Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de la fonction caractéristique

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Introduction

Soit T une contraction d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et soient D_T, D_{T^*} les opérateurs de défaut et $\mathfrak{D}_T$, $\mathfrak{D}_{T^*}$ les sous-espaces de défaut correspondants:

(0. 1) $$D_T = (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}, \quad D_{T^*} = (I-TT^*)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathfrak{D}_T = \overline{D_T\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*}\mathfrak{H}}.$$

La fonction caractéristique de T est alors définie par

(0. 2) $$\Theta_T(\lambda) = [-T+\lambda D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}D_T]|\mathfrak{D}_T;$$

c'est une fonction holomorphe dans le disque unité $|\lambda|<1$, à valeurs contractions de $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$, donc, en bref, $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ est une *fonction analytique contractive*. De plus, elle est contractive *pure*, c'est-à-dire que

$$\|\Theta_T(0)h\| < \|h\| \quad \text{pour tout} \quad h\in\mathfrak{D}_T, \quad h\neq 0$$

(d'ailleurs, grâce au principe de maximum, cela entraîne la même inégalité en tout point λ, $|\lambda|<1$). *Cf.* [VIII] ou [A], Chap. VI.

A toute décomposition $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$ de l'espace, engendrée par un sous-espace $\mathfrak{H}_1$ invariant pour T, il correspond une triangulation

(0. 3) $$T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix}$$

de T et une factorisation

(0. 4) $$\Theta_T(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$$

de sa fonction caractéristique en produit de deux fonctions analytiques contractives telles que la „partie pure" de $\Theta_i(\lambda)$ coïncide [1]) avec la fonction caractéristique de T_i $(i=1, 2)$.

Ce sont une partie des résultats de [IX] (théorème 1 et proposition 4. 3) ou de [A] (théorème 7.1), du moins pour des T complètement non-unitaires. On y a

---

[1]) On dit que les fonctions opératorielles $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'_*, \Theta'(\lambda)\}$ *coïncident* lorsqu'il existe des transformations unitaires $\tau: \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ et $\tau_*: \mathfrak{A}_*\to\mathfrak{A}'_*$ telles que $\Theta'(\lambda)\cdot\tau = \tau_*\cdot\Theta(\lambda)$.

démontré aussi que la factorisation (0. 4) jouit alors d'une certaine propriété additionnelle, appelée dans [A] „régularité", et que, inversement, chaque factorisation régulière de $\Theta_T(\lambda)$ engendre de cette façon un sous-espace invariant pour T. On a démontré de plus que même si la factorisation de $\Theta_T(\lambda)$ n'est pas régulière, il y correspond une triangulation analogue sinon de T mais du moins d'une contraction T' dont la partie complètement non-unitaire est égale à T.

Dans [IX] et [A], la démonstration de ces résultats a été basée sur l'étude de la dilatation unitaire de T et sur la représentation de Fourier de cette dilatation.

Dans la présente Note on fera usage d'un calcul direct, plutôt matriciel. Ce calcul ne fournit pas de critère pour qu'une factorisation de $\Theta_T(\lambda)$ corresponde à une triangulation de la contraction T elle-même (c'est-à dire la régularité de la factorisation), mais en revanche elle déduit des relations explicites entre l'opérateur X figurant dans la triangulation (0. 3) et les opérateurs unitaires qui réalisent la „coïncidence" des facteurs $\Theta_i(\lambda)$ avec les fonctions caractéristiques $\Theta_{T_i}(\lambda)$ $(i=1, 2)$. Ces relations ont été annoncées déjà dans [1]. La publication des détails a été retardée par d'autres préoccupations des auteurs, notamment par leur découverte de la régularité de la factorisation comme critère de ce que cette factorisation engendre une triangulation de T elle-même. Mais bien que cette découverte majorise en importance les résultats antérieurs en question, ceux-là gardent à notre avis un certain intérêt propre qui justifie leur publication en forme détaillée.

D'ailleurs, des problèmes semblables ont été étudiés déjà par BRODSKY—LIVŠITZ [2] et ŠMULYAN [3], mais cela seulement dans le cas des indices de défaut finis. Nos calculs s'appliquent au cas général.

Dans le § 1 on établira une représentation „paramétrique" de l'opérateur X figurant dans la forme triangulaire (0. 3) d'une contraction. Dans le § 2 on déduit de la triangulation (0. 3) la factorisation (0. 4) et cela indépendamment de ce que T est complètement non-unitaire ou non. Finalement, dans le § 3 on étudie le problème inverse; en partant d'une factorisation de la fonction caractéristique d'une contraction complètement non-unitaire T, on construit une triangulation correspondante sinon de T, mais du moins d'une contraction T' dont T est la partie complètement non-unitaire.

§ 1. Forme triangulaire d'un contraction

1. Supposons que T est une contraction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et que $\mathfrak{H}_1$ est un sous-espace de $\mathfrak{H}$, invariant pour T. Le sous-espace orthogonal complémentaire $\mathfrak{H}_2$ est alors invariant pour T^*; T et T^* prennent, en correspondance à la décomposition $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, les formes matricielles

$$T=\begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T^*=\begin{bmatrix} T_1^* & O \\ X^* & T_2^* \end{bmatrix}$$

où $T_1=T|\mathfrak{H}_1$, $T_2=(T^*|\mathfrak{H}_2)^*$ et où X est une transformation (linéaire bornée) de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{H}_1$ et par conséquent X^* une transformation de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}_2$. T_1 et T_2 sont évidemment des contractions. De plus on a

$$\begin{aligned} \|h_2\|^2 &\geqq \|Th_2\|^2=\|Xh_2\|^2+\|T_2h_2\|^2 \qquad (h_2\in\mathfrak{H}_2), \\ \|h_1\|^2 &\geqq \|T^*h_1\|^2=\|T_1^*h_1\|^2+\|X^*h_1\|^2 \qquad (h_1\in\mathfrak{H}_1). \end{aligned} \tag{1. 1}$$

Convenons des notations simplifiées suivantes pour les opérateurs de défaut: D pour D_T, D_* pour D_{T^*}, D_i pour D_{T_i} et D_{i*} pour $D_{T_i^*}$ $(i=1, 2)$; les sous-espaces de défaut correspondants seront désignés d'une manière analogue.

