Über äquivalente Variationsprobleme von mehreren Veränderlichen

Von A. MOÓR und L. PINTÉR in Szeged

§ 1. Einleitung

Im n-dimensionalen Raum X_n $(n \geqq 2)$ sei ein $(n-1)$-parametriges Integral von der Form

$$\mathscr{I}(F) \overset{\text{def}}{=} \int \cdots \int_{\mathscr{A}} F\left(x^i(u^\alpha), \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right) du^1 \dots du^{n-1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ \alpha = 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix}$$

angegeben [1]), wo $\mathscr{A}$ ein $(n-1)$-dimensionales Bereich von X_n bedeutet. Wir nehmen an, daß das zu $\mathscr{I}(F)$ gehörige Variationsproblem regulär ist. Die Extremalen $x^i(u^\alpha)$ sind in diesem Falle durch das partielle Differentialgleichungssystem

$$(1.1) \qquad \mathscr{E}_i(F) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \frac{\partial F}{\partial x^i_\alpha} = 0, \qquad x^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

angegeben. Jetzt und im folgenden soll die Einsteinsche Summationskonvention gelten, d. h. auf doppelt vorkommende Indizes soll es immer summiert werden.

Es sei nun auch ein zweites Integral $\mathscr{I}(F^*)$ mit der Grundfunktion F^* angegeben, zu dem auch ein reguläres Variationsproblem gehört. Die beiden Variationsprobleme nennen wir äquivalent, falls die zu ihnen gehörigen Scharen der Extremalen übereinstimmen. Als ein spezielles Problem in dieser Richtung wollen wir den Zusammenhang von F^* und F bestimmen, falls

$$(1.2) \qquad \mathscr{E}_i(F^*) \equiv \lambda \mathscr{E}_i(F) \qquad (\lambda \not\equiv 0)$$

besteht, wo der Operator $\mathscr{E}_i(F)$ durch (1.1) angegeben ist, und λ eine Funktion von $x^i(u^\alpha)$ ist. Ein bemerkenswertes Resultat ist, daß (1.2) für die mögliche Form der Funktion F eine wesentliche Einschränkung gibt, wenn λ nicht eine Konstante ist. Ist aber λ eine Konstante, für die dann wegen

$$\lambda \mathscr{E}_i(F) = \mathscr{E}_i(\lambda F), \qquad \lambda = \text{Konst.}$$

---

[1]) Lateinische bzw. griechische Indizes sollen immer die Zahlen $1, 2, \dots, n,$ bzw. $1, 2, \dots, (n-1)$ durchlaufen.

$\lambda=1$ gesetzt werden kann, so ist F beliebig wählbar, nur die Form von F^* ist jetzt durch (1. 2) bestimmt. Unsere diesbezüglichen Resultate sind im Satz 1 formuliert. Für den Fall, in dem die Grundintegrale $\mathcal{I}(F)$ und $\mathcal{I}(F^*)$ nur von einer Veränderlichen abhängig sind, verweisen wir auf den Aufsatz [4].

In unseren weiteren Untersuchungen werden wir werschiedene Verallgemeinerungen untersuchen. Erstens werden wir den Fall betrachten, in dem die Grundfunktionen F und F^* auch von $\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$ abhängig sind. In diesem Falle hat der Euler—Lagrangesche Operator $\mathcal{E}_i(F)$ die Form: [2])

$$\mathcal{E}_i(F) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\frac{\partial F}{\partial x^i_\alpha} + \chi \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\frac{\partial F}{\partial x^i_{\alpha\beta}}, \tag{1. 3}$$

$$x^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad x^i_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}, \quad \chi \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für} \quad \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{für} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Diesen Fall wollen wir nur kurz behandeln, da — wie wir es sehen werden — in diesem Falle die Relation (1. 2) für F^* nicht so strenge Bedingungen stellt; die Form von F^* wäre nur mit weiteren Bedingungen vollständig bestimmbar. Zweitens betrachten wir solche Differentialoperatoren $\mathcal{E}_i^*(F)$, die nicht unbedingt Euler—Lagrangesche Operatoren einer Funktion F sind, und die Form

$$\mathcal{E}_i^*(F) = a_i^k(x)\mathcal{E}_k(F) \tag{1. 4}$$

haben, wo die $a_i^k(x)$ einen Tensor bilden. Es wird sich zeigen, daß derjenige Fall neue Erweiterungen gibt, in dem der Rang des Matrix (a_i^k) kleiner als n ist.

