Echelles continues de sous-espaces invariants

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Dédié à M. G. Krein à son 60. anniversaire

1. Introduction et théorème

Soit A un opérateur (linéaire borné) dans l'espace de Hilbert H. Une famille $\{H(\lambda)\}$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ de sous-espaces de H sera appelée une *échelle continue de sous-espaces invariants pour A* si elle vérifie les suivantes conditions:

(monotonité:) $\quad H(0)=\{0\}, \quad H(\lambda) \subset H(\mu) \quad (0 \leqq \lambda < \mu \leqq 1), \quad H(1)=H;$

(continuité:) $\quad \bigvee_{\varkappa<\lambda} H(\varkappa) = H(\lambda) \quad (0<\lambda \leqq 1), \qquad \bigcap_{\mu<\lambda} H(\mu) = H(\lambda) \quad (0 \leqq \lambda < 1);$

(invariance:) $\quad A H(\lambda) \subset H(\lambda) \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1).$

En désignant par $E(\lambda)$ la projection orthogonale de H dans $H(\lambda)$, ces conditions veulent dire que $\{E(\lambda)\}$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ est une famille spectrale continue dans H telle que $AE(\lambda)=E(\lambda)AE(\lambda)$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$.

Il y a un nombre d'intéressantes recherches concernant les opérateurs A qui admettent telle échelle de sous-espaces invariants; *cf.* GOHBERG—KREIN [1] et la littérature y citée. Mais il n'existe pas de critère général maniable qui permette de décider si un opérateur donné A admet ou non telle échelle de sous-espaces invariants. Il est manifeste qu'on peut se borner à l'étude des opérateurs de norme au plus égale à 1, c'est-à-dire à l'étude des contractions de H.

Dans cette Note nous nous proposons de démontrer le suivant

Théorème. *T étant une contraction quelconque de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, on y peut ajouter orthogonalement un opérateur unitaire V d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}'$, de sorte que l'opérateur $A=T \oplus V$ de l'espace $H=\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ admette une échelle continue de sous-espaces invariants. V peut être choisi comme somme orthogonale d'une infinité dénombrable de répliques d'une dilatation unitaire quelconque de T.* [1])

---

[1]) Un opérateur U dans un espace $\mathfrak{K}(\supset \mathfrak{H})$ s'appelle une dilatation de l'opérateur T de $\mathfrak{H}$, si l'on a $T^n h = P_{\mathfrak{H}} U^n h$ pour $h \in \mathfrak{H}$ et $n=0, 1, \ldots$; $P_{\mathfrak{H}}$ désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{H}$. Ces conditions sont évidemment équivalentes aux suivantes:

$$(T^n h_1, h_2)=(U^n h_1, h_2) \qquad (h_1, h_2 \in \mathfrak{H};\ n=0, 1, \ldots).$$

Toute contraction T admet une dilatation unitaire U; cette dilatation est *minimum* lorsqu'on a de plus

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{H}.$$

On sait que si la contraction T est complètement non-unitaire, elle admet comme dilatation un opérateur unitaire U à spectre absolument continu, même un opérateur U qui est une translation bilatérale de multiplicité $\leqq \aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{H}$. [2]) Il s'ensuit le suivant

Corollaire. *Pour T complètement non-unitaire, l'opérateur V du théorème peut être choisi comme une translation bilatérale, de multiplicité égale à $\aleph_0 \cdot \dim \mathfrak{H}$.*

2. Deux lemmes

La démonstration du théorème sera fondée sur le suivant

Lemme 1. *Soit T une contraction de l'espace $\mathfrak{H}$ et soit W un opérateur unitaire d'un espace $\mathfrak{K}'$, unitairement équivalent à une dilatation unitaire de T. Il existe alors un sous-espace L de $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{K}'$ invariant pour $T \oplus W$ et tel que, en désignant par P_L la projection orthogonale sur L, on ait*

$$\|P_L h\|^2 = \frac{1}{2}\|h\|^2 \quad \textit{pour} \quad h \in \mathfrak{H}. \tag{1}$$

On aura besoin aussi du suivant

Lemme 2. *Soit T une contraction dans $\mathfrak{H}$ et soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace semi-invariant pour T, c'est-à-dire de la forme $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{H}_1$ où $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ sont des sous-espaces invariants pour T, $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}$. Posons $T_{\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}} T | \mathfrak{M}$ où $P_{\mathfrak{M}}$ désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{M}$. Toute dilatation unitaire U de T est alors une dilatation unitaire aussi de $T_{\mathfrak{M}}$.*

Démonstrations.