(1. 1) entraîne

(1. 2) $$\|Xh_2\| \leqq \|D_2 h_2\| \quad (h_2 \in \mathfrak{H}_2) \quad \text{et} \quad \|X^* h_1\| \leqq \|D_{1*} h_1\| \quad (h_1 \in \mathfrak{H}_1).$$

En vertu de la seconde de ces inégalités la transformation N déterminée par la formule

(1. 3) $$X^* h_1 = N D_{1*} h_1 \qquad (h_1 \in \mathfrak{H}_1)$$

applique $D_{1*}\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}_2$ linéairement et n'augmente pas la norme. Par conséquent, N s'étend par continuité à $\mathfrak{D}_{1*}$ et devient une contraction de $\mathfrak{D}_{1*}$ dans $\mathfrak{H}_2$; N^* sera alors une contraction de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{D}_{1*}$.

Cela étant, nous définissons par la formule

(1. 4) $$L D_2 h_2 = N^* h_2 \qquad (h_2 \in \mathfrak{H}_2)$$

une transformation L de $D_2\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{D}_{1*}$. Puisque D_2 et N^* sont linéaires, on pourra affirmer que L est univoque et linéaire dès qu'on montre que $D_2 h_2 = 0$ entraîne $N^* h_2 = 0$. Or, $D_2 h_2 = 0$ entraîne, en vertu de la première des inégalités (1. 2), $Xh_2 = 0$, d'où il s'ensuit

$$h_2 \perp X^* \mathfrak{H}_1 = N D_{1*} \mathfrak{H}_1, \quad N^* h_2 \perp D_{1*} \mathfrak{H}_1,$$

donc

(1. 5) $$N^* h_2 \perp \mathfrak{D}_{1*}.$$

Les valeurs de N^* étant toutes comprises dans $\mathfrak{D}_{1*}$, (1. 5) entraîne $N^* h_2 = 0$.

Ainsi, on sait déjà que L est une transformation linéaire de $D_2\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{D}_{1*}$. On va démontrer qu'elle est aussi continue, même une *contraction*.

Notons que par (1. 3) on a $X^* = N D_{1*}$, d'où $X = D_{1*} N^*$; vu (1. 4) cela entraîne

(1. 6) $$X = D_{1*} L D_2,$$

comme $T_1^* D_{1*} = D_1 T_1^*$, il s'ensuit

(1. 7) $$T_1^* X = D_1 T_1^* L D_2.$$

Pour $h = h_1 + h_2$ $(h_1 \in \mathfrak{H}_1,\ h_2 \in \mathfrak{H}_2)$ on aura

$$\|Dh\|^2 = \|h\|^2 - \|Th\|^2 = (\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2) - (\|T_1 h_1 + Xh_2\|^2 + \|T_2 h_2\|^2) =$$
$$= \|h_1\|^2 - \|T_1 h_1\|^2 + \|h_2\|^2 - \|T_2 h_2\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(T_1 h_1, Xh_2) - \|Xh_2\|^2,$$

donc, grâce à (1. 6) et (1. 7),

(1. 8) $$\begin{cases} \|Dh^2\| = \|D_1 h_1\|^2 + \|D_2 h_2\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(h_1, D_1 T_1^* L D_2 h_2) - \|D_{1*} L D_2 h_2\|^2 = \\ = \|D_1 h_1\|^2 + \|D_2 h_2\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(D_1 h_1, T_1^* L D_2 h_2) - \|L D_2 h_2\|^2 + \|T_1^* L D_2 h_2\|^2 = \\ = \|D_1 h_1 - T_1^* L D_2 h_2\|^2 + \|D_2 h_2\|^2 - \|L D_2 h_2\|^2. \end{cases}$$

En posant $g_1 = D_1 h_1$, $g_2 = D_2 h_2$, on obtient de (1. 8):

(1. 9) $$\|Lg_2\|^2 \leqq \|g_2\|^2 + \|g_1 - T_1^* L g_2\|^2.$$

Or, on a

$$T_1^* L g_2 = T_1^* L D_2 h_2 = T_1^* N^* h_2 \in T_1^* \mathfrak{D}_{1*} \subset \mathfrak{D}_1,$$

donc en choisissant $g_{1;} = D_1 h_{1_n} \to T_1^* L g_2$ il résulte $\|Lg_2\|^2 \leqq \|g_2\|^2$. Par conséquent L s'étend par continuité à une contraction de $\mathfrak{D}_2$ dans $\mathfrak{D}_{1*}$; L^* sera alors une contraction de $\mathfrak{D}_{1*}$ dans $\mathfrak{D}_2$.

