Bibliographie

S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik (Mathematische Lehrbücher und Monographien, I. Abt., Mathematische Lehrbücher, Bd. 12), 218 Seiten, Berlin, Akademie-Verlag, 1964.

Das vorliegende Buch ist eine Übersetzung der 1950 in Leningrad bzw. 1953 in Moskau erschienenen russischen Ausgabe, wobei nur geringfügige Änderungen vorgenommen worden sind. Der dargestellte Stoff geht im wesentlichen auf Resultate zurück, die der Autor bereits in den Jahren 1936—1939 veröffentlicht hat und die einen ganz außerordentlichen Einfluß auf die Entwicklung der Funktionalanalysis und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ausgeübt haben. Es handelt sich dabei zum Beispiel um die Einführung des Begriffs der verallgemeinerten Ableitung einer lokalintegrierbaren Funktion (der übereinstimmt mit dem Begriff der distributionentheoretischen Ableitung im Schwartzschen Sinne und deshalb als eine Vorwegnahme gewisser Aspekte der Distributionentheorie angesehen werden kann) sowie die berühmten Einbettungssätze. Diesen rein funktionalanalytischen Gegenständen ist das Kapitel I des Buches gewidmet. Die (heute allgemein als Sobolewsche Räume bezeichneten) Räume $W_p^{(l)}$ werden eingeführt als die Gesamtheit aller summierbaren Funktionen, für die im beschränkten Gebiet Ω alle verallgemeinerten Ableitungen der Ordnung l existieren. Es wird eine Vielfalt möglicher Normierungen von $W_p^{(l)}$ betrachtet, für welche die Einbettungssätze gelten. Von diesem Gesichtspunkt aus ist das vorliegende Buch die allgemeinste gegenwärtig existierende Darstellung dieses Problemkreises. Für die Anwendungen hat sich in den letzten 15 Jahren die Normierung $\|\varphi\|_{W_p^{(l)}} = \Big(\sum\limits_{|\alpha|\leq l} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha\varphi|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$ durchgesetzt.

Aus den Einbettungssätzen folgt nämlich, daß auch für alle Ordnungen $< l$ die verallgemeinerten Ableitungen existieren und zur Potenz p summierbar sind. Die im Buch geführten Beweise, die auf Eigenschaften gewisser Integrale vom Potentialtyp beruhen, gelten unmittelbar nur für Vereinigungen endlich vieler bezüglich einer Kugel sternförmiger Gebiete und darüber hinaus werden keine direkten Aussagen über das Verhalten der Funktionen auf dem Rand von Ω gemacht. Hierin sowie im Studium der zu $W_p^{(l)}$ dualen Räume lagen die wichtigsten Ansatzpunkte zur Weiterentwicklung dieser Theorie und ihrer Anwendungen in der jüngsten Vergangenheit.

Im Kapitel II werden die Ergebnisse von Kapitel I auf das Dirichletsche Problem der polyharmonischen Differentialgleichung $\Delta^m u=0$, das Neumannsche Problem der Potentialgleichung sowie auf ein Eigenwertproblem der Gleichung $\Delta u+\gamma u = 0$ angewandt.

Wir erläutern die allen diesen Beispielen zugrunde liegende Methode für den erstgenannten Fall. An Stelle der Differentialgleichung wird das zugehörige Variationsproblem (für das Dirichletsche Integral) im Raum $W_2^{(m)}$ gelöst. Es wird bewiesen, daß die Lösung dieses Variationsproblems in Ω der Differentialgleichung genügt. Die vorgeschriebenen Randwerte (der Funktion und aller Ableitungen der Ordnung $\leqq m-1$), die auch auf gewissen Randmannigfaltigkeiten der Dimension $< n-1$ (im R^n) vorgeschrieben sein können, werden dahingehend eingeschränkt, daß sie Randwerte von Funktionen aus $W_2^{(1)}$ sein müssen. Aus der Vollstetigkeit der Einbettungsoperatoren kann dann gefolgert werden, daß die Randwerte von der (eindeutig bestimmten) Lösung des Problems bei Annäherung an den Rand in einem verallgemeinerten Sinne („im Mittel") angenommen werden. Es ist bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt ungeklärt, ob (bzw. unter welchen Voraussetzungen) die Randwertannahme darüber hinaus auch im klassischen Sinne (stetiger Randwertannahme) stattfindet. Die hier zugrunde liegende Betrachtungsweise steht im engen Zusammenhang zu der heute allgemein üblichen Auffassung von Randwertproblemen.