(*Lemme* 1:) Soit U la dilatation unitaire de T (opérant dans un espace $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$) à laquelle W est unitairement équivalent; on a donc $U = \tau W \tau^{-1}$ où τ est une application unitaire de $\mathfrak{K}'$ sur $\mathfrak{K}$. Posons $\mathfrak{K}_+ = \bigvee_0^\infty U^n \mathfrak{H}$. En désignant par $P_{\mathfrak{H}}$ la projection orthogonale de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{H}$, on aura

$$P_{\mathfrak{H}} U \cdot U^n h = P_{\mathfrak{H}} U^{n+1} h = T^{n+1} h = T \cdot T^n h = T P_{\mathfrak{H}} U^n h$$

pour $h \in \mathfrak{H}$ et $n = 0, 1, \ldots$; il en dérive

$$P_{\mathfrak{H}} U k = T P_{\mathfrak{H}} k \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathfrak{K}_+.$$

Cela étant, envisageons l'ensemble, évidemment linéaire, des éléments de $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{K}'$ de la forme

$$\{P_{\mathfrak{H}} k \oplus \tau^{-1} k : k \in \mathfrak{K}_+\}$$

Il est manifeste que si $\mathfrak{H}$ est séparable, l'espace $\mathfrak{K}$ de sa dilatation unitaire minimum est aussi séparable. — Pour ces questions nous renvoyons le lecteur p. ex. au livre [2].

Notons que *le théorème et sa démonstration subsistent aussi pour des dilatations non-unitaires.*

[2]) *Cf.* p. ex. [2], théorème II. 7. 4.

et soit L l'adhérence de cet ensemble. Puisque

$$(T\oplus W)(P_{\mathfrak{H}}k\oplus\tau^{-1}k) = TP_{\mathfrak{H}}k\oplus W\tau^{-1}k = P_{\mathfrak{H}}Uk\oplus\tau^{-1}Uk \qquad (k\in\mathfrak{K}_+)$$

et que $U\mathfrak{K}_+\subset\mathfrak{K}_+$, on conclut que $(T\oplus W)L\subset L$.

Montrons que

$$P_L(h\oplus 0)=\tfrac{1}{2}h\oplus\tau^{-1}(\tfrac{1}{2}h) \quad (h\in\mathfrak{H}). \tag{2}$$

En effet, comme $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{K}_+$, il est évident que l'élément au second membre de (2) appartient à L. D'autre part, la différence

$$(h\oplus 0)-\big(\tfrac{1}{2}h\oplus\tau^{-1}(\tfrac{1}{2}h)\big)=\tfrac{1}{2}h\oplus\tau^{-1}(-\tfrac{1}{2}h)$$

est orthogonale à L puisque, pour $k\in\mathfrak{K}_+$,

$$\big(\tfrac{1}{2}h\oplus\tau^{-1}(-\tfrac{1}{2}h),\ P_{\mathfrak{H}}k\oplus\tau^{-1}k\big)=\tfrac{1}{2}(h,P_{\mathfrak{H}}k)+\big(\tau^{-1}(-\tfrac{1}{2}h),\tau^{-1}k\big)=$$

$$=\tfrac{1}{2}(h,k)+(-\tfrac{1}{2}h,k)=0.$$

Cela prouve (2), d'où l'on conclut

$$\|P_L(h\oplus 0)\|^2=\|\tfrac{1}{2}h\|^2+\|\tau^{-1}(\tfrac{1}{2}h)\|^2=\tfrac{1}{4}\|h\|^2+\tfrac{1}{4}\|h\|^2=\tfrac{1}{2}\|h\|^2.$$

Puisque $h\oplus 0$ s'identifie à h, cela fournit (1).