2. Le résultat obtenu admet une réciproque. Notamment, si l'on se donne arbitrairement une contraction T_1 dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_1$, une contraction T_2 dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_2$ et une contraction L de l'espace $\mathfrak{D}_2 = \overline{D_2 \mathfrak{H}_2}$ dans l'espace $\mathfrak{D}_{1*} = \overline{D_{1*} \mathfrak{H}_1}$, la transformation T de $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, définie par la matrice

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad X = D_{1*} L D_2,$$

sera une contraction de $\mathfrak{H}$.

En effet, faisant usage de nouveau de la relation $T_1^* D_{1*} = D_1 T_1^*$, on obtient

$$\begin{aligned} \|T(h_1 \oplus h_2)\|^2 &= \|T_1 h_1 + X h_2\|^2 + \|T_2 h_2\|^2 = \\ &= \|T_1 h_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(T_1 h_1, X h_2) + \|X h_2\|^2 + \|T_2 h_2\|^2 = \\ &= \|T_1 h_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(D_1 h_1, T_1^* L D_2 h_2) + \|L D_2 h_2\|^2 - \|T_1^* L D_2 h_2\|^2 + \|T_2 h_2\|^2 = \\ &= \|T_1 h_1\|^2 - \|D_1 h_1 - T_1^* L D_2 h_2\|^2 + \|D_1 h_1\|^2 + \|L D_2 h_2\|^2 + \|T_2 h_2\|^2 \leqq \\ &\leqq \|T_1 h_1\|^2 + \|D_1 h_1\|^2 + \|D_2 h_2\|^2 + \|T_2 h_2\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 = \|h_1 \oplus h_2\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré le suivant

Théorème 1. *Pour que la transformation linéaire*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix}$$

de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ soit une contraction il faut et il suffit que T_1 et T_2 soient des contractions de $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$, selon les cas, et que X soit de la forme $X = D_{1*} L D_2$ où L est une contraction de $\mathfrak{D}_2$ dans $\mathfrak{D}_{1*}$, d'ailleurs quelconque.

3. Si T est complèment non-unitaire, il est manifeste que T_1 et T_2 le sont aussi. Par contre, T_1 et T_2 peuvent être complètement non-unitaires sans que T le soit aussi. Un exemple simple est fourni, dans l'espace $\mathfrak{H} = l^2$ des suites numériques bilatérales $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$, par la translation bilatérale $T\{x_k\} = \{x_{k-1}\}$ et le sous-espace $\mathfrak{H}_1$, invariant pour T, des vecteurs tels que $x_{-1} = x_{-2} = \ldots = 0$. $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ est alors constitué des vecteurs tels que $x_0 = x_1 = \ldots = 0$. $T_1 = T | \mathfrak{H}_1$ est une translation unilatérale et $T_2 = (T^* | \mathfrak{H}_2)^*$ est l'adjoint d'une translation unilatérale, donc $T_1^{*n} \to O$ et $T_2^n \to O$. Ainsi, T_1 et T_2 sont complètement non-unitaires, tandis que T est unitaire.

Voici une condition simple sur l'opérateur de "couplage" L qui assure que T soit aussi complètement non-unitaire:

Pour T_1, T_2 complètement non-unitaires, T sera aussi complètement non-unitaire si L est tel que

$$\|Lg_2\| < \|g_2\|, \quad \|L^* g_1\| < \|g_1\| \quad \textit{pour} \quad g_2 \in D_2 \mathfrak{H}_2, \quad g_1 \in D_{1*} \mathfrak{H}_1 \quad (g_2 \neq 0, \quad g_1 \neq 0), \tag{1.10}$$

donc en particulier si $\|L\| < 1$.

A cet effet, observons d'abord que, en vertu des formules précédant le théorème 1, l'équation $\|Th\| = \|h\|$ pour un $h = h_1 \oplus h_2$ entraîne $\|LD_2h_2\| = \|D_2h_2\|$ et $D_1h_1 - T_1^*LD_2h_2 = 0$, d'où, par (1. 10), $D_2h_2 = 0$ et par suite $D_1h_1 = 0$, $Xh_2 = = D_{1*}LD_2h_2 = 0$, $Th = T_1h_1 \oplus T_2h_2$. Lorsqu'on a $\|T^nh\| = \|h\|$ pour un h et pour $n = 1, 2, \ldots$, il s'ensuit successivement: $T^nh = T_1^nh_1 \oplus T_2^nh_2$, $D_1T_1^nh_1 = 0$, $D_2T_2^nh_2 = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, d'où $\|T_i^nh_i\| = \|T_i^{n+1}h_i\|$ $(n = 0, 1, \ldots; i = 1, 2)$. Lorsqu'on a de plus, pour le même h, $\|T^{*n}h\| = \|h\|$ (n $= 1, 2, \ldots$), on déduit d'une manière analogue les mêmes égalités pour T_i^* au lieu de T_i $(i = 1, 2)$ et par conséquent on a, dans ce cas, $\|T_i^nh_i\| = \|h_i\| = \|T_i^{*n}h_i\|$ $(n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2)$. Cela entraîne $h_i = 0$ $(i = 1, 2)$, donc $h = 0$. Par conséquent T est complètement non-unitaire.

