0,1)$ *orthonormiertes Funktionensystem von Treppenfunktionen* $\omega_k(x)$ $(k=1,\ldots,R)$ *derart, daß*

$$L_n(\{\omega_k\};x) \leqq 2 \quad (0\leqq x\leqq 1;\, n=1,\ldots,R), \quad \max_{1\leqq n\leqq R}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\,\omega_k(x)\right| \geqq 1 \qquad (x\in H)$$

bestehen.

Beweis. Aus (11) folgt, daß eine der Reihen $\sum(c_k^+)^2$, $\sum(c_k^-)^2$ divergiert (c_k^+ bzw. c_k^- bezeichnet den positiven bzw. den negativen Teil von c_k). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{k(i)}^2 = \infty,$$

wobei $1\leqq k(1)<\ldots<k(i)<\ldots$ diejenigen Indizes k bezeichnen, für die $c_k>0$ ist. Die Indexfolge $I=\{k(i)\}_1^\infty$ kann man offensichtlich in paarweise disjunkte Folgen I_r $(r=1,2,\ldots)$ zerlegen, derart, daß jede Folge $\{c_k\}_{k\in I_r}$ $(r=1,2,\ldots)$ abnehmend ist. Weiterhin gibt es einen Index R und eine positive ganze Zahl p derart, daß

$$A^2\sum_{k\in I,\,k\leqq R} c_k^2 = A^2\sum_{r=1}^{p}\;\sum_{k\in I_r,\,k\leqq R} c_k^2 \geqq 1 \tag{12}$$

gilt. (A bezeichnet die Konstante im Hilfssatz I.)

Es sei

$$B_r^2 = A^2\sum_{k\in I,\,k\leqq R} c_k^2 \qquad (r=1,\ldots,p).$$

Wir wenden den Hilfssatz II auf die Folgen $\{c_k\}_{k\in I_r,\,k\leqq R}$ $(r=1,\ldots,p)$ an. Die entsprechenden Mengen, bzw. die entsprechenden orthonormierten Systeme bezeichnen wir mit G_r, bzw. mit $\{\psi_l^r(x)\}$ $(r=1,\ldots,p)$. Ein Funktionensystem $\{\bar\omega_k(x)\}_1^R$ definieren wir folgenderweise. Ist k das m-te Glied der Folge I_r, so setzen wir

$$\bar\omega_k(x) = \psi_m^r\left(\left(\sum_{i=1}^{r-1} B_i^2,\ \sum_{i=1}^{r} B_r^2\right);x\right).$$

Für die Indizes $k\notin I$, $k\leqq R$ seien $\bar\omega_k(x)$ der Reihe nach gleich den Funktionen $\chi_l\left(\left(\sum_{i=1}^{p} B_i^2,\ \sum_{i=1}^{p} B_i^2+1\right);x\right)$ $(k=1,2,\ldots)$. [2])

[2]) Für ein endliches Intervall $J=(a,b)$ und eine in (c,d) definierte Funktion $f(x)$ definieren wir

$$f(J;x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-a}{b-a}\,(d-c)+c\right) & (a<x<b),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die Treppenfunktionen $\bar{\omega}_k(x)$ $(k=1, \ldots, R)$ bilden in $(0, S^2)$ $\left(S^2=\sum_{i=1}^{p} B_i^2+1\right)$ offensichtlich ein orthonormiertes System. Nach (4) und dem Hilfssatz II gilt

(13) $$L_n(\{\bar{\omega}_k\}; x) \leqq 2 \qquad (0 \leqq x \leqq S^2;\ n=1, \ldots, R).$$

Es bezeichne $\bar{G}_r$ die Bildmenge von G_r bei der Transformation $y=x+\sum_{i=1}^{r-1} B_i^2$ und wir setzen

$$\bar{G}=\bigcup_{r=1}^{p} \bar{G}_r.$$

Auf Grund des Hilfssatzes II und von (12) ist

(14) $$\operatorname{mes}(\bar{G}) \geqq 1/4.$$

Weiterhin gilt nach dem Hilfssatz II

(15) $$\max_{1 \leqq n \leqq R}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{\omega}_k(x)\right| \geqq 1 \qquad (x \in \bar{G}).$$

Es sei

$$\omega_k(x)=S\bar{\omega}_k((0, 1); x) \qquad (k=1, \ldots, R),$$

und es bezeichne $\bar{H}$ die Bildmenge von G bei der Transformation $y=x/S^2$. Es sei endlich $H \subseteqq \bar{H}$ eine einfache Menge mit $\operatorname{mes}(H)=1/8$. Wegen $1 \leqq S^2 \leqq 1/2$ folgt aus (13), (14) und (15), daß die Menge H und das System $\{\omega_k(x)\}$ alle Bedingungen des Hilfssatzes III befriedigen.