(*Lemme* 2:) Comme $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{M}$ sont invariants pour T, la décomposition $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$ (où $\mathfrak{N}=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_2$) engendre pour T la triangulation

$$T=\begin{bmatrix}T_{\mathfrak{H}_1} & * & * \\ O & T_{\mathfrak{M}} & * \\ O & O & T_{\mathfrak{N}}\end{bmatrix}.$$

Il en découle

$$T^n=\begin{bmatrix}T^n_{\mathfrak{H}_1} & * & * \\ O & T^n_{\mathfrak{M}} & * \\ O & O & T^n_{\mathfrak{N}}\end{bmatrix} \quad (n=0,1,\ldots),$$

d'où

$$P_{\mathfrak{M}}T^n\begin{bmatrix}0\\ h\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ T^n_{\mathfrak{M}}h\\ 0\end{bmatrix} \quad (h\in\mathfrak{M};\ n=0,1,\ldots).$$

Par conséquent on a $P_{\mathfrak{M}}T^n|\mathfrak{M}=T^n_{\mathfrak{M}}$. Cela entraîne

$$(T^n_{\mathfrak{M}}h_1,h_2)=(P_{\mathfrak{M}}T^nh_1,h_2)=(T^nh_1,h_2)=(U^nh_1,h_2)$$

pour $h_1,h_2\in\mathfrak{M}$ et $n=0,1,\ldots$. Cela prouve que U est une dilatation aussi de $T_{\mathfrak{M}}$.

3. Démonstration du théorème

Convenons de désigner par Δ_n et Δ_n^0 ($n=0, 1, \ldots$) les ensembles des nombres de la forme $j/2^n$ (avec j entier), contenus dans l'intervalle fermé $[0, 1]$ ou dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$, selon les cas. Posons $\Delta = \bigcup_n \Delta_n$ et $\Delta^0 = \bigcup_n \Delta_n^0$; Δ et Δ^0 sont donc constitués de tous les nombres dyadiques rationnels contenus dans $[0, 1]$ ou dans $(0, 1)$, selon les cas.

Soit T la contraction donnée dans $\mathfrak{H}$ et soit U une dilatation unitaire de T. A chaque $\alpha \in \Delta^0$ attachons un opérateur $U(\alpha)$ dans un espace $\mathfrak{K}(\alpha)$, tel que $U(\alpha)$ soit unitairement équivalent à la somme orthogonale d'une infinité dénombrable de répliques de U:

$$U(\alpha) \sim U \oplus U \oplus U \oplus \ldots . \tag{3}$$

Envisageons l'espace

$$H = \mathfrak{H} \oplus [\bigoplus_{\alpha \in \Delta^0} \mathfrak{K}(\alpha)] \tag{4}$$

et son opérateur

$$A = T \oplus [\bigoplus_{\alpha \in \Delta^0} U(\alpha)]. \tag{5}$$

(Les espaces $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}(\alpha)$ se plongent dans H comme des sous-espaces de celui-ci.) L'opérateur

$$U_A = U \oplus [\bigoplus_{\alpha \in \Delta^0} U(\alpha)] \tag{6}$$

est alors une dilatation unitaire de A. L'ensemble Δ^0 étant dénombrable, il s'ensuit de (3) et (6) que U_A est unitairement équivalente à la somme orthogonale d'une infinité dénombrable de répliques de U et par conséquent unitairement équivalente à chacun des opérateurs $U(\alpha)$.

Nous allons construire, pour chaque valeur de $n (=0, 1, \ldots)$, un système $\{H_n(\alpha) : \alpha \in \Delta_n\}$ de sous-espaces invariants pour A; la projection orthogonale de H dans $H_n(\alpha)$ sera désignée par $E_n(\alpha)$.

Nous commençons par définir le système de rang $n=0$ en posant

$$H_0(0) = \{0\} \quad \text{et} \quad H_0(1) = \mathfrak{H},\ ^{3)} \tag{7}$$

puis nous procédons par récurrence en n.

Supposons que le système de rang n de sous-espaces invariants soit déjà défini et supposons de plus qu'il vérifie les relations

$$H_n(0) \subset H_n\left(\frac{1}{2^n}\right) \subset H_n\left(\frac{2}{2^n}\right) \subset \ldots \subset H_n\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) \subset H_n(1) \tag*{(8)$_n$}$$

et

$$H_n(0) = \{0\}, \quad H_n(1) = \mathfrak{H} \oplus [\bigoplus_{\beta \in \Delta_n^0} \mathfrak{K}(\beta)]. \tag*{(9)$_n$}$$

Nous construisons alors le système de rang $n+1$ de la manière suivante.