§ 2. Der Fall $\lambda=\lambda(x)$

Wir nehmen an, daß für zwei Variationsprobleme mit den Grundfunktionen $F(x, x_\alpha)$ und $F^*(x, x_\alpha)$ die Relationen (1. 2) gelten, wo $\lambda=\lambda(x)$ eine allein von x^i abhängige Skalare Funktion ist. Hier und im folgenden setzt man $x=(x^1, x^2, \dots, x^n)$ bzw. $x_\alpha=(x^1_\alpha, x^2_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$. Bezüglich der Funktionen F und F^* stellen wir die Bedingung, daß sie nach ihren Veränderlichen mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. Die Relation (1. 2) bestimmen wir in der Form:

$$\mathcal{E}_i(F^*) - \lambda(x)\mathcal{E}_i(F) \equiv 0 \tag{2. 1}$$

die auf Grund von (1. 1) offenbar mit

$$\frac{\partial F^*}{\partial x^i} - \lambda \frac{\partial F}{\partial x^i} - x^j_\alpha \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^j \partial x^i_\alpha} - \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i_\alpha} \right) - x^j_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^i_{(\alpha} \partial x^j_{\beta)}} (F^* - \lambda F) \equiv 0 \tag{2. 2}$$

identisch ist. Wie gewöhnlich, bedeuten in dieser Formel die Klammern bei α und β den in α, β symmetrischen Teil des entsprechenden Ausdrucks.

---

[2]) Vgl. [1] S. 28.

Da (2. 2) in $x^i, x^i_\alpha, x^i_{\alpha\beta}$ eine Identität ist, muß der Koeffizient von $x^i_{\alpha\beta}$ verschwinden, d. h. es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i_{(\alpha}\partial x^j_{\beta)}}(F^* - \lambda(x)F) \equiv 0. \tag{2. 3}$$

Wir stellen nun die Forderung:
Es soll die Relation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i_{[\alpha}\partial x^j_{\beta]}}(F^* - \lambda(x)F) \equiv 0 \tag{2. 4}$$

gelten. (Die eckigen Klammern bedeuten den in α, β schiefsymmetrischen Teil.)

Diese Forderung ermöglicht schon F^* durch F auszudrücken. Aus (2. 3) und (2. 4) folgt nämlich

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i_\alpha \partial x^j_\beta}(F^* - \lambda(x)F) \equiv 0,$$

also ist $(F^* - \lambda F)$ in x^j_γ linear. Es gilt somit

$$F^*(x, x_\alpha) - \lambda(x)F(x, x_\alpha) = S^\gamma_j(x)x^j_\gamma + \varphi(x). \tag{2. 5}$$

Aus (2. 1) wird somit nach (2. 5)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{\partial\lambda}{\partial x^i}F - \frac{\partial\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial F}{\partial x^i_\alpha} + \left(\frac{\partial S^\alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial S^\alpha_i}{\partial x^j}\right)x^j_\alpha \equiv 0. \tag{2. 6}$$

Nach partieller Ableitung nach x^k_β wird wegen

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial\lambda}{\partial x^j}x^j_\alpha$$

die Relation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x^{[i}}\frac{\partial F}{\partial x^{k]}_\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i_\alpha \partial x^k_\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{[i}}S^\beta_{k]} \equiv 0 \tag{2. 7}$$

gelten.