§ 2. Factorisation de la fonction caractéristique engendrée par une triangulation

Soit $T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix}$ une contraction de l'espace $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, avec $X = D_{1*}LD_2$. Nous allons rechercher les relations entre les fonctions caractéristiques de T, T_1 et T_2, c'est-à-dire les fonctions

$$\{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_*, \Theta_T(\lambda)\}, \quad \{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_{1*}, \Theta_{T_1}(\lambda)\} \quad \text{et} \quad \{\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_{2*}, \Theta_{T_2}(\lambda)\}.$$

Introduisons aussi les opérateurs

$$D_L = (I_{\mathfrak{D}_2} - L^*L)^{\frac{1}{2}}, \quad D_{L^*} = (I_{\mathfrak{D}_{1*}} - LL^*)^{\frac{1}{2}}$$

et les sous-espaces de défaut correspondants

$$\mathfrak{D}_L = \overline{D_L\mathfrak{D}_2}, \quad \mathfrak{D}_{L^*} = \overline{D_{L^*}\mathfrak{D}_{1*}}.$$

On déduit de (1. 8):

$$\|Dh\|^2 = \|D_1h_1 - T_1^*LD_2h_2\|^2 + \|D_LD_2h_2\|^2. \tag{2. 1}$$

Puisque

$$T_1^*LD_2h_2 \in T_1^*\mathfrak{D}_{1*} \subset \mathfrak{D}_1 \tag{2. 2}$$

et

$$D_LD_2h_2 \in D_L\mathfrak{D}_2, \tag{2. 3}$$

la formule

$$\sigma Dh = (D_1h_1 - T_1^*LD_2h_2) \oplus D_LD_2h_2 \qquad (h_1 \in \mathfrak{H}_1, \quad h_2 \in \mathfrak{H}_2, \quad h = h_1 \oplus h_2) \tag{2. 4}$$

définit, en vertu de (2. 1)—(2. 3), une application isométrique σ de $D\mathfrak{H}$ dans l'espace

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_L; \tag{2. 5}$$

σ s'étend par continuité à une application isométrique de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{S}$. Montrons que σ applique $\mathfrak{D}$ même *sur* $\mathfrak{S}$. Cela s'ensuit d'une part de ce que

$$\sigma Dh_1 = D_1h_1 \oplus 0 \quad \text{pour} \quad h = h_1 \in \mathfrak{H}_1,$$

d'autre part de ce que, pour h_2 fixé arbitraire,

$$\sigma D(h_1^{(n)} + h_2) \to 0 \oplus D_LD_2h_2 \qquad (n \to \infty)$$

si la suite $h_1^{(n)} \in \mathfrak{H}_1$ est choisie de la sorte que

$$D_1 h_1^{(n)} \to T_1^* L D_2 h_2 \qquad (n \to \infty),$$

ce qui est possible en vertu de (2. 2).

Des résultats analogues peuvent être obtenus pour D_* au lieu de D. Au lieu de répéter tous les calculs, on y arrive plus simplement en observant que, lorsqu'on donne le rôle de T à T^*, la situation sera inaltérée si en même temps on échange les rôles des sous-espaces $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ et on remplace T_1 par T_2^*, T_2 par T_1^*, et L par L^*. De cette façon il résulte que la formule

$$\text{(2. 6)} \qquad \begin{gathered} \sigma_* D_* h = (-T_2 L^* D_{1*} h_1 + D_{2*} h_2) \oplus D_{L^*} D_{1*} h_1 \\ (h_1 \in \mathfrak{H}_1, \quad h_2 \in \mathfrak{H}_2, \quad h = h_1 \oplus h_2) \end{gathered}$$

définit une transformation isométrique σ_* de $D_*\mathfrak{H}$ dans

$$\text{(2. 7)} \qquad \mathfrak{S}_* = \mathfrak{D}_{2*} \oplus \mathfrak{D}_{L^*},$$

qui s'étend par continuité à une transformation unitaire de $\mathfrak{D}_*$ sur $\mathfrak{S}_*$.

On peut écrire (2. 4) et (2. 6) aussi sous la forme

$$\text{(2. 8)} \qquad \sigma D h = \begin{bmatrix} D_1 & -T_1^* L D_2 \\ O & D_L D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_* D_* h = \begin{bmatrix} -T_2 L^* D_{1*} & D_{2*} \\ D_{L^*} D_{1*} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = h_1 \oplus h_2 = h.$$

Pour calculer la fonction caractéristique de T, notons d'abord qu'une matrice de type $\begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix}$, aux éléments opérateurs dont A et C sont inversibles, est aussi inversible et

$$\begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1} B A^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

Il s'ensuit pour $|\lambda| < 1$:

$$\text{(2. 9)} \qquad \begin{aligned} (I - \lambda T^*)^{-1} (\lambda I - T) &= \begin{bmatrix} I_1 - \lambda T_1^* & O \\ -\lambda X^* & I_2 - \lambda T_2^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda I_1 - T_1 & -X \\ O & \lambda I_2 - T_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (I_1 - \lambda T_1^*)^{-1} (\lambda I_1 - T_1) & -(I_1 - \lambda T_1^*)^{-1} X \\ A(\lambda I_1 - T_1) & -AX + (I_2 - \lambda T_2^*)^{-1} (\lambda I_2 - T_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où

$$A = (I_2 - \lambda T_2^*)^{-1} \lambda X^* (I_1 - \lambda T_1^*)^{-1}.$$

Nous ferons usage de la formule

$$\text{(2. 10)} \qquad \Theta_T(\lambda) D = D_* (I - \lambda T^*)^{-1} (\lambda I - T) \qquad (D = D_T, \ D_* = D_{T^*})$$

pour la fonction caractéristique de T, et de la même formule pour T_1 et T_2; *cf* [VIII], (2. 3), ou [A] Chap. VI.