---

[3]) On a $A|\mathfrak{H} = T$.

Tout d'abord nous déduisons de $(8)_n$ et $(9)_n$ que les sous-espaces $H_n(\alpha)$ $(\alpha \in \Delta_n)$ sont orthogonaux aux sous-espaces $\mathfrak{K}(\delta)$ avec $\delta \notin \Delta_n^0$; [4]) ainsi, la définition suivante est possible:

$$(10) \qquad H_{n+1}(\alpha) = H_n(\alpha) \oplus [\bigoplus_{\substack{\delta \in \Delta_{n+1} \setminus \Delta_n \\ \delta < \alpha}} \mathfrak{K}(\delta)] \qquad (\alpha \in \Delta_n).$$

Puisque $H_n(\alpha)$ est invariant pour A et que les sous-espaces $\mathfrak{K}(\delta)$ même réduisent A, on conclut que $H_{n+1}(\alpha)$ est aussi invariant pour A. De $(8)_n$, $(9)_n$ et (10) il dérive d'une manière évidente qu'on a

$$(8)'_{n+1} \qquad H_{n+1}(0) \subset H_{n+1}\left(\frac{1}{2^n}\right) \subset H_{n+1}\left(\frac{2}{2^n}\right) \subset \ldots \subset H_{n+1}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right) \subset H_{n+1}(1)$$

et

$$(9)_{n+1} \qquad H_{n+1}(0) = \{0\}, \quad H_{n+1}(1) = \mathfrak{H} \oplus [\bigoplus_{\beta \in \Delta_{n+1}^0} \mathfrak{K}(\beta)];$$

l'apostrophe indique qu'il ne s'agit encore que des points de Δ_n.

Afin d'étendre cette définition aux points de $\Delta_{n+1} \setminus \Delta_n$, nous envisageons deux points voisins quelconques de Δ_n, α_n et β_n $(\alpha_n < \beta_n)$, et soit $\gamma_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)$. On déduit de (10) que

$$(11) \qquad H_{n+1}(\beta_n) \ominus H_{n+1}(\alpha_n) = [H_n(\beta_n) \ominus H_n(\alpha_n)] \oplus \mathfrak{K}(\gamma_{n+1}).$$

Posons

$$(12) \qquad A(\gamma_{n+1}) = [E_n(\beta_n) - E_n(\alpha_n)]A \mid [H_n(\beta_n) \ominus H_n(\alpha_n)].$$

Il s'ensuit du lemme 2 que toute dilatation unitaire de A est aussi une dilatation unitaire de $A(\gamma_{n+1})$. Par conséquent $A(\gamma_{n+1})$ admet une dilatation unitaire qui est unitairement équivalente à $U(\gamma_{n+1})$. Ainsi, on peut appliquer le lemme 1 à l'opérateur

$$(13) \qquad A(\gamma_{n+1}) \oplus U(\gamma_{n+1})$$

de l'espace (11). Il résulte qu'il existe un sous-espace $L(\gamma_{n+1})$ de cet espace, invariant pour l'opérateur (13), et tel que

$$(14) \qquad \|P_{L(\gamma_{n+1})} h\|^2 = \tfrac{1}{2}\|h\|^2 \quad \text{pour} \quad h \in H_n(\beta_n) \ominus H_n(\alpha_n);$$

(14) entraîne évidemment aussi

$$(15) \qquad \|h - P_{L(\gamma_{n+1})} h\|^2 = \tfrac{1}{2}\|h\|^2 \quad \text{pour} \quad h \in H_n(\beta_n) \ominus H_n(\alpha_n).$$

Cela étant, nous définissons:

$$(16) \qquad H_{n+1}(\gamma_{n+1}) = H_{n+1}(\alpha_n) \oplus L(\gamma_{n+1});$$

l'orthogonalité des deux termes au second membre résulte de la relation $L(\gamma_{n+1}) \subset$ $\subset H_{n+1}(\beta_n) \ominus H_{n+1}(\alpha_n)$. De cette relation et de (16) on déduit aussi que

$$(17) \qquad H_{n+1}(\alpha_n) \subset H_{n+1}(\gamma_{n+1}) \subset H_{n+1}(\beta_n).$$

---

[4]) En effet, $H_n(\alpha) \subset H_n(1)$ et $H_n(1) \perp \mathfrak{K}(\delta)$ pour $\delta \notin \Delta_n^0$.