Bilden wir nun den in i, k symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil von (2. 7), so erhält man die folgenden beiden Identitäten:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(i}_\alpha \partial x^{k)}_\beta} \equiv 0, \tag{2. 8}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x^{[i}}\frac{\partial F}{\partial x^{k]}_\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial^2 F}{\partial x^{[i}_\alpha \partial x^{k]}_\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{[i}}S^\beta_{k]} \equiv 0. \tag{2. 9}$$

Die Gleichungen (2. 6)—(2. 9) *bestimmen also die Form von* F, λ, S_j^γ *und* φ, *wenn nur diese Differentialgleichungen bezüglich diese Größen überhaupt lösbar sind.*

Als Beispiel nehmen wir an, daß F die Form

$$F(x, x_\alpha) = a^\gamma_j(x)x^j_\gamma + A(x) \tag{2. 10}$$

hat, d. h. F ist in x_α^i linear. Offensichtlich ist dann (2. 8) erfüllt. Die Identität (2. 9) geht in

$$\frac{\partial}{\partial x^{[i}} S_{k]}^\beta = \frac{\partial \lambda}{\partial x^{[k}} a_{i]}^\beta \tag{2. 11}$$

über. Da

$$\frac{\partial S_k^\beta}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^{[i}} S_{k]}^\beta + \frac{\partial}{\partial x^{(i}} S_{k)}^\beta$$

besteht, wird nach (2. 11)

$$\frac{\partial S_k^\beta}{\partial x^i} = \frac{\partial \lambda}{\partial x^{[k}} a_{i]}^\beta + \varphi_{ik}^\beta(x), \tag{2. 12}$$

wo

$$\varphi_{ki}^\beta = \varphi_{ik}^\beta \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^{(i}} S_{k)}^\beta$$

beliebig gewählt werden kann, da wegen der Symmetrie in i, k diese Größen in (2. 6)—(2. 9) nicht vorkommen werden. (2. 12) ist nun ein partielles Differentialgleichungssystem für S_k^β, a_k^β und λ, wo die in i, k symmetrische $\varphi_{ik}^\beta(x)$ noch beliebig gewählt werden können. Aus (2. 6) wird auf Grund von (2. 10) und (2. 11)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} A(x) = 0.$$

Diese Gleichung ist wegen der Willkürlichkeit von $A(x)$ offenbar immer lösbar.

§ 3. Der Fall $\lambda = 1$

Ist in unserem Fundamentalproblem (1. 2) λ eine Konstante, so kann — wie wir das schon in der Einleitung bemerkt haben — $\lambda = 1$ gesetzt werden.

Ist aber $\lambda = 1$, so entsteht ein Spezial-Fall des im vorigen Paragraphen behandelten Typs. Die Gleichung (2. 8) ist offenbar identisch erfüllt. Aus (2. 9) bekommt man, daß die S_k^β $(n-1)$ Gradientvektoren bestimmen; es ist:

$$S_k^\beta(x) = \frac{\partial S^\beta(x)}{\partial x^k} \tag{3. 1}$$

und aus (2. 6) bekommt man, daß $\varphi =$ Konstante ist. (2. 5) bestimmt jetzt die Fundamentalfunktion F^* in Hinsicht auf (3. 1) in der Form

$$F^*(x, x_\alpha) = F(x, x_\alpha) + \frac{\partial S^\gamma(x(u))}{\partial u^\gamma} + \varphi \tag{3. 2}$$

wo φ eine Konstante ist. Damit haben wir den Zusammenhang von F und F^* bestimmt, da falls (2. 7) gültig ist, dann auch (1. 2) erfüllt ist.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß falls (3. 2) besteht, so ist die Übereinstimmung der Variationsprobleme

$$\delta \int_{\mathscr{A}} \dots \int F^* \, du = 0 \quad \text{und} \quad \delta \int_{\mathscr{A}} \dots \int F \, du = 0, \quad du \overset{\text{def}}{=} du^1 \dots du^{n-1}$$

trivial, da jetzt nach (2. 7) mittels des Stokesschen Satzes

$$\int_{\mathscr{A}} \dots \int F^* \, du^1 \dots du^{n-1} = \int_{\mathscr{A}} \dots \int F \, du^1 \dots du^{n-1} +$$

$$+ \int_{\partial \mathscr{A}} \dots \int \sum_{\beta=1}^{n-1} (-1)^{\beta-1} S^\beta \, du^1 \dots du^{\beta-1} \, du^{\beta+1} \dots du^{n-1} + \text{Konst.}$$

besteht, wo die Konstante aus $\int \dots \int \varphi \, du$ entstanden ist und $\partial \mathscr{A}$ die Grenze von $\mathscr{A}$ bedeutet. (Für den Stokesschen Satz vgl. z. B. [2], S. 64—66.)