Im Kapitel III wird das Cauchysche Problem für gewisse Klassen linearer und quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungen 2. Ordnung studiert. Es werden verallgemeinerte Lösungen in $W_2^{(1)}$ gesucht. Die Einbettungssätze werden benutzt, um den Grad der Glattheit der Koeffizienten und der Anfangsbedigungen zu bestimmen, den man fordern muß, um die Existenz einer klassischen Lösung des Cauchyschen Problems zu sichern.

Günther Wildenhain (Dresden)

László Rédei, Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein, 364 Seiten, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.

Die Begründung der euklidischen und der beiden nicht-euklidischen Geometrien, die heute hauptsächlich parabolische, elliptische bzw. hyperbolische Geometrie genannt werden, wird in diesem Buch mittels des von F. KLEIN in seinen Vorlesungen verfolgten Weges, d. h. durch die projektive Erweiterung des Raumes durchgeführt. Diesen Weg der Begründung der drei Geometrien, die zusammenfassend als Geometrien von konstanter Krümmung bezeichnet werden können, ist bisher in der Lehrbuchliteratur ziemlich selten verfolgt und die in dieser Richtung geschriebenen Werke waren öfters nur skizzenhaft; das Buch von Professor RÉDEI will eben diesen Mangel der Lehrbuchliteratur aufheben, und die Kleinschen Ideen — wie das in der Einleitung des Buches bemerkt wird — auch „in der Lehrbuchliteratur zu ihrem Recht kommen lassen".

Der Stoff des Buches ist in sieben Kapiteln verteilt, von denen die ersten sechs den axiomatischen Aufbau der projektiven Geometrie enthalten; das siebente Kapitel enthält den wichtigsten Teil, undzwar die Charakterisierung der drei Geometrien im Sinne des Erlanger Programms von F. KLEIN mittels der Bestimmung der Bewegungsgruppen in den verschiedenen Geometrien. Im Kapitel I befinden sich die Axiomen in vier Gruppen verteilt: Axiome des Enthaltenseins, der Beziehung „zwischen", der Stetigkeit und der Bewegung. In den Kapiteln II und III befinden sich die Definitionen der einfachsten Begriffe — wie der Begriff der linearen Unterräume, der Strecken, der Dreiecke und der Tetraeder, usw. Neben dem Begriff der Desargueschen Figuren führt der Verf. den Begriff der assoziierten Desarguesschen Figur ein, welcher bisher — unseres Wissens — in der Geometrie nicht benützt wurde, und mit dessen Hilfe mehrere Beweise wesentlich vereinfacht werden können. Kapitel IV gibt durch die Einführung der idealen Elemente den projektiven Abschluß des Raumes.

Die Kapiteln V und VI beschäftigen sich mit der im engeren Sinne genommenen Theorie des projektiven Raumes, endlich wird im Kapitel VII die vollständige Charakterisierung der drei Geometrien von konstanter Krümmung durchgeführt. Als wichtigstes Ergebnis verweisen wir auf die explizite Bestimmung der verschiedenen Bewegungsgruppen und die Widerspruchsfreiheit der genannten Geometrien.

Das Buch wird wegen seiner Vollständigkeit in Bezug auf die Theorie der nicht-euklidischen Geometrien für die Mathematiker in der Forschung als auch in der Unterricht ein sehr brauchbares Hilfsmittel; aber auch Studenten, die die Theorie der nicht-euklidischen Geometrien eingehender kennen lernen wollen, können das Buch mit großem Nutzen studieren.