En désignant par **M** la matrice au dernier membre de (2. 9) et par **N** la matrice

$$\begin{bmatrix} -T_2 L^* D_{1*} & D_{2*} \\ D_{L^*} D_{1*} & O \end{bmatrix},$$

il dérive de (2. 8), (2. 9) et (2. 10) que

$$\sigma_* \Theta_T(\lambda) Dh = \sigma_* D_*(I-\lambda T^*)^{-1}(\lambda I - T)h = \mathbf{N}\cdot\mathbf{M}h.$$

Calculons le produit matriciel $\mathbf{N}\cdot\mathbf{M}$. Pour le terme de rang 11 nous obtenons:

$$-T_2 L^* D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1}(\lambda I_1 - T_1) + D_{2*}(I_2-\lambda T_2^*)^{-1}\lambda X^*(I_1-\lambda T_1^*)^{-1}(\lambda I_1 - T_1) =$$
$$= [-T_2 + \lambda D_{2*}(I_2-\lambda T_2^*)^{-1} D_2] L^* D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1}(\lambda I_1 - T_1) =$$
$$= \Theta_{T_2}(\lambda) L^* \Theta_{T_1}(\lambda) D_1,$$

et pour le terme de rang 12:

$$T_2 L^* D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} X - D_{2*}(I_2-\lambda T_2^*)^{-1}\lambda X^*(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} X +$$
$$+ D_{2*}(I_2-\lambda T_2^*)^{-1}(\lambda I_2 - T_2) =$$
$$= -[-T_2 + \lambda D_{2*}(I_2-\lambda T_2^*)^{-1} D_2] L^* D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} D_{1*} L D_2 +$$
$$+ D_{2*}(I_2-\lambda T_2^*)^{-1}(\lambda I_2 - T_2) =$$
$$= -\Theta_{T_2}(\lambda) L^* D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} D_{1*} L D_2 + \Theta_{T_2}(\lambda) D_2 =$$
$$= \Theta_{T_2}(\lambda)[-L^* D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} D_{1*} L + I_{\mathfrak{D}_2}] D_2.$$

Or, on a

$$D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} D_{1*}|\mathfrak{D}_{1*} = D_{1*}[I_1 + \lambda(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} T_1^*] D_{1*}|\mathfrak{D}_{1*} =$$
$$= [I_1 - T_1 T_1^* + \lambda D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} D_1 T_1^*]|\mathfrak{D}_{1*},$$

d'où

(2. 11) $$D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} D_{1*}|\mathfrak{D}_{1*} = [I_1 + \Theta_{T_1}(\lambda) T_1^*]|\mathfrak{D}_{1*}.$$

Donc le terme de rang 12 est égal à

$$\Theta_{T_2}(\lambda)[D_L^2 - L^* \Theta_{T_1}(\lambda) T_1^* L] D_2.$$

Le terme de rang 21 est évidemment égal à $D_{L^*}\Theta_{T_1}(\lambda) D_1$. Finalement, pour le terme 22 on obtient, grâce à (2. 11),

$$-D_{L^*} D_{1*}(I_1-\lambda T_1^*)^{-1} D_{1*} L D_2 = -D_{L^*}[I_1 + \Theta_{T_1}(\lambda) T_1^*] L D_2 =$$
$$= -D_{L^*}\Theta_{T_1}(\lambda) T_1^* L D_2 - L D_L D_2.$$

Ainsi, on aura

$$\sigma_* \Theta_T(\lambda) Dh =$$
$$= \begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) L^* \Theta_{T_1}(\lambda) D_1 & -\Theta_{T_2}(\lambda) L^* \Theta_{T_1}(\lambda) T_1^* L D_2 + \Theta_{T_2}(\lambda) D_L^2 D_2 \\ D_{L^*}\Theta_{T_1}(\lambda) D_1 & -D_{L^*}\Theta_{T_1}(\lambda) T_1^* L D_2 - L D_L D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

La matrice obtenue se factorise en

$$\begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) L^* \Theta_{T_1}(\lambda) & \Theta_{T_2}(\lambda) D_L \\ D_{L^*}\Theta_{T_1}(\lambda) & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & -T_1^* L D_2 \\ O & D_L D_2 \end{bmatrix};$$

en désignant le premier facteur par $\Omega(\lambda)$ et en rappelant (2. 8) on aura donc

$$\sigma_* \Theta_T(\lambda) Dh = \Omega(\lambda) \sigma Dh.$$

Comme les éléments de la forme Dh sont denses dans $\mathfrak{D}$, qui est le domaine de définition de $\Theta_T(\lambda)$ ainsi que de σ, cela entraîne

$$\sigma_* \Theta_T(\lambda) = \Omega(\lambda)\sigma.$$

Par conséquent

$$\sigma_* \Theta_T(\lambda)\sigma^{-1} = \Omega_0(\lambda)$$

où $\Omega_0(\lambda)$ désigne la restriction de $\Omega(\lambda)$ à $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_L$, donc

$$\Omega_0(\lambda) = \begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) L^* \Theta_{T_1}(\lambda) & \Theta_{T_2}(\lambda)[D_L]_0 \\ D_{L^*}\Theta_{T_1}(\lambda) & -[L]_0 \end{bmatrix}$$

où $[\ ]_0$ indique la restriction à $\mathfrak{D}_L$. D'ailleurs cela s'écrit aussi sous la forme

$$\Omega_0(\lambda) = \begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{D}_{L^*}} \end{bmatrix} \omega \begin{bmatrix} \Theta_{T_1}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{D}_L} \end{bmatrix}$$

où

$$\omega = \begin{bmatrix} L^* & [D_L]_0 \\ D_{L^*} & -[L]_0 \end{bmatrix}. \tag{2. 12}$$