Unsere bisherigen Resultate fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 1. *Gelten die Relationen* (1. 2) *und* (2. 4), *so ist der Zusammenhang von F und F^* durch* (2. 5) *bestimmt, wo die Funktionen λ, S_j^γ, F und φ den Relationen* (2. 6), (2. 8) *und* (2. 9) *genügen müssen. Ist in* (1. 2) $\lambda = 1$, *so ist der Zusammenhang von F und F^* durch* (3. 2) *bestimmt, wo $S^\gamma(x)$ beliebige Funktionen von x^i sind und φ eine Konstante bedeutet.*

§ 4. Verallgemeinerungen

Eine der einfachsten Verallgemeinerungen ist die Annahme, daß die Grundfunktionen auch von den $x^i_{\alpha\beta}$ abhängig sind. In diesem Falle ist der Euler—Lagrangesche Operator durch (1. 3) festgelegt. Ist λ eine Konstante, so kann (1. 2) in der Form

$$(4.\,1) \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}(F^* - \lambda F) - \frac{\partial}{\partial u^\alpha}(F^*_{x^i_\alpha} - \lambda F_{x^i_\alpha}) + \chi \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}(F^*_{x^i_{\alpha\beta}} - \lambda F_{x^i_{\alpha\beta}}) \equiv 0$$

geschrieben werden. Diesen Fall wollen wir nur nur skizzieren, da — wie wir es sehen werden — die Relation (4. 1) die Form von F^*, wegen der Symmetrie von $x^i_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $x^i_{\alpha\beta\gamma}$ in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, nicht bestimmt. Berechnen wir in (4. 1) die partiellen Ableitungen nach u^α und u^β, so zeigt sich, daß die linke Seite von (4. 1) ein Polynom von $x^i_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $x^i_{\alpha\beta\gamma}$ ist. Offensichtlich ist dieses Polynom in $x^i_{\alpha\beta\gamma}$ von zweitem Grade.

Das Verschwinden der Koeffizienten von $x^i_{\alpha\beta\gamma\delta}$ bzw. $x^i_{\alpha\beta\gamma} x^j_{\delta\varepsilon\eta}$ gibt zwei Relationen, in denen die homogenen linearen Ausdrücke der Größen von der Form

$$(4.\,2) \qquad \frac{\partial^2 (F^* - \lambda F)}{\partial x^i_{\alpha\beta} \, \partial x^j_{\gamma\delta}}$$

bzw.

$$(4.\,3) \qquad \frac{\partial^3 (F^* - \lambda F)}{\partial x^i_{\alpha\beta} \, \partial x^j_{\gamma\delta} \, \partial x^k_{\varepsilon\eta}}$$

vorkommen. Diese Relationen sind sicher erfüllt, falls z.B. $(F^* - \lambda F)$ in $x^i_{\alpha\beta}$ linear ist, d.h. F^* hat die Form:

$$F^*(x, x_\alpha) = \lambda F(x, x_\alpha) + \chi S^{\alpha\beta}_j(x, x_\gamma) x^j_{\alpha\beta} + \varphi(x, x_\alpha), \tag{4.4}$$

$$S^{\alpha\beta}_j(x, x_\gamma) \equiv S^{\beta\alpha}_j(x, x_\gamma).$$

$S^{\alpha\beta}_j$ und φ sind nicht beliebig angebbar, da (4. 1) identisch erfüllt sein muß. Es wird somit

$$\chi \frac{\partial S^{\alpha\beta}_j}{\partial x^i} x^j_{\alpha\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(\chi \frac{\partial S^{\alpha\beta}_j}{\partial x^i_\gamma} x^j_{\alpha\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i_\gamma}\right) + \chi \frac{\partial^2 S^{\alpha\beta}_i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \equiv 0. \tag{4.5}$$