A. Moór (Szeged)

Noel Gastinel, Analyse numérique linéaire (Collection enseignement des sciences, IX), IX+363 pages, Edition Hermann, Paris, 1966.

Dans cet ouvrage, destiné avant tout aux étudiants des facultés des sciences, l'auteur traite des méthodes de l'analyse numérique linéaire. Après une introduction théorique soignée dans la première partie du livre, tenant devant les yeux les exigences de la formation des programmeurs, l'auteur attache son plus grand intérêt à la discussion des algorithmes applicables aux machines à calculer électroniques. Conformément à cet intérêt, son livre est un livre de méthodes de calcul ou d'"algorithmique". Il préfère donner les justifications de ces méthodes de calcul et les programmes correspondants en Algol, plutôt que de donner des tableaux de chiffres, résultats de calculs numériques obtenus. Il compare les méthodes du point de vue du nombre des opérations exigées, de la simplicité de programmation et de la vitesse de convergence des procédures, ce qui facilite la sélection de la méthode la plus convenable dans chaque cas particulier.

Le livre se partage en huit chapitres. Les prémiers trois développent les notions fondamentales comme p. ex. les propriétés élémentaires des matrices, les normes des vecteurs et des matrices, l'inversion des matrices, etc., notions et résultats utilisés constamment dans la suite. Le quatrième chapitre présente les méthodes pour la résolution d'un système linéaire d'équations par élimination et orthogonalisation, et montre comment ces méthodes s'appliquent à l'inversion des matrices et au calcul des valeurs des déterminants. Le chapitre se termine par la discussion du cas des matrices symétriques et d'une méthode concernant l'inversion des matrices, basée sur la technique des partitionnements aux sous-matrices, et est suivi par une collection des problèmes concernant le sujet des chapitres I, II, III et IV. Chapitre V est consacré à l'étude de deux types intéressants de procédés de résoûdre un système linéaire d'équations, notamment par itération de type linéaire et itération par la méthode de projection. Ensuite, l'auteur montre comment ces procédés se simplifient en cas des systèmes de matrices symétriques et montre aussi une méthode itérative pour l'inversion des matrices. Le chapitre finit par une collection de problèmes. Le Chapitre VI contient une discussion détaillée du problème des sous-espaces invariants pour une transformation linéaire d'un espace vectoriel. Les notions introduites et les théorèmes prouvés sont utilisés au Chapitre VII. L'auteur y traite de la relation des graphes orientés et des matrices à termes positifs, et il applique ensuite les résultats acquis à la discussion de la question de convergence pour la résolution d'un système d'équations par itération. Le chapitre VIII traite des méthodes numériques pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres, en présentant des méthodes diverses pour obtenir le polynôme caractéristique de la matrice, et des procédés concernant le calcul des valeurs propres et vecteurs propres par itération. Le cas de matrices hermitiennes est étudié de plus près. Le livre se termine par une collection de problèmes pour les trois derniers chapitres.

Cet ouvrage, tant par son contenu que par sa présentation, aura certainement de succès et contribuera beaucoup au développement de l'enseignement du calcul moderne.

P. Hunya et *I. Kovács* (Szeged)

Otton Martin Nikodým, The mathematical apparatus for quantum mechanics, based on the theory of Boolean algebras (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldrastellungen, Bd. 129), XII+952 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1966.

The purpose of this work is, as stated in the preface by the author, "to give the theoretical physicist a geometrical, visual and precise mathematical apparatus which would be better adapted to some of their arguments, than the existing and generally applied methods".