Ce facteur ω est une application unitaire de l'espace

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_{1*} \oplus \mathfrak{D}_L$$

sur l'espace

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{D}_2 \oplus \mathfrak{D}_{L^*}.$$

Pour démontrer cette assertion, observons d'abord que pour $p = u \oplus v$ ($u \in \mathfrak{D}_{1*}$, $v \in \mathfrak{D}_L$) on a

$$\begin{aligned}\|\omega p\|^2 &= \|L^*u + D_L v\|^2 + \|D_{L^*}u - Lv\|^2 = \\ &= \|L^*u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(L^*u, D_L v) + \|D_L v\|^2 + \|D_{L^*}u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(D_{L^*}u, Lv) + \|Lv\|^2 = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

parce que

$$\|L^*u\|^2 + \|D_{L^*}u\|^2 = \|u\|^2, \quad \|D_L v\|^2 + \|Lv\|^2 = \|v\|^2, \quad LD_L = D_{L^*}L.$$

Comme de plus on a

$$L^*u + D_L v \in L^*\mathfrak{D}_{1*} + D_L \mathfrak{D}_L \subset \mathfrak{D}_2$$

et [2])

$$D_{L^*}u - Lv \in D_{L^*}\mathfrak{D}_{1*} + L\mathfrak{D}_L \subset \mathfrak{D}_{L^*},$$

il résulte que ω applique $\mathfrak{P}$ isométriquement dans $\mathfrak{P}'$. Soit $p' = u' \oplus v' \in \mathfrak{P}'$, orthogonal à $\omega\mathfrak{P}$, donc tel que

$$0 = (u', L^*u + D_L v) + (v', D_{L^*}u - Lv) = (Lu' + D_{L^*}v', u) + (D_L u' - L^*v', v)$$

---

[2]) Notons que $\overline{L\mathfrak{D}_L} = \overline{L\overline{D_L\mathfrak{D}_2}} = \overline{LD_L\mathfrak{D}_2} = \overline{D_{L^*}L\mathfrak{D}_2} \subset \overline{D_{L^*}\mathfrak{D}_{1*}} = \mathfrak{D}_{L^*}$.

pour tout $u \oplus v \in \mathfrak{P}$. Puisque

$$Lu' + D_{L^*}v' \in L\mathfrak{D}_2 + D_{L^*}\mathfrak{D}_{L^*} \subset \mathfrak{D}_{1*}$$

et [3])

$$D_L u' - L^* v' \in D_L \mathfrak{D}_2 + L^* \mathfrak{D}_{L^*} \subset \mathfrak{D}_L,$$

cela entraîne $Lu' + D_{L^*}v' = 0$, $D_L u' - L^* v' = 0$, donc

$$u' = D_L^2 u' + L^* L u' = D_L(L^* v') + L^*(-D_{L^*}v') = (D_L L^* - L^* D_{L^*})v' = 0,$$

$$v' = D_{L^*}^2 v' + LL^* v' = -D_{L^*}Lu' + LD_L u' = 0,$$

$$p' = u' \oplus v' = 0.$$

Cela prouve que $\omega\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$.

Ainsi, nous avons obtenu le suivant résultat:

Théorème 2. *Soit* $T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix}$ *une contraction de l'espace* $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, *avec* $X = D_{1*}LD_2$. *Les fonctions caractéristiques des contractions* T, T_1 *et* T_2 *sont alors reliées par la formule de factorisation:*

$$\Theta_T(\lambda) = \sigma_*^{-1} \begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{D}_{L^*}} \end{bmatrix} \omega \begin{bmatrix} \Theta_{T_1}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{D}_L} \end{bmatrix} \sigma$$

où σ, σ_*, ω *sont les transformations unitaires constantes*

$$\sigma\colon\ \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_L, \quad \sigma_*\colon\ \mathfrak{D}_* \to \mathfrak{D}_{2*} \oplus \mathfrak{D}_{L^*}, \quad \omega\colon\ \mathfrak{D}_{1*} \oplus \mathfrak{D}_L \to \mathfrak{D}_2 \oplus \mathfrak{D}_{L^*},$$

déterminées par les formules (2. 8) *et* (2. 12). *En particulier, le terme* $\omega_{1*,2}$ *de la matrice de* ω *est égal à* L^*.

§ 3. Triangulation engendrée par une factorisation de la fonction caractéristique

1. Le théorème 2 admet la suivante réciproque:

Théorème 3. *Soient* T_1, T_2 *des contractions dans les espaces* $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$, *et soient* $\{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_{1*}, \Theta_{T_1}(\lambda)\}$, $\{\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_{2*}, \Theta_{T_2}(\lambda)\}$ *leurs fonctions caractéristiques. Supposons qu'il existe des espaces* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_*$ *et une transformation unitaire*

$$\omega\colon\ \mathfrak{D}_{1*} \oplus \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}_2 \oplus \mathfrak{F}_*,$$

tels que la fonction analytique contractive $\{\mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{F}, \mathfrak{D}_{2*} \oplus \mathfrak{F}_*, \Theta(\lambda)\}$, *définie par*

$$\Theta(\lambda) = \begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{F}_*} \end{bmatrix} \omega \begin{bmatrix} \Theta_{T_1}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{F}} \end{bmatrix}, \tag{3. 1}$$

soit pure. Il existe alors une contraction T *dans* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, *de la forme*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix},$$

dont la fonction caractéristique coïncide avec $\Theta(\lambda)$; *on peut choisir* $X = D_{1*}LD_2$ *où* $L = P_{\mathfrak{D}_{1*}}\omega^* | \mathfrak{D}_2$.