Da der Koeffizient von $x^j_{\alpha\beta\gamma}$ verschwinden muß, bekommt man die Relation

$$\chi\left(\frac{\partial S^{\alpha\beta}_i(x, x_\delta)}{\partial x^j_\gamma} - \frac{\partial S^{\alpha\beta}_j(x, x_\delta)}{\partial x^i_\gamma}\right) x^j_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0. \tag{4.6}$$

Diese Relation ist erfüllt, falls z.B. $S^{\alpha\beta}_i$ die Form:

$$S^{\alpha\beta}_i(x, x_\delta) = S^{\alpha\beta\varrho}_{ik}(x) x^k_\varrho + \psi^{\alpha\beta}_i(x)$$

hat, und die $S^{\alpha\beta\varrho}_{ik}$ in i, k und in α, β symmetrisch sind. Die linke Seite von (4. 5) wird somit ein Polynom von zweitem Grade in $x^i_{\alpha\beta}$, dessen Koeffizienten aber selbstverständlich auch verschwinden müssen. Das wird für $S^{\alpha\beta}_j$ bzw. φ noch mehrere Bedingungen geben, die wir aber nicht explizit berechnen wollen.

Kurz zusammenfassend können wir behaupten, daß (4. 1) *erfüllt ist, falls F^* die Form* (4. 4) *hat, und* (4. 5) *besteht.*

Aus den bisherigen Untersuchungen ist ersichtlich, daß die von uns verwandte Methode im Wesentlichen nicht für äquivalente Variationsprobleme, sondern für äquivalente partielle Differentialgleichungssysteme benützt wurde. Deshalb wollen wir im folgenden solche äquivalente partielle Differentialgleichungssysteme untersuchen, die nicht die Euler—Lagrangeschen Differentialgleichungssysteme eines Variationsproblems sind.

Wir nehmen an, daß $\mathscr{E}^*_k(F)$ den Differentialoperator

$$\mathscr{E}^*_k(F) \overset{\text{def}}{=} a^i_k(x) F_{x^i} - \sum_{\varrho=1}^{n-1} \underset{(\varrho)}{b^i_k}(x) \frac{\partial}{\partial u^\varrho} F_{x^i_\varrho} \tag{4.7}$$

bedeutet. Im folgenden wollen wir untersuchen, was für eine Form F^* hat, falls

$$\mathscr{E}^*_k(F^*) \equiv \lambda\, \mathscr{E}^*_k(F), \quad \lambda = \text{Konstante} \tag{4.8}$$

besteht. Offenbar sind auf Grund von (4. 8) die Lösungshyperflächen der partiellen Differentialgleichungssysteme

$$\mathscr{E}^*_k(F) = 0 \quad \text{und} \quad \mathscr{E}^*_k(F^*) = 0$$

identisch. Wir beweisen das folgende

Lemma. *Ist $\mathscr{E}_k^*(F)$ für jeden Skalar F ein kovarianter Vektor, so gilt*

$$a_k^i = \underset{(\varrho)}{b_k^i} \qquad (\varrho = 1, \dots, n-1). \tag{4.9}$$

und $\mathscr{E}_k^*(F)$ hat somit die Form:

$$\mathscr{E}_k^*(F) = a_k^i(x)\mathscr{E}_i(F). \tag{4.10}$$

Beweis. Es sei $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Koordinatentransformation mit von Null verschiedener Jacobischer Determinante. Da nach unserer Annahme $\mathscr{E}_k^*(F)$ ein kovarianter Vektor ist, gilt

$$\overline{\mathscr{E}_k^*}(\bar{F}) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\mathscr{E}_i^*(F), \tag{4.11}$$

wo

$$\overline{\mathscr{E}_k^*}(\bar{F}) = \bar{a}_k^i \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^i} - \sum_{\varrho=1}^{n-1} \underset{(\varrho)}{\bar{b}_k^i} \frac{\partial}{\partial u^\varrho} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_\varrho^i} \tag{4.11a}$$

bedeutet. Nun ist F ein Skalar, d. h.