Montrons que $H_{n+1}(\gamma_{n+1})$ est invariant pour A. Vu que $H_{n+1}(\alpha_n)$ est invariant pour A, il n'y a qu'à montrer que

$$(18) \qquad A\,L(\gamma_{n+1}) \subset H_{n+1}(\gamma_{n+1}).$$

Puisque $L(\gamma_{n+1})$ est un sous-espace de l'espace (11), tout élément $l \in L(\gamma_{n+1})$ s'écrit sous la forme $l=h+k$ où $h \in H_n(\beta_n) \ominus H(\alpha_n)$ et $k \in \mathfrak{K}(\gamma_{n+1})$, d'où $Al=Ah+Ak$. Comme $Ah \in AH_n(\beta_n) \subset H_n(\beta_n)$, il s'ensuit

$$Ah = E_n(\beta_n)Ah = E_n(\alpha_n)Ah + [E_n(\beta_n) - E_n(\alpha_n)]Ah =$$
$$= E_n(\alpha_n)Ah + A(\gamma_{n+1})h \quad (cf.\ (12))$$

et par conséquent

$$Al = E_n(\alpha_n)Ah + A(\gamma_{n+1})h + Ak = E_n(\alpha_n)Ah + [A(\gamma_{n+1}) \oplus U(\gamma_{n+1})]l.$$

Vu que $E_n(\alpha_n)Ah \in H_n(\alpha_n) \subset H_{n+1}(\alpha_n)$ par (10), et que $L(\gamma_{n+1})$ est invariant pour $A(\gamma_{n+1}) \oplus U(\gamma_{n+1})$, on conclut que

$$Al \in H_{n+1}(\alpha_n) \oplus L(\gamma_{n+1}) = H_{n+1}(\gamma_{n+1}).$$

ce qui prouve (18) et achève la démonstration de ce que $H_{n+1}(\gamma_{n+1})$ est invariant pour A.

Lorsque α_n, β_n parcourent les couples des points voisins dans Δ_n, le point γ_{n+1} parcourt $\Delta_{n+1} \setminus \Delta_n$. Ainsi, on a défini le système complet $\{H_{n+1}(\alpha) : \alpha \in \Delta_{n+1}\}$ de sous-espaces invariants pour A; en réunissant les résultats $(8)'_{n+1}$ et (17) il s'ensuit que ce système vérifie les relations $(8)_{n+1}$ et $(9)_{n+1}$.

De cette façon, la définition par récurrence est achevée, et les relations $(8)_n$ et $(9)_n$ sont établies pour tous les n.

Convenons des notations suivantes:

$$H_n(\alpha', \alpha'') = H_n(\alpha'') \ominus H_n(\alpha'), \qquad E_n(\alpha', \alpha'') = E_n(\alpha'') - E_n(\alpha')$$
$$\text{pour} \quad \alpha', \alpha'' \in \Delta_n \qquad (\alpha' < \alpha'').$$

Il découle de (11), (16) et (17) que

$$\left.\begin{array}{r} H_{n+1}(\alpha_n, \gamma_{n+1}) = L(\gamma_{n+1}) \subset \\ H_{n+1}(\gamma_{n+1}, \beta_n) \subset H_{n+1}(\alpha_n, \beta_n) = \end{array}\right\} H_n(\alpha_n, \beta_n) \oplus \mathfrak{K}(\gamma_{n+1}),$$

et de (14) et (15), que

$$\left.\begin{array}{r} \|E_{n+1}(\alpha_n, \gamma_{n+1})h\|^2 = \|P_{L(\gamma_{n+1})}h\|^2 \\ \|E_{n+1}(\gamma_{n+1}, \beta_n)h\|^2 = \|h - P_{L(\gamma_{n+1})}h\|^2 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\|h\|^2$$

pour $h \in H_n(\alpha_n, \beta_n)$. En désignant par $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ l'une ou l'autre des deux moitiés de l'intervalle (α_n, β_n), on a donc

$$(19) \qquad H_{n+1}(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \subset H_n(\alpha_n, \beta_n) \oplus \mathfrak{K}\left(\tfrac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)\right)$$

et

$$(20) \qquad \|E_{n+1}(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})h\|^2 = \tfrac{1}{2}\|h\|^2 \quad \text{pour} \quad h \in H_n(\alpha_n, \beta_n).$$