[3]) La relation $\overline{L^*\mathfrak{D}_{L^*}} \subset \mathfrak{D}_L$ se démontre tout comme celle analogue $\overline{L\mathfrak{D}_L} \subset \mathfrak{D}_{L^*}$.

Démonstration. Soit

$$\omega^* = \begin{bmatrix} L & M \\ N & K \end{bmatrix}$$

la matrice de ω^* comme transformation (unitaire) de $\mathfrak{D}_2 \oplus \mathfrak{F}_*$ sur $\mathfrak{D}_{1*} \oplus \mathfrak{F}$; L est donc une contraction de $\mathfrak{D}_2$ dans $\mathfrak{D}_{1*}$, M est une contraction de $\mathfrak{F}_*$ dans $\mathfrak{D}_{1*}$ (et par conséquent M^* une contraction de $\mathfrak{D}_{1*}$ dans $\mathfrak{F}_*$), etc. Posons

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \ominus \overline{N\mathfrak{D}_2}, \quad \mathfrak{F}'_* = \mathfrak{F}_* \ominus \overline{M^*\mathfrak{D}_{1*}} \tag{3.2}$$

et soit $f'_* \in \mathfrak{F}'_*$. On a alors $Mf'_* = 0$, donc $\omega^* f'_* = Kf'_*$ et par suite $\|f'_*\| = \|\omega^* f'_*\| = \|Kf'_*\|$, d'où, comme $\|K\| \leqq 1$,

$$f'_* = K^*Kf'_*, \quad Kf'_* = KK^*Kf'_*.$$

Posons $f = Kf'_*$; comme $f'_* \in \mathfrak{F}_*$, on a $f \in \mathfrak{F}$, d'où

$$\|f\|^2 = \|\omega f\|^2 = \|N^*f\|^2 + \|K^*f\|^2.$$

D'autre part, on a $f = KK^*f$, d'où $\|f\| = \|K^*f\|$. On conclut $N^*f = 0$, d'où $f \perp \overline{N\mathfrak{D}_2}$ et par suite $f \in \mathfrak{F}'$. Donc $\omega^*\mathfrak{F}'_* (= K\mathfrak{F}'_*) \subset \mathfrak{F}'$. On montre de la même manière que $\omega\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}'_*$. Ces deux relations entraînent que $\omega\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'_*$.

Soit $f' \in \mathfrak{F}'$. Comme $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ et $\omega\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'_* \subset \mathfrak{F}_*$, on déduit de (3. 1) que $\Theta(\lambda)f' = \omega f'$, donc $\|\Theta(\lambda)f'\| = \|f'\|$ $(|\lambda| < 1)$, en particulier $\|\Theta(0)f'\| = \|f'\|$, d'où $f' = 0$ parce que $\Theta(\lambda)$ est une fonction contractive pure. On a donc $\mathfrak{F}' = \{0\}$ et par suite $\mathfrak{F}'_* = \omega\mathfrak{F}' = \{0\}$. Vu (3. 2) cela entraîne

$$\overline{N\mathfrak{D}_2} = \mathfrak{F}, \quad \overline{M^*\mathfrak{D}_{1*}} = \mathfrak{F}_*. \tag{3.3}$$

Attachons au terme L de la matrice ω^* les opérateurs et les sous-espaces de défaut comme dans le paragraphe précédent. Pour $u \in \mathfrak{D}_2$ nous avons

$$\|u\|^2 = \|\omega^* u\|^2 = \|Lu\|^2 + \|Nu\|^2, \quad \text{d'où} \quad \|D_L u\|^2 = \|Nu\|^2.$$

La transformation $Nu \to D_L u$ $(u \in \mathfrak{D}_2)$ est donc isométrique et se complète par suite à une transformation unitaire

$$Y\colon \quad \overline{N\mathfrak{D}_2} = \mathfrak{F} \to \overline{D_L\mathfrak{D}_2} = \mathfrak{D}_L.$$

On a donc $YN = D_L$, $N^*Y^* = (D_L)^* = D_L$, $N^* = N^*Y^*Y = D_L Y$ et par conséquent, en désignant par $[\;]_0$ toujours la restriction à $\mathfrak{D}_L$,

$$N^* = [D_L]_0 Y. \tag{3.4}$$

Donnons le rôle de $\Theta(\lambda)$ à $\Theta^\sim(\lambda) = \Theta(\bar{\lambda})^*$, qui est aussi une fonction analytique contractive pure, et considérons la relation qui dérive de (3. 1) pour $\Theta^\sim(\lambda)$; il résulte par les mêmes raisonnements que ci-dessus qu'il existe une transformation unitaire

$$Z\colon \quad \mathfrak{F}_* \to \mathfrak{D}_{L^*}$$

telle que

$$ZM^* = D_{L^*}. \tag{3.5}$$

Posons $K_1 = ZK^*Y^*$. (3. 4) et (3. 5) entraînent

$$\omega = \begin{bmatrix} L^* & N^* \\ M^* & K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^* & [D_L]_0 Y \\ Z^* D_{L^*} & Z^* K_1 Y \end{bmatrix},$$

d'où, en posant

$$\upsilon = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{D}_{1*}} & O \\ O & Y \end{bmatrix}, \quad \zeta = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{D}_2} & O \\ O & Z \end{bmatrix}, \quad \tilde{\omega} = \begin{bmatrix} L^* & [D_L]_0 \\ D_{L^*} & K_1 \end{bmatrix},$$