$$\bar{F}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha) = F(x, x_\alpha),$$

woraus die Transformationsformeln

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial F}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial F}{\partial x_\varrho^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i}\bar{x}_\varrho^j,$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\varrho}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_\varrho^i} = \left(\frac{\partial}{\partial u^\varrho}\frac{\partial F}{\partial x_\varrho^l}\right)\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial F}{\partial x_\varrho^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i}\bar{x}_\varrho^j$$

folgen. — Bei der Herleitung dieser Formeln haben wir auch die Transformationsformeln

$$x_\beta^t = \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^m}\bar{x}_\beta^m$$

benützt.

Substituieren wir nun diese Größen in (4. 11a), und dann $\overline{\mathscr{E}_k^*}(\bar{F})$ in (4. 11), so muß der Koeffizient von $\partial^2_{\bar{x}^j\bar{x}^i} x^l$ wegen der Willkürlichkeit der Transformation $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ verschwinden. Das gibt

$$\sum_{\varrho=1}^{n-1} (\bar{a}_k^i - \underset{(\varrho)}{\bar{b}_k^i})\frac{\partial F}{\partial x_\varrho^l}\bar{x}_\varrho^j = 0.$$

Es war aber F auch beliebig, somit muß $\bar{a}_k^i = \underset{(\varrho)}{\bar{b}_k^i}$ bestehen. Offenbar muß diese letzte Relation in jedem Koordinatensystem gelten, da $\bar{x}^i$ ein beliebiges Koordinatensystem bestimmt, woraus die Relation (4. 9) folgt. Aus (4. 7) wird man aber nach (4. 9) im Hinblick auf (1. 1) unmittelbar (4. 10) bekommen, w.z.b.w.

Im folgenden können wir uns also auf den Typ (4. 10) beschränken. Aus (4. 8) bekommt man das Differentialglechungssystem

$$a_k^i(x)\big(\mathscr{E}_i(F^*) - \lambda\mathscr{E}_i(F)\big) \equiv 0. \tag{4.12}$$

Ist der Rang der Determinante $|a_k^i|$ gleich n, so ist (4. 12) und somit auch (4. 8) mit (1. 2) identisch. Nehmen wir also an, daß der Rang r von $|a_k^i|$ kleiner als n ist. Dann kann (4. 12) in der Form

$$\mathscr{E}_i(F^*) - \lambda\mathscr{E}_i(F) = \sum_{t=r+1}^{n} A_{it} B_t \qquad (i = 1, 2, \dots, r) \tag{4. 13}$$

geschrieben werden, wobei

$$A_{it} \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^{i-1}\, a_1^t\, a_1^{i+1} \dots a_1^r \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_r^1 \dots a_r^{i-1}\, a_r^t\, a_r^{i+1} \dots a_r^r \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, r \\ t = r+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

bedeutet, und

$$B_t(x, x_\alpha, x_{\alpha\beta}) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{E}_t(F^*) - \lambda\mathscr{E}_t(F), \qquad (t = r+1, \dots, n)$$

eine beliebige Funktion von x^i, x^i_α und ein linearer Ausdruck von $x^i_{\alpha\beta}$ ist. Beachten wir noch, daß λ eine Konstante ist, so ist (4. 13) mit

$$\mathscr{E}_i(F^* - \lambda F) = \sum_{t=r+1}^{n} A_{it} B_t, \qquad (i = 1, \dots, r) \tag{4. 14}$$

identisch.