Soit $(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n), \ldots$ une suite d'intervalles, chacun desquels est l'une des deux moitiés du précédent; $\alpha_0=0$ et $\beta_0=1$. Grâce aux relations récurrentes (19) et (20) on a pour $0 \leqq r < s$

$$H_s(\alpha_s, \beta_s) \subset H_r(\alpha_r, \beta_r) \oplus \mathfrak{K}_{rs}, \tag{21}$$

où

$$\mathfrak{K}_{rs} = \bigoplus_{k=r}^{s-1} \mathfrak{K}\left(\tfrac{1}{2}(\alpha_k+\beta_k)\right),$$

et

$$\|E_s(\alpha_s, \beta_s) \ldots E_{r+1}(\alpha_{r+1}, \beta_{r+1})h\|^2 = 2^{r-s}\|h\|^2 \quad \text{pour} \quad h \in H_r(\alpha_r, \beta_r). \tag{22}$$

De (22) il dérive aussitôt

$$\|E_s(\alpha_s, \beta_s) \ldots E_r(\alpha_r, \beta_r)h\|^2 = 2^{r-s}\|E_r(\alpha_r, \beta_r)h\|^2 \leqq 2^{r-s}\|h\|^2 \tag{23}$$

pour $h \in H$ quelconque et pour $r<s$.

Soit $h \in H_n(1)$ et soient p et q des entiers tels que $n \leqq p < q$. Puisque $H_n(\alpha_n, \beta_n) \subset \subset H_n(\beta_n) \subset H_n(1)$, il dérive de (21) (pour $r=n$ et $s=p$) que $h-E_p(\alpha_p, \beta_p)h \subset \subset H_n(1) \oplus \mathfrak{K}_{np}$; l'orthogonalité des deux termes du dernier membre découle de $(9)_n$. Par la même raison, $H_n(1)$ est orthogonal aussi à $\mathfrak{K}_{pq}$, tandis que l'orthogonalité $\mathfrak{K}_{np} \perp \mathfrak{K}_{pq}$ s'ensuit de la définition des $\mathfrak{K}_{rs}$. Ainsi, on a $H_n(1) \oplus \mathfrak{K}_{np} \perp \mathfrak{K}_{pq}$. Par conséquent, $h-E_p(\alpha_p, \beta_p)h$ est orthogonal à $\mathfrak{K}_{pq}$. D'autre part, il est évidemment orthogonal à $H_p(\alpha_p, \beta_p)$, d'où il résulte, en vertu de la relation (21) (appliquée au cas $r=p$, $s=q$), que $h-E_p(\alpha_p, \beta_p)h$ est orthogonal à $H_q(\alpha_q, \beta_q)$. Par conséquent on a

$$E_q(\alpha_q, \beta_q) \cdot E_p(\alpha_p, \beta_p)h = E_q(\alpha_q, \beta_q)h \quad \text{pour} \quad h \in H_n(1) \quad \text{et} \quad n \leqq p < q. \tag{24}$$

L'application répétée de cette relation fournit

$$E_s(\alpha_s, \beta_s) \ldots E_n(\alpha_n, \beta_n)h = E_s(\alpha_s, \beta_s)h \quad \text{pour } h \in H_n(1) \quad \text{et} \quad s \geqq n.$$

Vu (23) il en résulte que

$$\|E_s(\alpha_s, \beta_s)h\|^2 \leqq 2^{n-s}\|h\|^2 \quad \text{pour} \quad h \in H_n(1) \quad \text{et} \quad s \geqq n. \tag{25}$$

Comme le choix des moitiés successives de l'intervalle (α_0, β_0) était arbitraire, (25) subsiste pour n'importe quel couple α_s, β_s de points voisins de Δ_s $(\alpha_s < \beta_s)$, dès que $s \geqq n$.