§ 2. Beweis des Satzes

Für $m=2^s+l-2$ $(s=1, 2, \ldots;\ 1 \leqq l \leqq 2^s)$ sei $I_m=((l-1)/2^s,\ l/2^s)$. Weiterhin seien J_m $(m=1, 2, \ldots)$ Intervalle in $(0, 1)$ mit

(16) $$J_m \cap J_\mu=\emptyset \quad (m \neq \mu), \qquad \sqrt{\operatorname{mes}(J_m)}=\operatorname{mes}(I_m), \qquad I_m \cap J_m=\emptyset \quad (m=1, 2, \ldots).$$

(Solche Intervalle J_m kann man leicht angeben.)

Wegen (3), durch Anwendung des Hilfssatzes III können wir eine Indexfolge $(0=) R_0<\ldots<R_m<\ldots$, eine Folge von einfachen Mengen $H_m (\subseteqq [0, 1])$ $(m=1, 2, \ldots)$ und ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System $\{\omega_k^m(x)\}_{k=1}^{R_m-R_{m-1}}$ $(m=1, 2, \ldots)$ von Treppenfunktionen $\omega_k^m(x)$ angeben, derart, daß

(17) $$\operatorname{mes}(H_m)=1/8,$$

(18) $$L_n(\{\omega_k^m\}; x) \leqq 2 \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ n=1, \ldots, R_m-R_{m-1}),$$

(19) $$\max_{1 \leqq n \leqq R_m-R_{m-1}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{R_{m-1}+k}\, \omega_k^m(x)\right| \geqq 1 \qquad (x \in H_m)$$

für jedes m bestehen.

Durch Induktion werden wir ein in (0, 1) orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ und eine Folge von einfachen Mengen $G_m(\subseteqq I_m)$ $(m=1, 2, \ldots)$ mit den folgenden Eigenschaften angeben:

$$\text{mes}\,(G_m) = 1/8\,[\log_2 (m+1)],\ ^{3)} \tag{20}$$

$$\varphi_k(x) = 0 \qquad (x \notin I_m \cup J_m;\quad R_{m-1} < k \leqq R_m), \tag{21}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=R_{m-1}+1}^{n} \varphi_k(x)\,\varphi_k(t) \right| dt \leqq 4\,\text{mes}\,(I_m) \qquad (x \in I_m;\quad R_{m-1} < n \leqq R_m), \tag{22}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=R_{m-1}+1}^{n} \varphi_k(x)\,\varphi_k(t) \right| dt \leqq 4 \qquad (x \in J_m;\quad R_{m-1} < n \leqq R_m), \tag{23}$$

$$\max_{R_{m-1} < n \leqq R_m} \left| \sum_{k=R_{m-1}+1}^{n} a_k\,\varphi_k(x) \right| \geqq 1 \qquad (x \in G_m); \tag{24}$$

weiterhin sind die Mengen

$$F_s = \bigcup_{m=2^s-1}^{2^{s+1}-2} G_m$$

stochastisch unabhängig.

Es sei

$$\varphi_k(x) = \omega_k^1(I_1; x) + \left[\frac{1-\text{mes}\,(I_1)}{\text{mes}\,(J_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \omega_k^1(J_1; x) \qquad (k=1, \ldots, R_1).$$

G_1 bezeichnet die Bildmenge von H_1 bei der linearen Abbildung von (0, 1) auf I_1. Offensichtlich bilden diese Treppenfunktionen ein orthonormiertes System in (0, 1). Auf Grund von (16), (17), (18) und (19) ergibt sich durch eine einfache Rechnung, daß (20)—(24) für $m=1$ erfüllt sind. Es sei $m_0(>1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varphi_k(x)$ $(k=1, \ldots, R_{m_0-1})$ und die einfachen Mengen $G_m(\subseteqq I_m)$ $(m=1, \ldots, m_0-1)$ schon definiert sind, derart, daß diese Funktionen in (0, 1) ein orthonormiertes System bilden, (20)—(24) für $m=1, \ldots, m_0-1$ erfüllt sind und die Mengen $F_1, \ldots, F_q$ $(q=[\log_2 m_0])$ stochastisch unabhängig sind.