il résulte

$$\omega = \zeta^* \tilde{\omega} \upsilon.$$

Notons que υ et ζ sont des transformations unitaires,

$$\upsilon: \ \mathfrak{D}_{1*} \oplus \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}_{1*} \oplus \mathfrak{D}_L, \qquad \zeta: \ \mathfrak{D}_2 \oplus \mathfrak{F}_* \to \mathfrak{D}_2 \oplus \mathfrak{D}_{L^*};$$

il en résulte que $\tilde{\omega}$ est aussi unitaire,

$$\tilde{\omega}: \ \mathfrak{D}_{1*} \oplus \mathfrak{D}_L \to \mathfrak{D}_2 \oplus \mathfrak{D}_{L^*}.$$

Le terme 12 de la matrice de $\tilde{\omega}^* \tilde{\omega}$ doit donc être égal à O, c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathfrak{D}_L$ on a

$$L[D_L]_0 u + D_{L^*} K_1 u = 0.$$

Comme $L[D_L]_0 u = LD_L u = D_{L^*} Lu$, cela entraîne $D_{L^*}(Lu + K_1 u) = 0$; vu aussi que $Lu \in L\mathfrak{D}_L \subset \mathfrak{D}_{L^*}$ et $K_1 u = ZK^* Y^* u \in \mathfrak{D}_{L^*}$, donc $Lu + K_1 u \in \mathfrak{D}_{L^*}$, on conclut que $Lu + K_1 u = 0$. Cela fournit:

$$K_1 = -[L]_0.$$

Les transformations υ', ζ' définies par

$$\zeta' = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{D}_{2*}} & O \\ O & Z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \upsilon' = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{D}_1} & O \\ O & Y \end{bmatrix}$$

sont évidemment aussi *unitaires* et on a

$$\zeta' \cdot \begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{F}_*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{D}_{L^*}} \end{bmatrix} \cdot \zeta, \quad \upsilon \cdot \begin{bmatrix} \Theta_{T_1}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{T_1}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{D}_L} \end{bmatrix} \cdot \upsilon'.$$

Ainsi, nos résultats se résument sous la forme:

(3. 6) $$\zeta' \cdot \Theta(\lambda) \cdot \upsilon'^* = \begin{bmatrix} \Theta_{T_2}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{D}_{L^*}} \end{bmatrix} \tilde{\omega} \begin{bmatrix} \Theta_{T_1}(\lambda) & O \\ O & I_{\mathfrak{D}_L} \end{bmatrix}$$

où

(3. 7) $$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} L^* & [D_L]_0 \\ D_{L^*} & -[L]_0 \end{bmatrix}.$$

Cela étant, envisageons la contraction T suivante dans $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad X = D_{1*} L D_2,$$

avec la contraction L que nous venons de faire dériver de ω. En vertu du théorème 2, $\Theta_T(\lambda)$ est égal à la fonction figurant au second membre de (3. 6), donc coïncide avec $\Theta(\lambda)$.

Cela achève la démonstration du théorème 3.

2. Partons maintenant d'une contraction *complètement non-unitaire* (c.n.u.) T dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et d'une factorisation

$$\Theta_T(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$$

de sa fonction caractéristique en produit de deux fonctions analytiques contractives. Soit T_i une contraction c.n.u. dans un espace $\mathfrak{H}_i$, telle que $\Theta_{T_i}(\lambda)$ coïncide avec la partie pure de $\Theta_i(\lambda)$ $(i=1, 2)$. (Telle contraction T_i existe, *cf.* [VIII], théorème 2, et [IX], proposition 4. 2, ou [A], Chap. VI.) Il s'ensuit que $\Theta_T(\lambda)$ coïncide avec un produit de la forme (3. 1), ω étant un opérateur unitaire. Appliquons le théorème 3: il résulte qu'il existe une contraction

$$T' = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{bmatrix} \tag{3. 8}$$

dans l'espace $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, telle que $\Theta_{T'}(\lambda)$ coïncide avec $\Theta_T(\lambda)$. La partie c.n.u. de T est alors unitairement équivalente à T (*cf.* [VIII], § 2. 2 et théorème 3, ou [A], Chap. VI). Il ne restreint évidemment pas la généralité de supposer que $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$. Ainsi, nous avons obtenu le suivant corollaire du théorème 3 (*cf.* [IX], p. 300, note 16 en bas):

Soit T une contraction c.n.u. dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et soit $\Theta_T(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ une factorisation de sa fonction caractéristique en produit de deux fonctions analytiques contractives. Il existe alors une contraction T' dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$, ayant T comme sa partie c.n.u. et admettant une triangulation (3. 8), *où T_1, T_2 sont des contractions c.n.u. telles que $\Theta_{T_i}(\lambda)$ coïncide avec la partie pure de $\Theta_i(\lambda)$ $(i=1, 2)$.*

Ouvrages cités

B. Sz.-Nagy — C. Foiaş,

[1] Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3413—3415.

[VIII] Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 13—27.

[IX] Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 283—316.

[A] *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).

М. С. Бродский—М. С. Лившиц,

[2] Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *Успехи Матем. Наук*, **13:1** (79) (1958), 3—58.

Ю. Л. Щмульян,

[3] Некоторые вопросы теории операторов с конечном рангом неэрмитовости, *Матем. Сборник*, **57** (99) (1962), 105—136.

(Reçu le 1. septembre 1966)