Soient α, β deux points arbitraires de Δ_s $(\alpha < \beta;\ s \geqq n)$. On a alors

$$E_s(\alpha, \beta)h = \sum_{i=1}^{N} E_s(\alpha+(i-1)2^{-s}, \alpha+i\,2^{-s})h \qquad (h \in H_n(1))$$

où $N=(\beta-\alpha)2^s$. Les termes du second membre étant orthogonaux et comme on peut appliquer (25) à chacun de ces termes, on obtient

$$\|E_s(\alpha, \beta)h\|^2 \leqq N \cdot 2^{n-s}\|h\|^2,$$

donc

$$\|[E_s(\beta)-E_s(\alpha)]h\|^2 \leqq (\beta-\alpha) \cdot 2^n\|h\|^2 \tag{26}$$

et cela pour $h \in H_n(1)$; $\alpha, \beta \in \Delta_s$; $s \geqq n$.

Nous sommes à même de conclure la démonstration de notre théorème. En ce but, rappelons que pour tout α fixé, $\alpha \in \Delta$, les sous-espaces invariants $H_n(\alpha)$ sont définis pour tous les n assez grands, notamment dès que Δ_n comprend α, et ils forment une suite croissante, *cf.* (10). Par conséquent

$$H(\alpha) = \overline{\bigcup_n H_n(\alpha)}$$

est aussi un sous-espace invariant pour A, et pour la projection orthogonale correspondante $E(\alpha)$ on a

$$E(\alpha) = \lim_{n\to\infty} E_n(\alpha) \qquad \text{(convergence forte des opérateurs).}$$

Les relations $(8)_n$ et $(9)_n$, valables pour tous les n, entraînent évidemment

$$H(\alpha') \subset H(\alpha''), \quad \text{donc} \quad E(\alpha') \leqq E(\alpha'') \quad \text{pour} \quad \alpha', \alpha'' \in \Delta \qquad (\alpha' < \alpha''),$$

et $H(0) = \{0\}$, $H(1) = H$, donc $E(0) = O$, $E(1) = I_H$. Enfin, en faisant $s \to \infty$ dans (26) il résulte

$$\|[E(\beta) - E(\alpha)]h\|^2 \leqq (\beta - \alpha) \cdot 2^n \|h\|^2 \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \Delta \quad \text{et} \quad h \in H_n(1). \tag{27}$$

Cela entraîne que la limite

$$\lim_{\alpha\in\Delta,\, \alpha\to\lambda} E(\alpha)h$$

existe pour tout λ réel dans $[0, 1]$ et tout $h \in H_n(1)$. Comme les sous-espaces $H_n(1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont denses dans H, cette limite existe alors pour $h \in H$ quelconque. En définissant $E(\lambda)h$ par cette limite, on obtient une fonction croissante $E(\lambda)$ de λ, à valeurs projections orthogonales dans H, telle que $E(0) = O$, $E(1) = I_H$ et que $H(\lambda) = E(\lambda)H$ est invariant pour A pour chaque λ. De plus, la relation (27) se conserve lors de cette extension. En vertu de cette relation, la fonction numérique $\big(E(\lambda)h, h\big)$ de λ vérifie une condition de Lipschitz pour chaque h fixé dans $H_n(1)$. Comme les $H_n(1)$ sont denses dans H, on conclut que la fonction $\big(E(\lambda)h, h\big)$ est, pour $h \in H$ quelconque, la limite uniforme de fonctions lipschitziennes et par conséquent elle est continue et même *absolument continue*.

Ainsi, la famille des sous-espaces $H(\lambda)$ que nous venons de construire forme une échelle continue (et même absolument continue dans le sens indiqué) de sous-espaces invariants pour l'opérateur $A = T \oplus [\bigoplus_{\alpha\in\Delta^\circ} U(\alpha)]$.

Cela achève la démonstration du théorème.

Ouvrages cités

[1] I. C. Gohberg et M. G. Krein, Sur la factorisation des opérateurs dans l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 90—123 (en russe).

[2] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).

(Reçu le 15 octobre 1966)