Dann kann man das Intervall I_{m_0} bzw. J_{m_0} in paarweise disjunkte Intervalle P_u $(1 \leqq u \leqq U)$, bzw. Q_v $(1 \leqq v \leqq V)$ zerlegen, derart, daß jede Funktion $\varphi_k(x)$ $(1 \leqq k \leqq R_{m_0-1})$ in jedem P_u, bzw. in jedem Q_v konstant ist, weiterhin jede Menge $I_{m_0} \cap G_m$ $(m=1, \ldots, m_0-1)$, die nicht leer ist, die Vereinigung gewisser P_u ist.

---

3) $[\alpha]$ bedeutet den ganzen Teil von α.

Die zwei Hälften von P_u, bzw. Q_v bezeichnen wir mit P'_u, P''_u, bzw. mit Q'_v, Q''_v. Wir setzen

$$\varphi_k(x) = \sum_{u=1}^{U} \omega_{R_{m_0-1}+k}^{m_0}(P'_u; x) - \sum_{u=1}^{U} \omega_{R_{m_0-1}+k}^{m_0}(P''_u; x) +$$

$$+\left[\frac{1-\operatorname{mes}(I_{m_0})}{\operatorname{mes}(J_{m_0})}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{v=1}^{V} \omega_{R_{m_0-1}+k}^{m_0}(Q'_v; x) - \sum_{v=1}^{V} \omega_{R_{m_0-1}+k}^{m_0}(Q''_v; x)\right)$$

$(k = R_{m_0-1}+1, \dots, R_{m_0})$. Weiterhin sei

$$G_{m_0} = \left(\bigcup_{u=1}^{U} H'(u)\right) \cup \left(\bigcup_{u=1}^{U} H''(u)\right),$$

wobei $H'(u)$, bzw. $H''(u)$ die Bildmenge von H_{m_0} bei der linearen Transformation bezeichnet, die $(0, 1)$ auf P'_u bzw. auf P''_u abbildet. Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\varphi_k(x)$ $(k = 1, \dots, R_{m_0})$ ein orthonormiertes System in $(0, 1)$ und ist die Menge G_{m_0} einfach. Aus (16)—(19) ergibt sich durch einfache Rechnung, daß (20)—(24) für $m = m_0$ erfüllt sind. Durch Fortsetzung dieser Konstruktion erhalten wir, daß die Mengen $F_1, \dots, F_{q+1}$ auch stochastisch unabhängig sind. Das System $\{\varphi_k(x)\}$ und die Mengenfolge $\{G_m\}$ erhalten wir durch Induktion.

Wegen (20) gilt

$$\operatorname{mes}(F_s) = 1/8.$$

Aus dem zweiten Borel—Cantellischen Lemmas ergibt sich also, daß $\operatorname{mes}(\overline{\lim}_{s\to\infty} F_s) = 1$. Auf Grund von (24) erhalten wir daraus, daß die Reihe (2) fast überall divergiert. Es sei $x \in (0, 1)$. Wegen (16) gilt $x \in J_m$ für höchstens ein m, weiterhin gibt es eine Indexfolge $\{m_s\}$ $(2^s - 1 \leqq m_s \leqq 2^{s+1} - 2;\ s = 1, 2, \dots)$ mit $x \notin I_m$ $(m \neq m_s;\ s = 1, 2, \dots)$. Auf Grund von (22), (23) und der Definition von I_m folgt hieraus

$$L_n(\{\varphi_k\}; x) = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(t)\right| dt \leqq 4 + 4\sum_{s=1}^{\infty} \operatorname{mes}(I_m) = 4\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s}$$

für jedes n.

Damit haben wir den Satz bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] S. Kaczmarz, Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 81—121.

[2] П. Л. Ульянов, О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами, *Изв. Акад. Наук СССР*, **28** (1964), 925—950.

[3] G. Alexits, *Convergence problems of orthogonal series* (Budapest, 1961).

(*Eingegangen am 28. Dezember 1966*)