Though very little is said in the book about the deficiency of the usual methods, it becomes clear from the author's own treatment that he means that, in the case of a selfadjoint or a normal operator with not purely discrete spectrum, there are not sufficiently many eigenvectors belonging to the Hilbert space itself. This is indeed an inconvenience — and the source of misunderstanding with some physicists who would like to handle the continuous spectrum similarly to the discrete one. There were already several attempts by mathematicians to eliminate this inconvenience by enlarging the Hilbert space by appropriate ideal elements and to state the eigenvalue problem in a correspondingly generalized form. (Let us only mention the *Doklady* paper of GELFAND—KOSTYUČENKO (1955) and the recent monograph by BEREZANSKIĬ on "Expansion with respect to eigenfunctions of selfadjoint operators" (Kiev, 1965, in Russian).

The author's own approach to this problem was first outlined in four lectures at the Institut Henri Poincaré (Paris) in 1947, and since then elaborated in a series of papers. This approach is based on the theory of Boolean lattices, whose elements are closed subspaces in separable Hilbert space.

Correspondingly, the book begins with a voluminous introduction (on some 250 pages) to general Boolean lattices and their ideal elements (called here "traces"). One of the main concerns here is measure theory. The lattice of subspaces of a Hilbert space are studied on the next 150 pages, including a chapter on double Stieltjes and Radon integrals. It follows (on about 320 pages) applications to the spectral theory of normal operators in Hilbert space, including operational calculus with such operators, spectral multiplicity theory, commutative families of operators, and in particular the ideal (or "quasi"-) eigenvectors. It follows a chapter (35 pages) on the delta function of Dirac, where a new rigorous foundation is proposed for this function (howewer, without mentioning its relations to other rigorous foundations, such as that in the theory of distributions). The last 160 pages are devoted to a deeper study of the theory of summation on scalar (instead of vector) fields.

The book is a highly individualistic one; indeed it is based almost entirely on the author's own research. The large number of new concepts and notations introduced, and the astonishing length of the exposition, make the book hard to read even for mathematicians. By the way, no direct applications to mathematical problems of physics are given: the author intends to deal with them in subsequent papers or in another book.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

W. Magnus, F. Oberhettinger, and R. P. Soni, Formulas and theorems for the special functions of Mathematical Physics, 3rd edition (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 52), VIII+508 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1966

W. MAGNUS' and F. OBERHETTINGER's original idea of giving a brief survey of the principal properties of the most important special functions featuring in mathematical physics together with a list of formulae involving these functions has proved to be a great success. This is also shown by the fact that their book "Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik", appeared in German in 1943, already ran into its third edition. The book under review is a new and enlarged English version, written in collaboration with R. P. SONI, of the second edition (1948) of the above book.

Compared to the 1948 German edition the book contains several additions which present further facts on the special functions in question, and enlarge the list of formulae concerning them. Furthermore some of these functions, for instance KUMMER's function, the Whittaker function, parabolic cylinder functions, etc., on which only relatively short accounts were given in the previous edition, appear here as subjects of individual chapters. All this makes the extent of the present book doubled in comparison with that of the 1948 edition. A change has taken place in the list of references: They are generally restricted to books and monographs and are located at the end of each individual chapter. Occasional references follow immediately those results to which they apply.

The scope of the present book will be best seen from its table of contents. Chapter I: The gamma functions and related functions (the Riemann zeta function, Bernoulli and Euler polynomials, etc.). Chapter II: The hypergeometric function. Chapter III: Bessel functions. Chapter IV: Legendre functions (including Gegenbauer functions, toroidal and conical functions). Chapter V: Orthogonal polynomials (Jacobi, Gegenbauer, Legendre, generalized Laguerre, Hermite, Chebyshev polynomials). Chapter VI: KUMMER's function. Chapter VII: Whittaker function. Chapter VIII: Parabolic cylinder functions and parabolic functions. Chapter IX: The incomplete gamma function and special cases. Chapter X: Elliptic integrals, theta functions and elliptic functions. Chapter XI: Integral transforms (including Fourier transforms of various kind, Laplace, Mellin, Hankel, Lebedev, Mehler and Gauss transforms). Chapter XII: Transformation of systems of coordinates.

There is no doubt that this excellently written book, similarly to its earlier editions, will be of great value for mathematicians and physicists.

I. Kovács (Szeged)