Ist nun

$$\Phi = \Phi(x, x_\alpha)$$

die allgemeine Lösung von

$$\mathscr{E}_i(\Phi) \equiv \sum_{t=r+1}^{n} A_{it} B_t, \qquad (i = 1, \dots, r), \tag{4. 15}$$

wo die B_t beliebige vorgegebene, in $x^i_{\alpha\beta}$ lineare Funktionen bedeuten, so ist nach (4. 14)

$$F^* - \lambda F = \Phi.$$

Wir können somit den folgenden Satz behaupten:

Satz 2. *Ist der Rang r von $|a_k^i|$ kleiner als n, und gilt* (4. 8), *wo $\mathscr{E}_k^*$ durch* (4. 10) *festgelegt ist, so hat F^* die Form*

$$F^*(x, x_\alpha) = \lambda F(x, x_\alpha) + \Phi(x, x_\alpha),$$

wobei Φ dem Differentialgleichungssystem (4. 15) *genügt.*

Bemerkung. Da die B_t $(t = r+1, \dots, n)$ auch von $x^i_{\alpha\beta}$ abhängig sind, müssen die Koeffizienten von $x^j_{\alpha\beta}$ in (4. 15) verschwinden. Die Funktion Φ ist von $x^j_{\alpha\beta}$ unabhängig, und $\mathscr{E}_i(\Phi)$ ist in $x^j_{\alpha\beta}$ linear.

Zum Schluß wollen wir einen sehr wichtigen Satz beweisen, welcher zeigt, daß wie stark die Relation (1. 2) die Funktionen F und F^* miteinander verbindet.

Satz 3. *Ist in* (1. 2) $\lambda = 1$, *ist* (2. 4) *gültig und ist die Dimensionszahl des Grundraumes: $n > 2$, ferner sind die Grundintegrale $\mathscr{I}(F)$ und $\mathscr{I}(F^*)$ parameterinvariant, so folgt aus* (1. 2) $F^*(x, x_\alpha) \equiv F(x, x_\alpha)$.

Beweis. Aus dem Parameterinvarianz der Grundintegrale $\mathcal{I}(F)$ und $\mathcal{I}(F^*)$ folgt (vgl. [5], Gleichung (1. 8)):

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha^i} x_\beta^i = \delta_\beta^\alpha F, \quad \frac{\partial F^*}{\partial x_\alpha^i} x_\beta^i = \delta_\beta^\alpha F^*.$$

Nach einer Verjüngung bezüglich α und β folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha^i} x_\alpha^i = (n-1)F, \quad \frac{\partial F^*}{\partial x_\alpha^i} x_\alpha^i = (n-1)F^*. \tag{4. 16}$$

Beachten wir jetzt, daß nach unserem Satz 1 F^* die Form (3. 2) hat, so folgt aus (4. 16) $\varphi=0$, und wegen

$$\frac{\partial S^\gamma(x(u))}{\partial u^\gamma} \equiv \frac{\partial S^\gamma(x)}{\partial x^j} x_\gamma^j$$

gilt die Relation:

$$\frac{\partial S^\alpha(x)}{\partial x^i} x_\alpha^i = (n-1)\frac{\partial S^\alpha(x)}{\partial x^j} x_\alpha^j,$$

woraus, in Hinsicht auf $n>2$, wird:

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial u^\alpha} \equiv \frac{\partial S^\alpha(x)}{\partial x^i} x_\alpha^i = 0.$$

Aus (3. 2) folgt dann die Behauptung des Satzes 3.

Schriftenverzeichnis

[1] WOLDEMAR BARTHEL, Zur Affingeometrie auf Mannigfaltigkeiten, *Jahresbericht d. DMV*, **68** (1966), 13—44.

[2] HARLEY FLANDERS, *Differential forms with applications to the physical sciences* (New York—London, 1963).

[3] L. KOSCHMIEDER, Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale, *Math. Zeitschr.*, **24** (1926), 181—190.

[4] ARTHUR MOÓR, Über äquivalente Variationsprobleme erster und zweiter Ordnung, *J. reine angew. Math.*, **223** (1966), 131—137.

[5] A. KAWAGUCHI, On areal spaces. III, *Tensor* (New Series), **1** (1951), 89—103.

(Eingegangen am 2. Februar 1967)